Решение примерного варианта

Задача 1. Исследовать сходимость числового ряда.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$.

К данному знакоположительному ряду применим признак Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = \infty > 1$; ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Исследуем данный знакочередующийся ряд на абсолютную сходимость, рассмотрев ряд, составленный из модулей его членов:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

Полученный знакоположительный ряд сравним по второму признаку сравнения с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, про который известно, что он расходится:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$.

Предел существует и не равен нулю; следовательно, согласно признаку, исследуемый ряд, как и гармонический, тоже расходится. Значит, исходный знакочередующийся ряд абсолютной сходимости не имеет.

Проверим теперь, обладает ли исходный знакочередующийся ряд условной сходимостью. Для этого используем признак Лейбница:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$;

$u_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n-1} = u_n$, т.е. для любых n выполняется условие $u_{n+1} < u_n$.

Оба условия признака Лейбница выполняются, т.е. по признаку Лейбница ряд сходится. Таким образом, исходный знакочередующийся ряд сходится условно.

Ответ: ряд сходится условно.

Задача 2. Найти область сходимости степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n tg\frac{1}{n}.$$

Здесь центр сходимости $a=2$. Найдем радиус сходимости по формуле (16), полученной из признака Даламбера:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|A_n|}{|A_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|tg\frac{1}{n}\right|}{\left|tg\frac{1}{n+1}\right|}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Так как при $x\to 0$ функции tgx и x являются эквивалентными бесконечно малыми, то при $n\to\infty$ эквивалентны бесконечно малые $tg\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n}$, а также $tg\frac{1}{n+1}$ и $\frac{1}{n+1}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|tg\frac{1}{n}\right|}{\left|tg\frac{1}{n+1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

По найденному радиусу сходимости получаем гарантированный интервал абсолютной сходимости:

$$(a-R;\ a+R)=(2-1;\ 2+1)=(1;\ 3).$$

Исследуем сходимость ряда на границах этого интервала.

 $x=1.$ $\sum_{n=1}^{\infty}(1-2)^n tg\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n}.$

Этот знакочередующийся ряд не имеет абсолютной сходимости, т.к. $\lim_{n\to\infty}\frac{tg(1/n)}{1/n}=1$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (второй, предельный признак сравнения).

В то же время для него выполняются условия $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}tg\frac{1}{n}=0$ и

$u_{n+1}=tg\frac{1}{n+1}<tg\frac{1}{n}=u_n\quad\forall\ n$, т.к. tgx - возрастающая функция. Следовательно,

ряд сходится по признаку Лейбница, т.е. исходный степенной ряд в т. $x=1$ сходится условно.

 $x=3.$ $\sum_{n=1}^{\infty}(3-2)^n tg\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}1^n tg\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n}.$

Этот знакоположительный числовой ряд также можно сравнить с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ по второму признаку сравнения, из чего следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n}$ расходится.

Ответ: область сходимости данного степенного ряда: $[1;\ 3)$.

<u>Задача 3.</u> Данную функцию представить в виде степенного ряда по степеням $(x-a)$, где a – данное число.

$f(x)=\dfrac{1}{x-3}$, $a=-1$.

Требуется разложить функцию по степеням двучлена $(x+1)$. Обозначим его новой переменной: $z=x+1$. Тогда $x=z-1$, и $f(x)=\dfrac{1}{z-4}$. Последнее выражение представим в виде $\dfrac{1}{-4\left(1-\dfrac{z}{4}\right)}$ и введем еще одну переменную: $u=-\dfrac{z}{4}$. После этого $f(x)=\dfrac{1}{-4(1+u)}=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+u}$. Теперь для функции $\dfrac{1}{1+u}$ применим ее известное разложение в ряд Маклорена (см. справочную информацию):

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+\ldots+(-1)^n u^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n,\quad u\in(-1;\ 1).$$

В последнем разложении возвратимся к переменной z и далее к исходной переменной x:

$$f(x)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+u}=-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n=-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{z}{4}\right)^n=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{4^{n+1}}.$$

Найдем теперь область сходимости. Для переменной u ее составляет интервал $(-1;\ 1)$, т.е. $-1<u<1$. Тогда $-1<-\dfrac{z}{4}<1$ и $-1<-\dfrac{x+1}{4}<1$. Отсюда получаем, что $-4<x+1<4\Rightarrow -5<x<3$.

Ответ: $\dfrac{1}{x-3}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{4^{n+1}}$, $x\in(-5;\ 3)$.

<u>Задача 4.</u> Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции при данном значении аргумента с помощью разложения функции в степенной ряд.

e^x при $x=-0{,}5$; $\varepsilon=0{,}0001$.

По условию задачи требуется вычислить $e^{-0.5}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ с точностью до четвертого знака после запятой. Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции e^x:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty;\ +\infty).$$

Подставим сюда заданное значение $x=-0.5$:

$$e^{-0.5}=1-\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}-\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}+\ldots,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ . \qquad \text{(a)}$$

Здесь в правой части при вычислении нужно учесть такое количество первых членов, чтобы остаток не превышал заданной погрешности: $|R_n| \le \varepsilon$. При этом ряд в правой части (а) получился знакочередующимся, и для него модуль остатка меньше первого члена этого остатка: $|R_n| < u_{n+1}$. Следовательно, для обеспечения заданной точности достаточно выполнить условие

$$u_{n+1} \le \varepsilon. \qquad \text{(б)}$$

Поскольку

$$u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)!},$$

то условие (б) принимает вид

$$\frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \le 0{,}0001, \text{ или } 2^{n+1} \cdot (n+1)! \ge 10000.$$

Методом подбора легко убедиться, что последнее условие начинает выполняться с номера $n = 5$:

$$2^{4+1}(4+1)! = 32 \cdot 120 = 3840 < 10000,$$

$$2^{5+1}(5+1)! = 64 \cdot 720 = 46080 > 10000.$$

Следовательно, для обеспечения заданной точности достаточно вычислить сумму первых шести членов ряда, с нулевого по пятый:

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 1 - 0{,}5 + 0{,}125 - 0{,}02083 + 0{,}00260 - 0{,}00026 = 0{,}60651 \approx 0{,}6065.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{e}} = 0{,}6065 \pm 0{,}0001$.

<u>Задача 5.</u> Вычислить приближенно с заданной точностью ε определенный интеграл с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд.

$$\int_0^{1/4} \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) dx; \quad \varepsilon = 0{,}0001.$$

Воспользуемся известным разложением в ряд логарифмической функции:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1;\ 1].$$

Заменим в этой формуле x на $\sqrt{x}$:

$$\ln\left(1+\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}^2}{2} + \frac{\sqrt{x}^3}{3} - \frac{\sqrt{x}^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{\sqrt{x}^{n+1}}{n+1} + \ldots =$$

$$= x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{2}{2}}}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^{\frac{4}{2}}}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{\frac{n+1}{2}}}{n+1}.$$

Пересчитаем область сходимости:

$$-1 < \sqrt{x} \le 1 \Rightarrow 0 \le \sqrt{x} \le 1 \Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow x \in [0;\ 1].$$

Констатируем, что интегрирование требуется произвести в пределах области сходимости. Следовательно, ряд, которым представлена подынтегральная функция, можно интегрировать почленно. Выполним это:

$$\int_0^{1/4}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx=\int_0^{1/4}\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{2}{2}}}{2}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^{\frac{4}{2}}}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{\frac{n+1}{2}}}{n+1}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left.\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{4}{2}}}{2\cdot\frac{4}{2}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{3\cdot\frac{5}{2}}-\frac{x^{\frac{6}{2}}}{4\cdot\frac{6}{2}}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{\frac{n+3}{2}}}{(n+1)\cdot\frac{n+3}{2}}+\ldots\right)\right|_0^{1/4}=$$

$$=2\left.\left(\frac{(\sqrt{x})^3}{1\cdot3}-\frac{(\sqrt{x})^4}{2\cdot4}+\frac{(\sqrt{x})^5}{3\cdot5}-\frac{(\sqrt{x})^6}{4\cdot6}+\ldots+(-1)^n\frac{(\sqrt{x})^{n+3}}{(n+1)\cdot(n+3)}+\ldots\right)\right|_0^{1/4}=$$

$$=2\left(\frac{1}{2^3\cdot1\cdot3}-\frac{1}{2^4\cdot2\cdot4}+\frac{1}{2^5\cdot3\cdot5}-\frac{1}{2^6\cdot4\cdot6}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^{n+3}(n+1)(n+3)}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2^2\cdot1\cdot3}-\frac{1}{2^3\cdot2\cdot4}+\frac{1}{2^4\cdot3\cdot5}-\frac{1}{2^5\cdot4\cdot6}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^{n+2}(n+1)(n+3)}+\ldots,$$

$n=0, 1, 2, \ldots$

Полученный ряд оказался знакочередующимся. Поэтому используем то же самое условие обеспечения заданной точности, что и в предыдущей задаче:

$$u_{n+1}\le\varepsilon. \qquad \text{(a)}$$

Здесь

$$u_{n+1}=\frac{1}{2^{n+3}(n+2)(n+4)},$$

поэтому минимально необходимое n находим из условия

$$\frac{1}{2^{n+3}(n+2)(n+4)}\le0{,}0001, \qquad \text{или} \qquad 2^{n+3}(n+2)(n+4)\ge10000:$$

$$n=4\Rightarrow 2^{4+3}(4+2)(4+4)=128\cdot6\cdot8=6144<10000,$$

$$n=5\Rightarrow 2^{5+3}(5+2)(5+4)=256\cdot7\cdot9=16128>10000.$$

Из последнего вытекает, что для обеспечения заданной точности достаточно просуммировать первые шесть членов ряда:

$$\int_0^{1/4}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx\approx\frac{1}{12}-\frac{1}{64}+\frac{1}{480}-\frac{1}{768}+\frac{1}{2240}-\frac{1}{6144}\approx$$

$$\approx0{,}08333-0{,}01563+0{,}00208-0{,}00130+0{,}00045-0{,}00016=$$

$$=0{,}06877\approx0{,}0688.$$

Ответ: $\int_0^{1/4}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx=0{,}0688\pm0{,}0001.$

Задача 6. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в заданном интервале.

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\le x<0\\ x, & 0\le x<1\end{cases},\qquad (-1,\ 1).$$

Легко убедиться, что в заданном интервале функция непрерывна и, следовательно, может быть представлена своим рядом Фурье в смысле теоремы Дирихле. Кроме того, в рассматриваемом интервале она четная, поэтому ее ряд Фурье должен содержать только четные тригонометрические функции, т.е. косинусы. На этих основаниях записываем:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad l=1. \qquad (a)$$

Находим коэффициенты.

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{1}\int_0^1 xdx=2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=1.$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2}{1}\int_0^1 x\cos\frac{n\pi}{1}xdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos n\pi x\,dn\pi x=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^1 xd\sin n\pi x=\frac{2}{n\pi}\left(x\sin n\pi x\Big|_0^1-\int_0^1\sin n\pi xdx\right)=\frac{2}{n\pi}\left(0-\frac{1}{n\pi}(-\cos n\pi x)\Big|_0^1\right)=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1).$$

Т.к. $\cos n\pi=\begin{cases}1, & n-\text{четное}\\ -1, & n-\text{нечетное}\end{cases}$, то $\cos n\pi=(-1)^n$. Тогда

$$a_n=\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right).$$

Далее, $\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}0, & n=2k\\ -2, & n=2k-1\end{cases}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$. и, следовательно, коэффициенты a_n имеют ненулевые значения только при нечетных n, т.е. при $n=2k-1$. Таким образом,

$$a_{2k-1}=\frac{2}{(2k-1)^2\pi^2}\cdot(-2)=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2},$$

$$a_{2k}=0.$$

Подставляем найденные коэффициенты в формулу (а):

$$f(x)=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{1}x=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x.$$

Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$, $x\in(-1;\ 1)$.

Литература

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 604 с.

2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебное пособие для втузов: в 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов.– Изд. стер. – М.: Интеграл-Пресс, 2001.– 544 с.

3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч.2. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова.– М.: ОНИКС 21 век, Мир и образование, 2003. – 304 с.

4. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2007. – 479 с.

5. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2001. – 304 с.

6. Котов, А.А. Числовые ряды. Функциональные степенные ряды / А.А. Котов. – Мурманск: МГТУ, 2003. – 92 с.