Бланк выполнения задания 1

Задача 1.

Задание:

Частица движется равноускоренно в координатной плоскости XY с начальной скоростью $\vec{v}_0 = A\vec{i} + B\vec{J}$ и ускорением $\vec{a} = C\vec{i} + D\vec{J}$. Найти модули векторов скорости v, тангенциального a_τ и нормального a_n ускорений, а также радиус кривизны траектории R в момент времени t.

Вводные данные:

Вариант	*A,* м/с	*B,* м/с	*C,* м/с^2	*D,* м/с^2	*t,* с
1	5	2	5	3	1

Решение:

Координаты вектора начальной скорости

$$A = v_{0x} = 5\,м/с,\ B = v_{0y} = 2\,м/с,\ тогда\ \vec{v}_0 = 5\vec{i} + 2\vec{J}.$$

Координаты вектора ускорения

$$C = a_x = 5\,м/с^2,\ D = a_y = 3\,м/с^2,\ тогда\ \vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{J}.$$

Уравнения траектории частиц

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2} \end{cases}$$

За начало координат примем точку начала движения. Тогда после подстановки координат начальной скорости и ускорения получаем

$$\begin{cases} x(t) = 5t + 2,5t^2 \\ y(t) = 2t + 1,5t^2 \end{cases}$$

Скорость частицы в момент времени t

$$\begin{cases} v_x(t) = x'(t) = 5 + 5t \\ v_y(t) = y'(t) = 2 + 3t \end{cases},\ при\ t = 1 \begin{cases} v_x = 10\,м/с \\ v_y = 5\,м/с \end{cases}.$$

Тогда модуль вектора скорости

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11,2\,м/с.$$

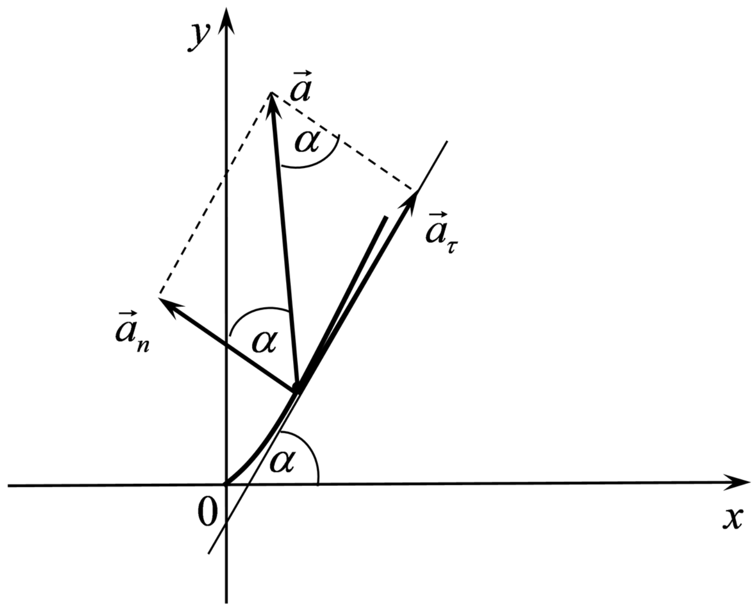


Рис. 1. График траектории частицы.

Полное ускрение

$$\vec{a}=\frac{d\,v_x}{dt}\vec{i}+\frac{d\,v_y}{dt}\vec{j}\,,\,где\,a_x=\frac{d\,v_x}{dt}=5\,м/с^2\,и\,a_y=\frac{d\,v_y}{dt}=3\,м/с^2.$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{5^2+3^2}=5,8\,м/с^2.$$

Тангенс угла, который образует касательная к траетории в момент времени $t=1\,с$

$$tg\,\alpha=\frac{dy_t}{dx_t}=\frac{2+3}{5+5}=0,5.$$

Тогда

$$\alpha=arctg\,0,5=27^\circ.$$

Следовательно

$$a_\tau=a\sin\alpha=5,8\sin 27^\circ=2,6\,м/с^2,$$

$$a_n=a\cos\alpha=5,8\cos 27^\circ=5,2\,м/с^2.$$

Формула нормального ускорения

$$a_n=\frac{v^2}{R},\,тогда\,R=\frac{v^2}{a_n}=\frac{5,8^2}{5,2}=6,5\,м.$$

Ответ: $|\vec{v}|=11,2\,м/с\,,\,a_\tau=2,6\,м/с^2\,,\,a_n=5,2\,м/с^2\,,\,R=6,5\,м.$

Задача 2.

Задание:

На однородный цилиндрический блок массой m_2 и радиусом R намотана невесомая нить, к свободному концу которой прикреплен груз массой m_1. К блоку крестообразно прикреплены четыре одинаковых невесомых стержня, на которых закреплены одинаковые грузы массой m_3 на расстоянии x от оси вращения. Грузы m_3 можно считать материальными точками. Трением в блоке можно пренебречь. Найти зависимость ускорения a груза m_1 от расстояния x . Построить график этой зависимости в интервале изменения x от R до $3R$. Ускорение свободного падения g = *9.81* м/с^2.

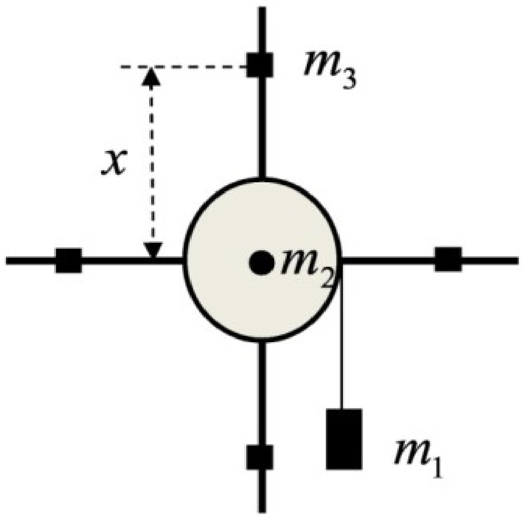


Рис. 2. Расчетная система.

Вводные данные:

Вариант	*m₁, кг*	*m₂, кг*	*m₃, кг*	*R, м*
1	3	2	1	0,2

Решение:

По закону сохранения энергии потенциальная энергия груза m_1 преобразуется в поступательную кинетическую энергию груза m_1 и вращательную кинетическую энергию блока m_2 и грузов m_3

$$W_{p1} = W_{k1} + W_{k2} + W_{k3}.$$

$$W_{p1} = m_1 g h\text{, где } h = \frac{v^2}{2a} - \text{расстояние, которое пройдет груз } m_1.$$

$$W_{k1}=\frac{m_1 v^2}{2}.$$

$$W_{k2}=\frac{I_2\omega^2}{2},\ где\ I_2=\frac{1}{2}m_2 R^2 - момент\ инерции\ блока\ и\ \omega=\frac{v}{R} - угловая\ скорость\ блока.$$

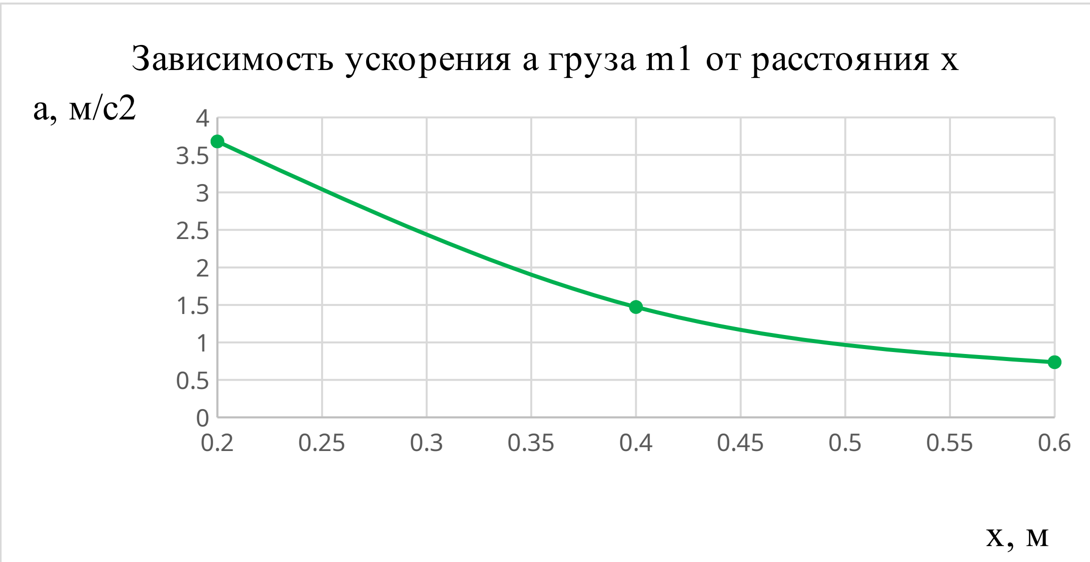
$$W_{k3}=4\frac{I_3\omega^2}{2},\ где\ I_3=m_3 x^2 - момент\ инерции\ груза\ m_3\ относительно\ оси\ вращения.$$

Тогда

$$m_1 g\frac{v^2}{2a}=\frac{m_1 v^2}{2}+\frac{\frac{1}{2}m_2 R^2\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2}+4\frac{m_3 x^2\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2}=\text{¿}>\frac{m_1 g}{a}=m_1+\frac{1}{2}m_2+4\frac{m_3 x^2}{R^2}=\text{¿}$$

$$\text{¿}>\frac{3\cdot 9,81}{a}=3+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{4\cdot 1\cdot x^2}{0,2^2}=\text{¿}\frac{29,43}{a}=\frac{0,04+x^2}{0,01}=\text{¿¿}>a=\frac{0,2943}{0,04+x^2}.$$

Построим график зависимости $a(x)$ для $R\le x\le 3R$



Ответ: $a=\frac{0,2943}{0,04+x^2}.$

Задача 3.

Задание:

Шар массой m_1, летящий со скоростью v_1, сталкивается с неподвижным шаром массой m_2. После удара шары разлетаются под углом α друг к другу. Удар абсолютно упругий, столкновение происходит в горизонтальной плоскости. Найти скорости шаров u_1 и u_2 после удара.

Вводные данные:

Вариант	m_1, г	m_2, г	v_1, м/с	α, °
1	100	150	10	120

Решение:

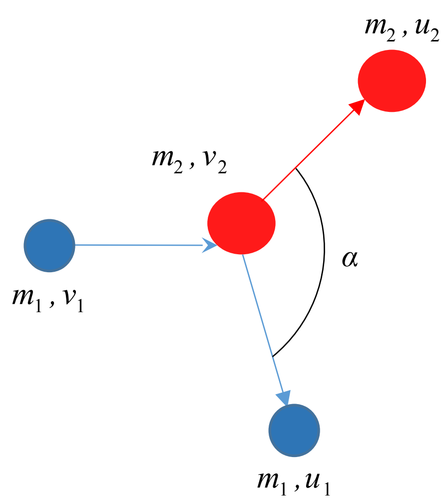


Рис. 3. Упругое соударение шаров.

По закону сохранения кинетической энергии

$$E_{k1}+E_{k2}=E'_{k1}+E'_{k2}, \text{где}:$$

$$\text{кинетическая энергия первого шара до столкновения } E_{k1}=\frac{m_1 v_1^2}{2},$$

$$\text{кинетическая энергия второго шара до столкновения } E_{k2}=0,$$

$$\text{кинетическая энергия первого шара после столкновения } E'_{k1}=\frac{m_1 u_1^2}{2},$$

$$\text{кинетическая энергия второго шара после столкновения } E'_{k2}=\frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

$$\text{Тогда } \frac{m_1 v_1^2}{2}=\frac{m_1 u_1^2}{2}+\frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

По закону сохранения импульса

$$\vec{p_1}+\vec{p_2}=\vec{p'_1}+\vec{p'_2}, \text{где}: \text{импульс первого шара до столкновения } p_1=m_1 v_1,$$

$$\text{импульс второго шара до столкновения } p_2=0,$$

$$\text{импульс первого шара после столкновения } p'_1=m_1 u_1,$$

$$\text{импульс второго шара после столкновения } p'_2=m_2 u_2.$$

Тогда результирующий вектор импульса после столкновения шаров по теореме косинусов

$$p_1^2=(p\text{¿¿}1')^2+(p\text{¿¿}2')^2-2p_1'p_2'\cos(\pi-\alpha)=\text{¿¿¿}$$

$$\text{¿}>(m\text{¿¿}1v_1)^2=(m\text{¿¿}1u_1)^2+(m\text{¿¿}2u_2)^2+2m_1u_1m_2u_2\cos\alpha.\text{¿¿¿}$$

Решим полученную систему уравнений

$$\text{¿¿}>\text{¿¿}>m_1^2u_1^2+m_1m_2u_2^2=(m\text{¿¿}1u_1)^2+(m\text{¿¿}2u_2)^2-m_1u_1m_2u_2\text{¿¿}$$

$$\text{вычтем из обеих частей } m_1^2u_1^2 \text{ и разделим на } u_2=\text{¿}m_1m_2u_2=m_2^2u_2-m_1u_1m_2=\text{¿}u_2=\frac{m_1m_2}{m_2^2-m_1m_2}u_1$$

$$\text{заменим } k=\frac{m_1m_2}{m_2^2-m_1m_2} \text{ и подставим в уравнение сохранения энергии}=\text{¿}$$

$$m_1v_1^2=m_1u_1^2+m_2k^2u_1^2=\text{¿}u_1=\sqrt{\frac{m_1v_1^2}{m_1+m_2k^2}}=\text{¿}\begin{cases} u_1=\sqrt{\dfrac{m_1v_1^2}{m_1+m_2k^2}} \\ u_2=\dfrac{m_1m_2}{m_2^2-m_1m_2}\sqrt{\dfrac{m_1v_1^2}{m_1+m_2k^2}} \end{cases}=\text{¿}\begin{cases} u_1=5\,м/с \\ u_2=10\,м/с \end{cases}.$$

Ответ: $u_1=5\,м/с,\ u_2=10\,м/с.$