Задача 1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

1.1. $\frac{dy}{dx}=2x(1-y)$.

Решение:

Найдем уравнение изоклин. По определению уравнение имеет вид f(x,y)=k, где k=const. Следовательно, т.к. y'=f(x,y)=2x(1-y), то k=2x(1-y) ⇒

$1-y=\frac{k}{2x}$,⇒$y=1-\frac{k}{2x}$ Это уравнения изоклин.

Задавая различные значения параметра k, можно получить семейство кривых, каждая из которых является изоклиной при определённом значении параметра k.

При k=0 получаем уравнение прямой y=1, и tgα=0 ⇒α=0^0.

При k≠0 получаем семейство гипербол с центром в точке (0,1). При x→±∞; y→1, при x→0; y→±∞

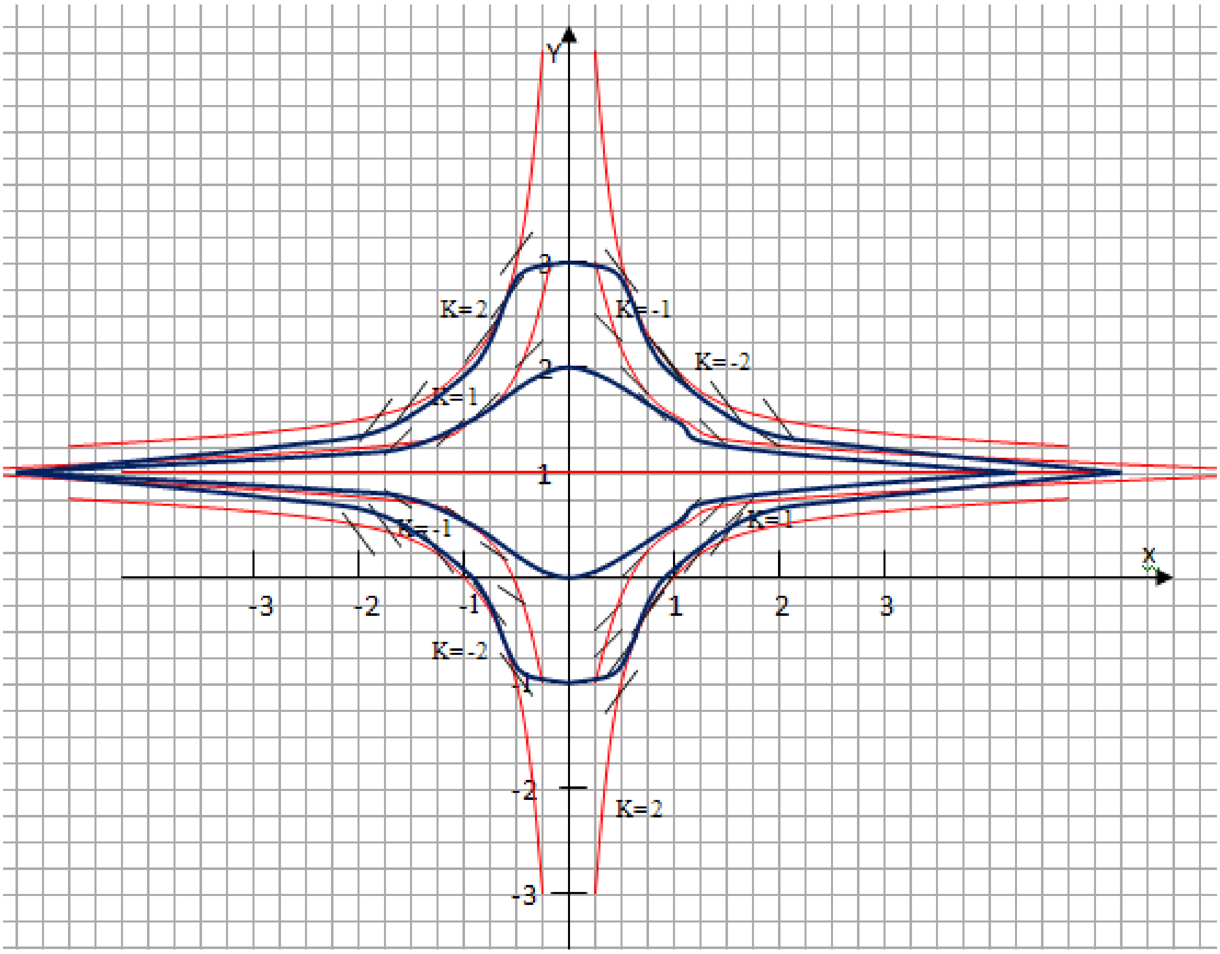
Если k=1 ⇒ $y=1-\frac{1}{2x}$, и tgα=1 ⇒α=45^0,

При k=-1 ⇒ $y=1+\frac{1}{2x}$, и tgα=-1 ⇒α=135^0,

Если k=2 ⇒ $y=1-\frac{1}{x}$, и tgα=2 ⇒α=63^0,

При k=-2 ⇒ $y=1+\frac{1}{x}$, и tgα=-2 ⇒α=117^0,

Построим график. Изоклины: гиперболы для k=±1 и k=±2.(Красным цветом) Интегральные кривые – синим цветом.



Задача 2. Решить уравнение допускающее понижение порядка
2.1. $x^2 y'' = (y')^2$

Решение: Это дифференциальное уравнение 2-го порядка. Оно позволяет снизить его порядок путем подстановки $y'(x)=z(x)$ т.к. не содержит функцию *y*. Вторая производная $y''=z'$. Подставляя это значение в исходное уравнение получим: $x^2z'=z^2$, здесь $z'=\frac{dz}{dx}$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$x^2\frac{dz}{dx}=z^2$$

Разделим переменные:

$$\frac{dz}{z^2}=\frac{dx}{x^2}$$

Проинтегрируем обе части этого равенства:

$$\int\frac{dz}{z^2}=\int\frac{dx}{x^2} \text{ или } -\int\frac{dz}{z^2}=-\int\frac{dx}{x^2},$$

Получаем $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+C_1$; $\frac{1}{z}=\frac{1+xC_1}{x}$; $z=\frac{x}{xC_1+1}$

Вернемся к переменной y. Так как $z=y'$, то

$y' = \frac{x}{C_1 x + 1}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{C_1 x + 1}$; $dy = \frac{x}{C_1 x + 1} dx$

Переменные вновь разделены. Проинтегрируем обе части равенства.

$$y = \int \frac{x}{C_1 x + 1} dx = \frac{1}{C_1} \int \frac{C_1 x + 1 - 1}{C_1 x + 1} dx = \frac{1}{C_1} \int \left(1 - \frac{1}{C_1 x + 1}\right) dx = \frac{1}{C_1} \int dx - \text{¿} \frac{1}{C_1} \int \frac{dx}{C_1 x + 1} = \text{¿} \frac{1}{C_1} \int dx - \text{¿} \frac{1}{C_1^2}$$

Таким образом - общее решение заданного уравнения

$$y = \frac{x}{C_1} - \frac{\ln|C_1 x + 1|}{C_1^2} + C_2$$

Ответ: $y = \frac{x}{C_1} - \frac{\ln|C_1 x + 1|}{C_1^2} + C_2$

Задача 3.

Решить систему уравнений

3.1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{t}{y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{-t}{x} \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{t}{y} (1) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{-t}{x} (2) \end{cases};$$

Из (1) уравнения выразим t:

$$t = y \frac{dx}{dt}$$

Подставим это выражение в уравнение (2)

$\frac{dy}{dt} = -t \frac{y \frac{dx}{dt}}{x} = \frac{-y}{x} \frac{dx}{dt}$; тогда

$dy = \frac{-y dx}{x}$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{-dx}{x}$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1$;

$$\ln|y| = -\ln \frac{C_1}{|x|}$$

$$y = \frac{C_1}{x}$$

Подставляем полученное значение в (1) уравнение:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t}{\frac{C_1}{x}}=\frac{tx}{C_1}$$

Снова разделяем переменные и интегрируем обе части:

$$\frac{dx}{x}=\frac{tdt}{C_1}\ ;$$

$$\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{C_1}\int tdt\ ;$$

$$\ln|x|=\frac{1}{C_1}\frac{t^2}{2}+\ln C_2\ ;$$

$$x=C_2 e^{\frac{t^2}{2C_1}}$$

Тогда для функции y:

$$y=\frac{C_1}{x}=\frac{C_1}{C_2 e^{\frac{t^2}{2C_1}}}=\frac{C_1}{C_2}e^{\frac{-t^2}{2C_1}}$$

Ответ: общее решение системы:

$$x=C_2 e^{\frac{t^2}{2C_1}}$$

$$y=\frac{C_1}{C_2}e^{\frac{-t^2}{2C_1}}$$

Задача 4. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,7. Сколько нужно провести испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений события равнялось 10?

Решение: Наивероятнейшее число появлений события определяется двойным неравенством: $np-q\le k_0\le np+p$

По условию нашей задачи: $q=1-p=1-0,7=0,3$

$$\begin{cases}0,7n-0,3\le 10\\ 0,7n+0,7\ge 10\end{cases}$$

Из первого неравенства:

$$n\le\frac{10+0,3}{0,7}=14{,}7143$$

Из второго неравенства

$$n\ge\frac{10-0,7}{0,7}=13{,}2857$$

$13{,}2857\le n\le 14{,}7143$

Так как n-целое число, получаем n=14.

Ответ: Необходимо провести 14 испытаний.