Автономная некоммерческая организация высшего образования
«МОСКОВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра экономики и управления

Форма обучения: очно-заочная

ВЫПОЛНЕНИЕ

ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Математика

Группа 22Э211в

Студент Новицкая А.А

МОСКВА 2023

Задача 1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

1.1. $\frac{dy}{dx} = 2x(1 - y)$.

Решение:

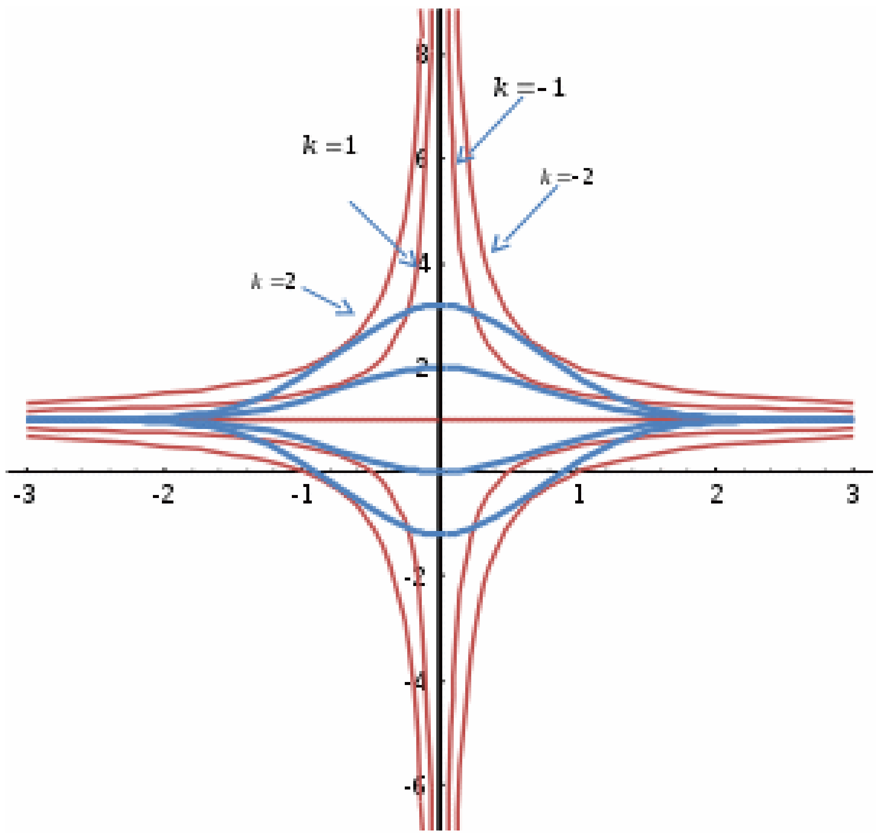
Задавая различные значения параметра k, можно получить семейство кривых, каждая из которых является изоклиной при определённом значении параметра k. Построение изоклин - один из приёмов качественного анализа поведения решений анализируемого дифференциального уравнения. У нас

$$y' = f(x, y) = 2x(1 - y) \quad \Rightarrow \quad k = 2x(1 - y) \quad \Rightarrow \quad y = 1 - \frac{k}{2x}$$

Это уравнения изоклин.

При $k = 0$ получаем уравнение прямой $y = 1$, при $k \neq 0$ получаем семейство гипербол с центром в точке (0;1). При $x \to \pm\infty$: $y \to 1$, при $x \to 0$: $y \to \pm\infty$.

Построим график (изоклины (гиперболы для $k = \pm 1$ и $k = \pm 2$ и прямая для $k = 0$) – красным цветом, интегральные кривые – синим):



Задача 2. Решить уравнение, допускающее понижение порядка

2.1. $x^2 y'' = y'^2$.

Решение:

Это дифференциальное уравнение 2-го порядка. Оно позволяет снизить его порядок путем подстановки $y'(x) = z(x)$, потому что не содержит функцию *y*.

Вторая производная: $y'' = z'$. Тогда после подстановки $x^2 z' = z^2$, где $z' = \dfrac{dz}{dx}$.
Это уравнение с разделяющимися переменными.
Разделяем переменные:

$$x^2 z' = z^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 \frac{dz}{dx} = z^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}.$$

Пронтегрируем обе части этого равенства:

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad -\int \frac{dz}{z^2} = -\int \frac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C_1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{x}{C_1 x + 1}.$$

Возвращаемся к переменной *y*: $z = y'$ $\Rightarrow$ получаем:

$$y' = \frac{x}{C_1 x + 1}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{C_1 x + 1}, \qquad dy = \frac{x}{C_1 x + 1} dx.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части равенства:

$$\int dy = \int \frac{x}{C_1 x + 1} dx$$

$$y = \int \frac{x}{C_1 x + 1} dx = \frac{1}{C_1} \int \frac{C_1 x + 1 - 1}{C_1 x + 1} dx = \frac{1}{C_1} \int \left(1 - \frac{1}{C_1 x + 1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{C_1} \int dx - \frac{1}{C_1} \int \frac{dx}{C_1 x + 1} = \frac{1}{C_1} \int dx - \frac{1}{C_1^2} \int \frac{d(C_1 x + 1)}{C_1 x + 1} = \frac{x}{C_1} - \frac{\ln|C_1 x + 1|}{C_1^2} + C_2.$$

$y = \dfrac{x}{C_1} - \dfrac{\ln|C_1 x + 1|}{C_1^2} + C_2$ - общее решение.

Ответ: $y = \dfrac{x}{C_1} - \dfrac{\ln|C_1 x + 1|}{C_1^2} + C_2$.

Задача 3. Решить систему уравнений

3.1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{y} & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t}{x} & (2) \end{cases}$$

Решение: присвоим уравнениям системы номера (1) и (2).

Сначала из уравнения (1) выражаем переменную $t = y\dfrac{dx}{dt}$. Подставляем это выражение в уравнение (2), получаем: $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{y\frac{dx}{dt}}{x} = -\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dy = -\dfrac{ydx}{x}$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные: $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$

Интегрируем обе части: $\int \dfrac{dy}{y} = -\int \dfrac{dx}{x}$,

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln\frac{C_1}{|x|} \Rightarrow y = \frac{C_1}{x}.$$

Подставляем полученное выражение в уравнение (1): $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{\frac{C_1}{x}} = \dfrac{tx}{C_1}$.

Разделяем переменные и интегрируем обе части:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{tx}{C_1} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{tdt}{C_1} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \frac{1}{C_1}\int tdt,$$

$$\ln|x| = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{t^2}{2} + \ln C_2, \qquad x = C_2 e^{\frac{t^2}{2C_1}}.$$

Тогда для функции y: $y = \dfrac{C_1}{x} = \dfrac{C_1}{C_2 e^{\frac{t^2}{2C_1}}} = \dfrac{C_1}{C_2} e^{-\frac{t^2}{2C_1}}$.

Ответ: Общее решение системы имеет вид $\begin{cases} x = C_2 e^{\frac{t^2}{2C_1}} \\ y = \dfrac{C_1}{C_2} e^{-\frac{t^2}{2C_1}} \end{cases}$.

Задача 4. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,7. Сколько нужно провести испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений события равнялось 10?

Решение: данная задача принадлежит к схеме испытаний Бернулли:

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p и не происходит с вероятностью $q = 1 - p$. Наивероятнейшее число появлений события в схеме Бернулли находится из двойного неравенства:

$$np - q \le k_0 < np + p.$$

У нас $p = 0{,}7 \Rightarrow q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Нужно найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений события $k_0 = 10$.

Подставляем наши данные:

$$n \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \le 10 < n \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \Rightarrow \begin{cases} 0{,}7n + 0{,}7 > 10 \\ 0{,}7n - 0{,}3 \le 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0{,}7n > 9{,}3 \\ 0{,}7n \le 10{,}3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n > 13{,}29 \\ n \le 14{,}71 \end{cases} \Rightarrow$$

$13{,}29 < n \le 14{,}71 \Rightarrow$ целое число, удовлетворяющее этому неравенству, равно $n = 14$.

Ответ: $n = 14$.