Автономная некоммерческая организация высшего образования
«МОСКОВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра экономики и управления

Форма обучения: заочная/очно-заочная

ВЫПОЛНЕНИЕ

ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

____

____

Группа ______

Студент И.О. Фамилия

МОСКВА 20___

Задача 1. Выполнить деление комплексных чисел.

1.1. $\frac{1+2i}{3+4i}=\frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{3-4i+6i+8}{9+16}=\frac{11+2i}{25}.$

1.2. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)}=\frac{3+2\sqrt{6}i}{3+2}=\frac{1+2\sqrt{6}i}{5}$.

Задача 2. Вычислить пределы последовательностей.

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{5}{n}}=\frac{2}{3}.$

2.2.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{n+2}\text{¿})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{3n+1}-\sqrt{n+2})(\sqrt{3n+1}+\sqrt{n+2})}{(\sqrt{3n+1}+\sqrt{n+2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1-n-2}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{n+2}}$$

Задача 3. Используя признаки Даламбера и Коши исследовать сходимость рядов.

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$, по признаку сходимости Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot 3^n}{n^3\cdot 3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\cdot 3^{-1}=\frac{1}{3}<1$, следовательно, исходный ряд сходится.

3.2. $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, по радикальному признаку Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\text{¿¿¿¿}}$, следовательно, исходный ряд сходится.

Задача 4. Найти производные сложных функций.

4.1. $y=\sin(lnx)$

$y'=(\sin U)'=\cos U\cdot U'=\cos(lnx)\cdot\frac{1}{x}.$

4.2. $y=\ln\sqrt[6]{x}$

$y'=(lnU)'=\frac{1}{U}\cdot U'=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\cdot\frac{1}{6}\cdot x^{\frac{-5}{6}}=\frac{1}{6x}.$

Задача 5. Вычислить неопределенный интеграл.

5.1. $\int x^3 \cdot \sin 2x \cdot dx$

Процесс интегрирования можно упростить, если сделать замену переменных:

$$t = 2 \cdot x$$

Тогда исходный интеграл можно записать так:

$$\int \frac{t^3 \cdot \sin(t)}{16} \cdot dt$$

$$\int \frac{x^3 \cdot \sin(x)}{16} \cdot dx$$

Формула интегрирования по частям:

$$\int U(x) \cdot dV(x) = U(x) \cdot V(x) - \int V(x) \cdot dU(x)$$

Исходный интеграл представим как:

$$\frac{1}{16} \cdot \int x^3 \cdot \sin(x) \cdot dx$$

Найдем:

$$\int x^3 \cdot \sin(x) \cdot dx$$

а затем результат домножим на 1/16

Положим:

$$U = x^3$$
$$dV = \sin(x) \cdot dx$$

Тогда:

$$dU = 3 \cdot x^2 \cdot dx$$
$$V = -\cos(x)$$

Поэтому:

$$\int x^3 \cdot \sin(x) \cdot dx = -x^3 \cdot \cos(x) - \int (-3 \cdot x^2 \cdot \cos(x)) \cdot dx = -x^3 \cdot \cos(x) + \int 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x) \cdot dx$$

Находим интеграл:

$$\int 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x) \cdot dx$$

$$\begin{pmatrix} U = 3 \cdot x^2 & dU = 6 \cdot x \cdot dx \\ dV = \cos(x) \cdot dx & V = \sin(x) \end{pmatrix}$$

$$\int 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x) \cdot dx = 3 \cdot x^2 \cdot \sin(x) - \int 6 \cdot x \cdot \sin(x) \cdot dx$$

Находим интеграл:

$$\int 6 \cdot x \cdot \sin(x) \cdot dx$$

$$\begin{pmatrix} U = 6 \cdot x & dU = 6 \cdot dx \\ dV = \sin(x) \cdot dx & V = -\cos(x) \end{pmatrix}$$

$$\int 6 \cdot x \cdot \sin(x) \cdot dx = -6 \cdot x \cdot \cos(x) - \int (-6 \cdot \cos(x)) \cdot dx = -6 \cdot x \cdot \cos(x) + \int 6 \cdot \cos(x) \cdot dx$$

Находим интеграл:

$$\int 6 \cdot \cos(x) \cdot dx$$

$$\int 6\cdot\cos(x)\cdot dx = 6\cdot\sin(x)$$

В итоге получаем:

$$\int x^3\cdot\sin(x) = -x^3\cdot\cos(x) + 3\cdot x^2\cdot\sin(x) + 6\cdot x\cdot\cos(x) - 6\cdot\sin(x) + C$$

С учетом коэффициента 1/16, получаем

$$\frac{-x^3\cdot\cos(x)}{16} + \frac{3\cdot x^2\cdot\sin(x)}{16} + \frac{3\cdot x\cdot\cos(x)}{8} - \frac{3\cdot\sin(x)}{8}$$

Чтобы записать окончательный ответ, осталось вместо t подставить 2·x.

$$\frac{-x^3\cdot\cos(2\cdot x)}{2} + \frac{3\cdot x^2\cdot\sin(2\cdot x)}{4} + \frac{3\cdot x\cdot\cos(2\cdot x)}{4} - \frac{3\cdot\sin(2\cdot x)}{8} + C.$$

5.2. $\int x^2\cdot 2^x\cdot dx$

Формула интегрирования по частям:

$$\int U(x)\cdot dV(x) = U(x)\cdot V(x) - \int V(x)\cdot dU(x)$$

Положим:

$$U = x^2$$
$$dV = 2^x\cdot dx$$

Тогда:

$$dU = 2\cdot x\cdot dx$$
$$V = \frac{2^x}{\ln(2)}$$

Поэтому:

$$\int x^2\cdot 2^x\cdot dx = \frac{2^x\cdot x^2}{\ln(2)} - \int \frac{2\,x+1\cdot x}{\ln(2)}\cdot dx$$

Находим интеграл:

$$\int \frac{2\,x+1\cdot x}{\ln(2)}\cdot dx$$

$$\begin{pmatrix} U = x & dU = \cdot dx \\ dV = \dfrac{2^{x+1}}{\ln(2)}\cdot dx & V = \dfrac{2^{x+1}}{\ln(2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\int \frac{2\,x+1\cdot x}{\ln(2)}\cdot dx = \frac{2\,x+1\cdot x}{\ln(2)^2} - \int \frac{2\,x+1}{\ln(2)^2}\cdot dx$$

Находим интеграл:

$$\int \frac{2\,x+1}{\ln(2)^2}\cdot dx \int \frac{2\,x+1}{\ln(2)^2}\cdot dx = \frac{2\,x+1}{\ln\ (2)^3}$$

В итоге получаем:

$$\int x^2\cdot 2^x\cdot dx = \frac{2^x\cdot x^2}{\ln(2)} - \frac{2\,x+1\cdot x}{\ln(2)^2} + \frac{2\,x+1}{\ln(2)^3} + C.$$

Задание 6. Найти частные производные первого и второго порядка.

6.1. $z=\frac{1}{x^3y^4\cos x}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\sin x}{x^3y^4cosx^2}-\frac{3}{x^4y^4cosx}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-4}{x^3y^5cosx}$

$\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}=-4\cdot\left(\frac{\sin x}{x^3y^5\cos x^2}+\frac{12}{x^4y^5cosx}\right).$

6.2. $z=x^y$

$\frac{\partial z}{\partial x}=x^y\cdot\frac{y}{x}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\cdot lnx$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}=x^y y\cdot\frac{lnx}{x}+\frac{x^y}{x}.$

Задание 7. Найти сумму матриц.

7.1. $A+B=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+(-1) & 2+2\\ 3+4 & 4+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ 4 & 8\end{vmatrix}.$

7.2. $A+B=\begin{vmatrix}-8 & -3\\ -2 & -6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-8+(-1) & -3+(-1)\\ -2+(-1) & -6+(-1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-9 & -4\\ -3 & -7\end{vmatrix}.$

Задание 8. Найти произведение матриц.

8.1. $C=A\cdot B=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -4 & -7\end{vmatrix}$

$$c_{11}=0\cdot 2+1\cdot 0=0$$
$$c_{12}=0\cdot 5+1\cdot 1=1$$
$$c_{21}=-2\cdot 2+3\cdot 0=-4$$
$$c_{22}=-2\cdot 5+3\cdot 1=-7$$

8.2. $C=A\cdot B=\begin{vmatrix}6 & 2\\ 3 & 8\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & -6\\ 5 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10 & -22\\ 40 & 38\end{vmatrix}$

$$c_{11}=6\cdot 0+2\cdot 5=10$$
$$c_{12}=6\cdot|-6|+2\cdot 7=-22$$
$$c_{21}=3\cdot 0+8\cdot 5=40$$
$$c_{22}=3\cdot(-6)+8\cdot 7=38$$

Задача 9. Найдите определители матриц.

9.1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - 1\cdot 2 = 7.$

9.2. $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 7 - 5\cdot 6 = -9.$

Задача 10. Решить систему уравнений.

10.1. $\begin{cases} 7x+2y=15 \\ x-2y=7 \end{cases}$; $\left|\textit{выразим из второго уравнения } x\right.$; $\begin{cases} 7x+2y=15 \\ x=7+2y \end{cases}$;
$\left|\textit{подставим в первое уравнение}\right.$; $\begin{cases} 7(7+2y)+2y=15 \\ x=7+2y \end{cases}$; $\begin{cases} 49+14y+2y=15 \\ x=7+2y \end{cases}$; $\begin{cases} 16y=-34 \\ x=7+2y \end{cases}$;
$\begin{cases} y=-2\dfrac{1}{8} \\ x=7+2\cdot\left(-2\dfrac{1}{8}\right) \end{cases}$; $\begin{cases} y=-2\dfrac{1}{8} \\ x=2\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

10.2. $\begin{cases} 9x=11y+5 \\ 6y=12x-8 \end{cases}$; $\begin{cases} -11y=-9x+5 \\ 6y=12x-8 \end{cases}$; $\left|\begin{matrix} \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{matrix}\right.$ $\begin{cases} -44y=-36x+20 \\ 18y=36x-24 \end{cases}$; $\left|\textit{сложим уравнения}\right.$;
$\begin{cases} -26y=-4 \\ 18y=36x-24 \end{cases}$; $\begin{cases} y=\dfrac{2}{13} \\ 18\cdot\dfrac{2}{13}=36x-24 \end{cases}$; $\begin{cases} y=\dfrac{2}{13} \\ x=\left(\dfrac{36}{13}+24\right):36 \end{cases}$; $\begin{cases} y=\dfrac{2}{13} \\ x=\dfrac{29}{39} \end{cases}$.

Задача 11. Для заданных векторов найти смешанное произведение $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}$.

11.1. $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(1\cdot 1 - 1\cdot(-2)) - 2\cdot((-2)\cdot 1 - 1\cdot 1) + 1\cdot((-2)\cdot(-2) - 11) = 12.$

11.2. $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot$¿.