Оглавление

Введение

Одной из проблем изучения курса геометрии основной школы, является, так называемая полезависимость, которая присущая подавляющему большинству учащихся.

«Полезависимые» учащиеся характеризуются неспособностью отделить необходимую информацию от «фоновой», зависимостью от контекста. Они схватывают информацию в целом. Держат перед внутренним взором полную картинку. При этом они склонны пренебрегать менее заметными свойствами рассматриваемого объекта, рассматриваемой ситуации, выделяя особенности, лежащие на поверхности.

«Поленезависимые» легко отделяют существенную информацию от второстепенной.

«Полезависимость-поленезависимость» возрастает с изменением уровня образованности и формируется как стиль только к 17 годам. Учитывая, что, по данным психологов, полюс поленезависимости соотносится с успешностью в обучении, возникает задача развития поленезависимости на уроках математики, т.е. развития умения без затруднений отделять существенную информацию от второстепенной. Кроме того, выделение фигуры из фона является базовым действием при работе в пространстве, в том числе и геометрическом, а значит, важным для овладения геометрией, когда при решении задач приходится выделять одни элементы и не обращать внимания на другие. Это умение также требует поленезависимости.

При решении задач полезависимость ученика может являться причиной ошибок. Основной причиной является неумение отделять объект и фон (полезависимость).

Поэтому повышение эффективности усвоения математики предполагает развитие поленезависимости. При этом полезависимые компоненты познавательного стиля учащегося необходимо поддерживать, ни в коем случае не угнетать.

Одной из тем, на которой можно развить поленезависимость является тема «Вписанные и описанные четырехугольники», которая имеет достаточное количество ключевых задач, который будут помогать учащимся видеть суть и выделять только самое главное.

Объект: процесс обучения геометрии в школе.

Предмет: обучение школьников решению задач по теме вписанные и описанные четырёхугольники.

Целью курсовой работы является разработка методики изучения вписанных и описанных четырёхугольников на основе выделения и более тщательного рассмотрения ключевых задач/базовых геометрических конфигураций.

Задачами курсовой работы являются:

1. Рассмотрение общих подходов к изучению математических понятий
2. Выделение основных положений понятия «ключевая задача»
3. Анализ содержания темы «Вписанные и описанные четырехугольники»
4. Разработка методических рекомендаций по изучению темы «Вписанные и описанные четырехугольники» с применением ключевых задач.

Гипотеза: рассмотрение ключевых задач в теме «Вписанные и описанные четырехугольники» будет способствовать развитию поленезависимости учащихся.

Глава 1. Теоретические основы изучения понятий вписанный и описанный четырёхугольник на основе ключевых задач (базовых геометрических конфигураций)

1.1 Общие подходы к изучению математических понятий

Понятие – форма мышления, в которой выделены существенные свойства и отделены от несущественных. Иметь понятие о некотором объекте, явлении означает понимать сущность этого объекта, явления. Непосредственным выражением понимания являются полнота, разносторонность, существенность взаимосвязей рассматриваемого понятия с ранее усвоенными, с имеющейся системой знаний.

Организуемый учителем процесс усвоения понятия (делания понятия своим) может быть представлен в виде следующей последовательности этапов: подготовка к введению нового понятия, мотивация введения понятия, организация восприятия и понимания, применение в стандартных и нестандартных ситуациях [7].

Первый этап заключается в актуализации ранее пройденного материала, в рассмотрении отдельных элементов вновь вводимого материала.

Необходимость второго этапа диктуется тем, что учитель в процессе обучения имеет дело не с индивидуумом и его способностями, но с личностью, у которой есть свои интересы, склонности, цели. Необходимо, чтобы ученик сам захотел сделать предлагаемый учителем материал своим, принял бы цели, которые поставлены учителем. Это можно сделать с помощью организации проблемной ситуации, в результате рассмотрения которой появляется необходимость познакомиться с новым понятием, или с помощью рассказа о важности изучаемого понятия [7].

Например, учащимся 8-го класса предлагается решить текстовую задачу, в которой фигурирует вписанный четырехугольник, которую учащиеся пока решать не умеют. Перед тем как решить задачу, нужно провести актуализацию опорных знаний, а именно, повторить, что означает вписанный и описанный четырехугольник, повторить основные свойства вписанных и описанных четырехугольников. Чтобы акцентировать внимание учеников на данной теме, нужно задать проблемную ситуацию, а которую может попасть каждый ученик. К примеру, во дворе, который имеет форму прямоугольника, нужно разместить бассейн, таким образом, чтобы он мог спокойно поместиться. Ученикам такая ситуация будет более знакомой, что позволит сосредоточится на условии.

Начальной ступенью понимания является предвосхищение понимания: еще не осознано то, что воспринимается, но ощущение возможности осознания есть. Вторая ступень - смутное понимание, когда отдельные элементы структуры понятия уже схвачены. На этом этапе еще невозможно дать себе отчет, что понято, что не понято. Дальнейшее понимание характеризуется углублением процесса, преодолением скованности в формулировках, возможностью передачи знания другому лицу, возможностью использования понятия в стандартных, а потом и в нестандартных ситуациях [8]. Индивидуальное сознание проходит путь от выявления отдельных существенных характеристик к выяснению структуры понятия. Эти ступени понимания, усвоения проходит любое знание: и теоремы, и правила, а не только понятия.

Организация усвоения понятий может быть реализована в рамках различных методов обучения: объяснительно-иллюстративного, когда учитель сам вводит новое понятие, и в рамках частично-поискового, когда учащиеся привлекаются к поиску нового определения. Эти методы получили названия соответственно абстрактно-дедуктивного и конкретно-индуктивного [8].

Схема применения конкретно-индуктивного метода:

- анализируется эмпирический материал (при этом, кроме индукции, привлекаются и другие логические методы: анализ, сравнение, абстрагирование, обобщение);

- выясняются общие признаки понятия, которые его характеризуют;

- формулируется определение;

- определение закрепляется путем привлечения примеров и контрпримеров;

- дальнейшее усвоение понятия и его определения происходит в процессе их применения [10].

Схема применения абстрактно-дедуктивного метода:

- формулируется определение понятия;

- приводятся примеры и контрпримеры;

- дальнейшее усвоение понятия и его определения происходит в процессе их применения.

Абстрактно-дедуктивный метод применяется обычно в тех случаях, когда введение понятия хорошо подготовлено предшествующим обучением. Например, после введения понятия параллелограмма вводится понятие прямоугольника [10].

При том и другом методах содержанием обучения является выделение существенных свойств понятия и отделение их от несущественных. Конкретно-индуктивный метод требует больше учебного времени при своем использовании на уроке, но обеспечивает большую активность учащихся и обратную связь, на основании которой учитель делает выводы об эффективности работы по изучению понятий.

Введению определения на уроке предшествует работа учителя по выделению существенных и несущественных свойств понятия, определение которого подлежит изучению, анализу логической структуры этого определения, подбору примеров и контрпримеров для закрепления и возможностей их вариации, анализу ситуаций, в которых наиболее часто встречается вводимое понятие. Анализ заканчивается выбором метода введения определения [10].

1.2 Сущность понятия «ключевая задача»

Ключевая задача темы - это задача, идея решения которой применяется при решении других задач темы.

Метод составления системы задач, построенной по принципу - каждая задача системы использует результат решения одной какой-либо (ключевой) задачи, называется методом ключевой задачи.

Существует две точки зрения на понятие ключевой задачи. Первая из них состоит в рассмотрении ключевой задачи как задачи-факта. Зачастую такая ключевая задача оказывается дополнительной теоремой школьного курса. Вторая точка зрения состоит в рассмотрении ключевой задачи как задачи-метода. При изучении какой-либо темы школьного курса можно отобрать определенный минимум задач, овладев методами решения которых, учащиеся будут в состоянии решить любую задачу на уровне программных требований по изучаемой теме.

«Ключевая» задача является средством решения других задач, поэтому ее знание учащимися обязательно. Разворачивающаяся система задач, с одной стороны, способствует усвоению факта или метода решения, изложенных в «ключевой» задаче, с другой, позволяет увидеть взаимосвязи отдельных тем школьного курса математики. Поэтому составленная данным методом система задач является эффективным средством повторения, обобщения и систематизации учебного материала.

Анализ различной методической, математической и педагогической литературы [2,3,9,12] показал, что единого определения «ключевой (опорной или базисной) задачи» нет. Также как нет и точного сравнения опорной, ключевой и базисной задачи, но рассматривая различные высказывания, мы делаем вывод, что эти слова являются синонимами.

Рассмотрим один из возможных алгоритмов подготовки урока решения ключевых задач, предложенный Н.И. Зильбербергом [14]:

1. Изучение программы и определение умений, которые должны быть сформированы у всех учеников после изучения темы.

2. Систематизация методов решения задач по изучаемой теме.

3. Отбор ключевых задач по изучаемой теме.

4. Проработка ключевых задач по изучаемой теме.

5. Выбор методов решения ключевых задач, которые будут использоваться при работе с учащимися.

6. Изучение затруднений и возможных ошибок учащихся при реализации отобранных алгоритмов, их диагностика, способы предупреждения их преодоления.

7. Обоснование последовательности разбора ключевых задач с учащимися.

8. Планирование проведения урока.

1.3 Анализ содержания темы «Вписанные и описанные четырёхугольники»

Проведем анализ теоретического, задачного материала по данной теме. Для исследования были рассмотрены учебники геометрии, рекомендованные Министерством Образования и Науки Российской Федерации к применению в образовательном процессе в общеобразовательных учреждениях. Это учебники: Атанасян Л. С. и др. «Геометрия 7-9»[4]; Шарыгин И. Ф. «Геометрия 7 - 9» [23]; Погорелов А. В. «Геометрия 7 - 9» [18] (учебники, выпущенные Министерством Образования и Науки РФ к использованию в образовательном процессе в общеобразовательных учреждениях на 2016/2017 учебный год). А также рассмотрен учебник под редакцией Смирновой И. М. «Геометрия 7 - 9»[22].

Наиболее подробно тема «Вписанные четырехугольники» изложена в учебнике Игоря Федоровича Шарыгина в параграфе 8.5 «Вписанные и описанные четырехугольники». В остальных учебниках таких параграфов нет.

Понятие вписанных и описанных четырехугольников вводится в 8 классе. Параграф начинается с определений:

Четырехугольник называется вписанным, если его вершины расположены на одной окружности.

Четырехугольник называется описанным, если все его стороны касаются одной окружности.

Далее в пункте «Вписанный четырехугольник» для рассмотрения предлагается теорема с доказательством.

Теорема 8.5 (свойства и признаки вписанного четырехугольника): Для того чтобы четырехугольник ABCD был вписанным, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий: а) ABCD – выпуклый четырехугольник и $\angle ABD = \angle ACD$; б) сумма двух противоположных углов четырехугольника равна 180°.

Приведем доказательство данной теоремы.

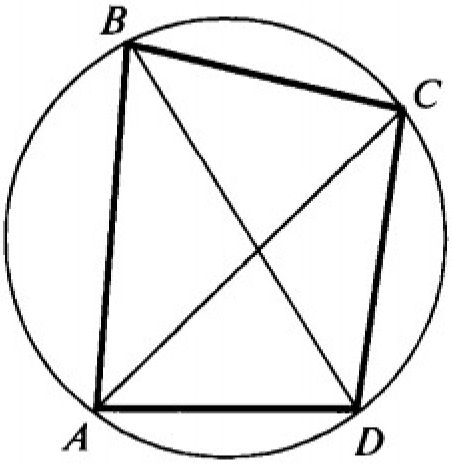


Рис. 1 Вписанный четырёхугольник ABCD

Доказательство.

а) Необходимость. Если ABCD – вписанный четырёхугольник (рис.1), то он непременно выпуклый и углы ABD и ACD равны, поскольку опираются на одну дугу.

Достаточность. Так как ABCD выпуклый четырёхугольник, то точки B и C расположены по одну сторону от прямой AD.

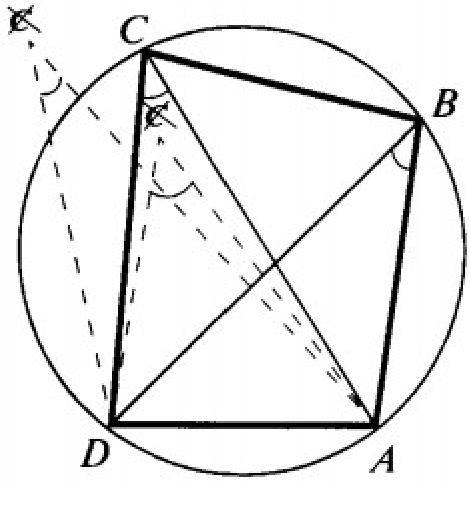


Рис.2 Описанная окружность

Опишем вокруг треугольника ABD окружность (рис.2). Точка C не может располагаться вне этой окружности, так как в этом случае угол ACD, как угол с вершиной вне круга, измерялся бы полуразностью дуги AD и ещё какой-то дуги, т.е., был бы меньше угла ABD. Точно также точка C не может находиться внутри круга, так как в этом случае угол ACD был бы больше угла ABD. Значит, точка C лежит на окружности, описанной около четырёхугольника ABCD, и этот четырёхугольник является вписанным.

б) Необходимость следует из свойств вписанных углов.

Достаточность. Из условия следует, что все углы четырёхугольна меньше 180°, т.е. он выпуклый. Далее рассуждаем так же, как и в пункте а). Рассмотрим два противоположных угла B и D. Их сумма равна 180°. Опишем около треугольника ABC окружность (рис.3).

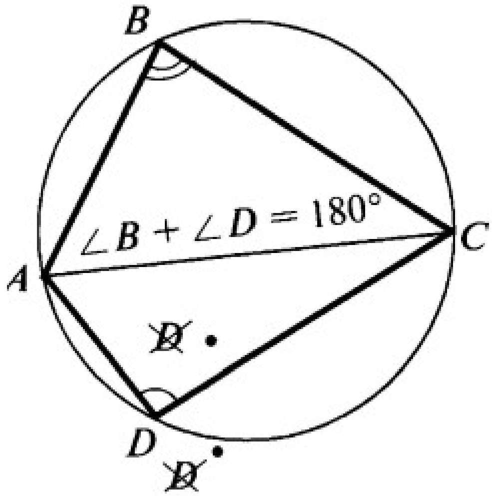


Рис.3 Описанная окружность вокруг треугольник ABC

Точка D расположена по другую сторону от прямой AC, чем B. Но для всех точек дуги AC, не содержащей B, вписанные углы дополняют до 180° угол B. Значит D, не может быть ни вне, ни внутри круга. Таким образом, точка D лежит на окружности, описанной около треугольника ABC и четырехугольник ABCD вписанный.

Сразу же после параграфа представлен материал, относящийся к практической части по данной теме: задачи, задания, вопросы. Представим некоторые задания, дополняющие теорию.

1082 (в). Четырехугольник ABCD вписан в окружность, P – точка пересечения диагоналей четырехугольника. Докажите, что $AP \cdot PC = BP \cdot PD$.

Если пересечение лежит внутри, равенство означает, что произведение отрезков, на которые точка P делит одну диагональ, равно произведению отрезков другой диагонали. Это утверждение известно как *теорема о пересекающихся хордах*, поскольку диагонали вписанного четырёхугольника являются хордами описанной окружности.

В учебнике геометрии под редакцией Л. С. Атанасяна нет отдельных разделов «Вписанные и описанные четырехугольники». О них говорится в параграфе 4 «Вписанная и описанная окружность» главы XIII.

В пункте 75 «Описанная окружность» сначала делается замечание, что в отличие от треугольника около четырехугольника не всегда можно описать окружность.

И далее приводится разъяснение: Например, нельзя описать окружность около ромба, не являющегося квадратом. Если же около четырехугольника можно описать окружность, то его углы обладают следующим свойством:

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180˚.

Также верно и обратное утверждение:

Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180˚, то около него можно описать окружность.

Практический материал в данном учебнике содержится сразу же после изучаемого параграфа, что является очень удобным. Задачи в основном на вычисление площадей, периметров, также присутствуют задачи на построение. Как и в учебнике геометрии А. В. Атанасяна в учебнике под редакцией А. Д. Александрова нет отдельного параграфа. Параграф «Вписанные и описанные окружности» делится на несколько пунктов. В пункте «Окружность, описанная около многоугольника» говорится о том, что около многоугольника можно описать окружность, если найдется точка, равноудаленная от всех его вершин. Эта точка лежит на серединном перпендикуляре каждой стороны многоугольника. Следовательно, около многоугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда серединные перпендикуляры всех его сторон имеют общую точку. Около каждого треугольника можно описать окружность. Но не около каждого даже выпуклого четырехугольника можно описать окружность. Например, для параллелограмма это можно сделать лишь тогда, когда параллелограмм является прямоугольником.

Остальные признаки и свойства предлагают вывести или доказать самостоятельно в задачах. Практический материал относится ко всему параграфу, а не разделен по пунктам. Все задачи разбиваются на ряд разделов, которые содержат задачи, дополняющие теорию, на вычисление, на доказательство, задачи на исследование и олимпиадные задачи.

В учебнике под редакцией И. М. Смирновой о вписанных и описанных четырехугольниках говорится в главе VI «Многоугольники и окружность». Однако, в параграфе 36 «Многоугольники, вписанные в окружность» свойство вписанного четырехугольника вводят в качестве примера (условие задачи с решением):

Докажите, что если около четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов равна 180˚.

Решение: Пусть ABCD – четырехугольник, около которого описана окружность. Докажем, что о $\angle B + \angle D = 180$. Действительно, эти углы измеряются половинами соответствующих дуг ADC и ABC, которые вместе составляют всю окружность. Следовательно, сами углы в сумме измеряются половиной дуги окружности, т.е. их сумма равна 180˚.

Некоторые свойства и признаки вписанных четырехугольников требуется вывести самостоятельно решая задачи, относящиеся к данному параграфу.

Например, задача 11: Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность радиусом 6 см.

Решение. Диагональ вписанного в окружность прямоугольника равна диаметру окружности (т.е. равна двум радиусам) т.е. 12 см.

13. Можно ли описать окружность около: а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) ромба; г) квадрата; д) равнобедренной трапеции; е)

прямоугольной трапеции?

а) Можно, так как суммы противоположных углов равны;

б) Нельзя, так как суммы противоположных углов не равны;

в) Нельзя, так как суммы противоположных углов не равны;

г) Около квадрата всегда можно описать, в квадрат всегда можно вписать окружность. Если сумма противоположных сторон четырехугольника равна сумме других противоположных сторон, то в него можно вписать окружность, а если суммы противоположных углов четырехугольника равны, около него можно описать окружность. Квадрат обладает и тем, и другим свойством.

д) Около равнобедренной трапеции можно описать окружность, т.к. суммы противоположных углов равны.

е) Около прямоугольной трапеции нельзя описать окружность.

18. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 20 см, средняя линия 5 см. найдите боковые стороны трапеции.

Решение. если около трапеции можно описать окружность то она равнобедренная. Пусть a, b - основания и c - боковая сторона. Тогда $2c+a+b=20$, $c+(a+b)/2=10$. $(a+b)/2$ - средняя линия, которая равна 5, следовательно, боковые стороны равны $c=10-5=5$ см.

В учебнике геометрия А. В. Погорелова такая тема как «Вписанные и описанные четырехугольники» не рассматривается, кроме вписанного квадрата, который рассматривается в параграфе 13 в качестве правильного многоугольника.

Доказательства теорем в данных учебниках приводятся в готовом виде.

Данные учебники имеют значительные различия. В учебнике под редакцией И. Ф. Шарыгина на изучение в 8 классе темы «Вписанные и описанные четырехугольники» отводится 4 часа. В учебнике Л. С. Атанасяна на изучение в 8 классе этой темы отводится всего лишь 2 часа. В учебниках А. Д. Александрова и И. М. Смирновой на изучение этой темы отводится также не более 3 часов.

Практические задания темы «Вписанные и описанные четырехугольники», предлагаемые в учебниках И. М. Смирновой, Л. С. Атанасяна и И. Ф. Шарыгина, в отличие от учебников под редакцией А. В. Погорелова и А. Д. Александрова, располагаются в конце каждого пункта после изученного материала. В учебнике под редакцией Л. С. Атанасяна в конце главы имеется список заданий, предлагаемых с целью обобщения темы. Он включает задания повышенной сложности, а также интересные задания для детей, интересующихся математикой.

Что касается оформления, то учебник под редакцией Л. С. Атанасяна отличается достаточной красочностью и количеством иллюстраций. Однако, сравнивая с учебником И. Ф. Шарыгина, чертежи в учебнике Л. С. Атанасяна меньшего масштаба, что порой доставляет неудобства.

Проанализировав способы подачи материала в учебниках, можно сделать вывод, что учебники под редакцией И. М. Смирновой и А. Д. Александрова изучают рассматриваемые темы более глубоко, так как рассматривают материал более подробно, иногда выходя за рамки школьного курса геометрии, позволяя ученикам расширить свои знания геометрии, однако многие из них написаны непонятным для школьников языком, что вызывает затруднения при их изучении. Более легкая трактовка определений и доказательств теорем представлена в учебнике под редакцией И. Ф. Шарыгина. Материал усваивается легче, в сравнении с другими учебниками, в которых объем часов, отведенных на изучение данных тем, меньше, чем в учебнике И. Ф. Шарыгина.

Глава 2. Методика изучения понятий вписанный и описанный четырёхугольник на основе выделения ключевых задач

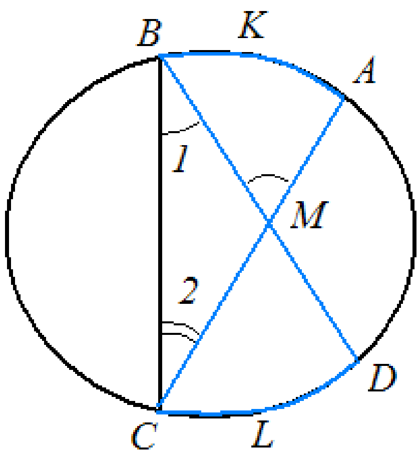
2.1 Ключевые задачи по теме вписанные и описанные четырёхугольники

С помощью ключевых задач, акцентируется внимание на наиболее важных моментах изучениях темы, помогая ученикам не распылять своё внимание на менее важную информацию.

Приведем некоторые ключевые задачи по теме вписанные четырёхугольники.

Задача 1 [15].

Доказать, что: $\angle AMB = \frac{1}{2}\left(\tilde{CLD} + \tilde{AMB}\right)$



Решение:

Проведем хорду ВС. Так как $\angle AMB$ – внешний угол треугольника ВМС, то $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. По теореме о вписанном угле $\angle 1 = \frac{1}{2}\tilde{CLD}, \angle 2 = \frac{1}{2}\tilde{AKB},$ поэтому $\angle AMB = \frac{1}{2}\left(\tilde{CLD} + \tilde{AMB}\right)$.

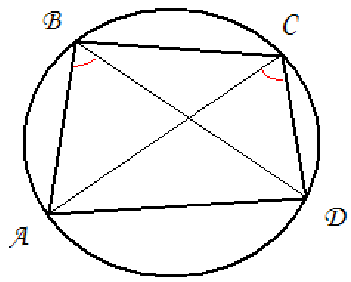
Задача 2 [15].

Доказать что четырёхугольник ABCD вписан в окружность тогда и только тогда, когда $\angle ABD = \angle ACD$

Решение:

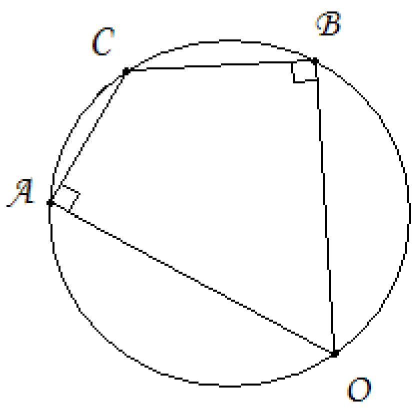
$\angle ABD = \angle ACD$ вписанные углы, опирающиеся на дугу *AD*. Около треугольника *ABC* можно описать окружность. *На* дуге *BC* возьмем любую точку *C*. Получаем вписанный угол, опирающийся на дугу *AD*, который равен вписанному углу *ABD*.

Отсюда четырехугольник *ABCD* – вписанный.



Задача 3 [15].

Через точки *A* и *B* проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла *AOB* и пересекающиеся в точке *C* внутри угла. Докажите, что около выпуклого четырёхугольника *ABCO* можно описать окружность.

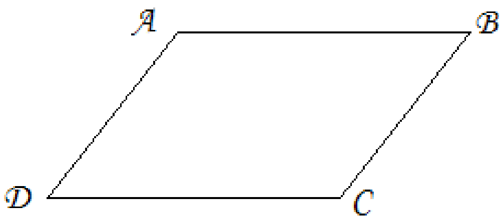


Решение: $\angle B + \angle A = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ; \angle B + \angle A + \angle C + \angle O = 360^\circ; \angle C + \angle O = 180^\circ$

По свойству вписанного четырехугольника АВСО является вписанным.

Задача 4 [15].

Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм – прямоугольник.



Решение:

Допустим обратное. Необязательно параллелограмм прямоугольник. Значит, какие то противолежащие углы в сумме дают меньше 180˚. Пусть это будут углы *B* и *D*.

$\angle D + \angle B < 180^\circ$

Так как параллелограмм вписанный:

$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}A\tilde{D}C + \frac{1}{2}A\tilde{B}C = \frac{1}{2}\left(A\tilde{D}C + A\tilde{B}C\right)$$

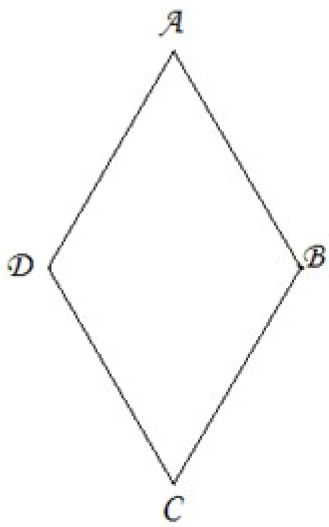
$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}360^\circ = 180^\circ$$

Противоречие. Аналогично, если вместо данных углов брать углы *A* и *C*.

Значит, параллелограмм прямоугольный. Что и требовалось доказать.

Задача 5 [15].

Докажите, что если ромб можно вписать в окружность, то этот ромб – квадрат.



Решение:

Допустим обратное. Этот ромб не является квадратом, но, тем не менее, вписан в окружность. Т. е. углы не равны 90. Значит: $\angle D + \angle B < 180^\circ$.

Так как ромб вписанный: $\angle D + \angle B = \frac{1}{2}\overset{\smile}{ADC} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{ABC} = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{ADC} + \overset{\smile}{ABC}\right)$

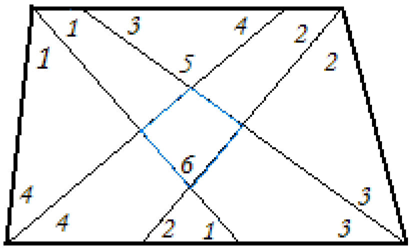
$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}360^\circ = 180^\circ$$

Противоречие. Аналогично, если вместо данных углов брать углы *A* и *C*.

Значит, стороны ромба равны 90˚. У ромба все стороны равны. Значит, ромб является квадратом.

Задача 6 [15].

Докажите, что около выпуклого четырехугольника, образованного при пересечении биссектрис углов трапеции можно описать окружность.



Решение:

Из предыдущих задач нам известно, что если противоположные углы в сумме дают 180°, то четырёхугольник можно вписать.

Докажем, что в данном четырёхугольнике углы дают в сумме 180°.

$\angle 5 = 180^\circ - \angle 3 - \angle 4$
$\angle 6 = 180^\circ - \angle 2 - \angle 1$
$\angle 5 + \angle 6 = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

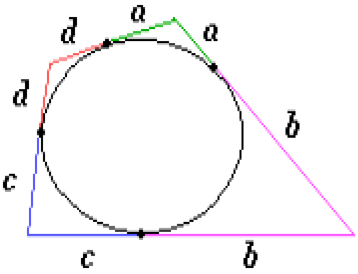
Рассмотрим ключевые задачи, связанные с описанными четырехугольниками.

Задача 7 [16].

Докажите, что у четырёхугольника, описанного около окружности, суммы противоположных сторон равны.

Решение

Отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, равны между собой. Точки касания делят каждую сторону четырёхугольника на две части. Обозначим последовательно их длины, используя одну букву для равных отрезков, начиная от какой-нибудь из вершин: a, b, b, c, c, d, d, a. Ясно, что суммы противоположных сторон состоят из одинаковых слагаемых.



Задача 8 [16].

Докажите, что во всяком описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности расположены на одной прямой.

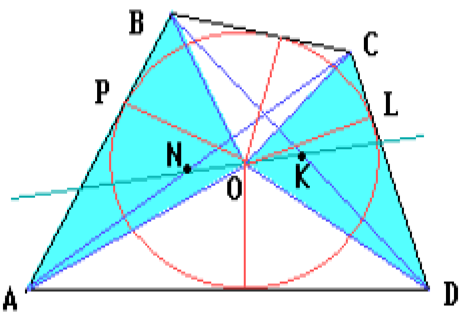
Пусть $ABCD$ – описанный четырёхугольник, O – центр вписанной окружности, r –её радиус, N и K – середины диагоналей AC и BD соответственно.

Если $ABCD$ – ромб, то все эти точки совпадают. В противном случае можно считать, что стороны AB и CD не параллельны. Заметим, что $S_{ANB} + S_{DNC} = \frac{1}{2} S_{ABC} + \frac{1}{2} S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$. Аналогично, $S_{AKB} + S_{DKC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Пусть P и L – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и CD. Тогда

$S_{AOB} + S_{COD} = \frac{1}{2} AB \cdot OP + \frac{1}{2} CD \cdot OL = \frac{1}{2} r(AB + CD) = \frac{1}{2} r(AD + BC)$. Поэтому $S_{AOB} + S_{COD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Точки N, O и K лежат на одной прямой.

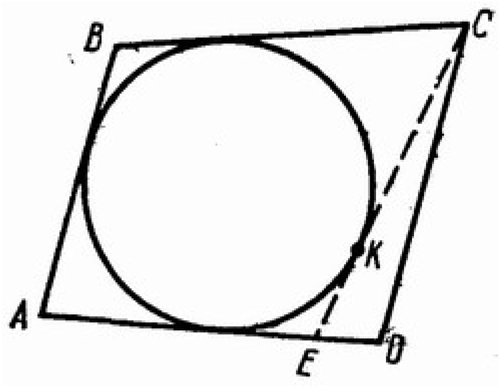


Задача 9 [16].

Доказать, что если окружность касается трёх сторон выпуклого четырёхугольника и не пересекает четвёртой, то сумма четвёртой и противоположной ей стороны меньше суммы остальных сторон четырёхугольника.

Решение:

Проведем из точки C касательную к окружности (рис.). Получили описанный четырехугольник.



Суммы противоположных сторон его равны: $BC+AE=AB+CE$. Сумма противоположных сторон четырехугольника

$BC+AD=BC+AE+ED=(BC+AE)+ED.$

Подставим значение $BC+AE$ из первого равенства:

$BC+AD=(AB+CE)+ED=AB+(CE+ED).$

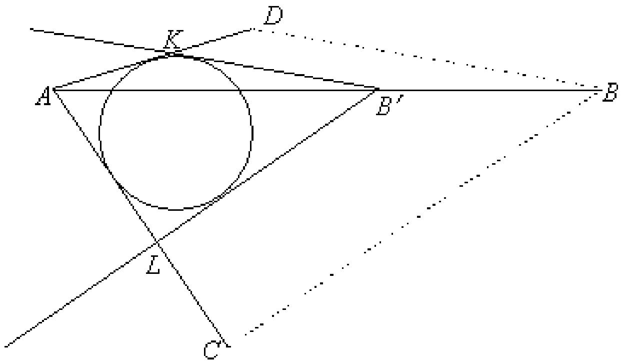
Из треугольника ECD : $CE+ED>CD$, поэтому $AB+(CE+ED)>AB+CD$. Таким образом, $BC+AD>AB+CD$.

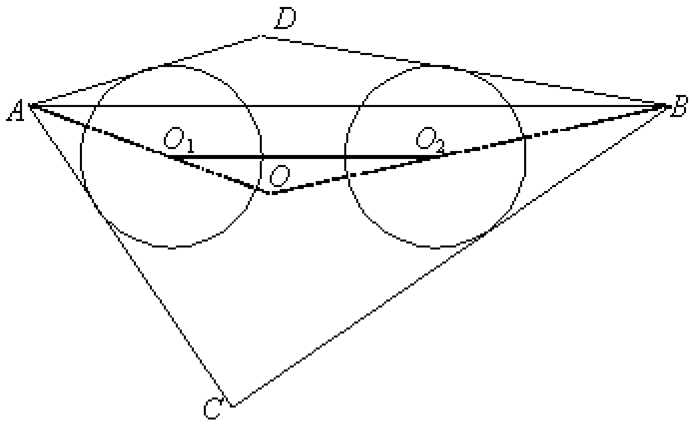
Задача 10 [16].

Отрезок AB пересекает две равные окружности и параллелен их линии центров, причём все точки пересечения прямой AB с окружностями лежат между A и B. Через точку A проводятся касательные к окружности, ближайшей к A, через точку B – касательные к окружности, ближайшей к B. Оказалось, что эти четыре касательные образуют четырёхугольник, содержащий внутри себя обе окружности. Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

Решение:

Пусть касательные образуют четырёхугольник $ACBD$. Обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей. Сдвинем правую часть картинки влево параллельно линии центров на расстояние O_1O_2. При этом окружности совпадут, а касательные, проведённые из точки B, перейдут в касательные, проведённые из точки B', лежащей на прямой AB (см. рис.). Гомотетия с центром A и коэффициентом $AD : AB'$ переводит точку B', в B, а прямую $B'K$ – в параллельную ей прямую BD. Аналогично она переводит прямую $B'L$ в BC. Поскольку прямые AD и AC переходят в себя, четырёхугольник $AKB'L$ перейдёт в исходный четырёхугольник $ADBC$. Но четырёхугольник $AKB'L$ – описанный. Значит, и четырёхугольник $ADBC$ тоже описанный.





Данные задачи можно считать ключевыми, так как для их решения используется наибольшее количество материала по теме, что позволяет ученику более глубоко усваивать пройденный материал, и применять его на практике для решения более сложных задач.

2.2 Методические рекомендации по изучению понятия вписанный четырёхугольник

Цель урока:

Дидактическая: сформулировать понятие и свойства вписанного четырехугольника; сформировать навыки применения полученных знаний по теме при решении задач.

Для работы на уроке нам нужно повторить виды четырехугольников.

Задание:

Вспомните определения всех четырёхугольников и распределите названия фигур по местам.

Помните: у одной фигуры может быть несколько названий.

1- Четырёхугольник, трапеция .

2- Четырёхугольник.

3- Четырёхугольник, прямоугольник, параллелограмм, ромб, квадрат.

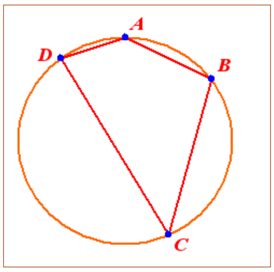
4- Четырёхугольник, параллелограмм, ромб.

5- Четырёхугольник, прямоугольник, параллелограмм.

6- Четырёхугольник, параллелограмм.

Сначала ученики по одному рассказывают определения каждого из четырехугольников, тем самым концентрируя внимание только на них. Далее учитель показывает на определенную фигуру, а ученики называют её исходя из приведенных ранее определений.

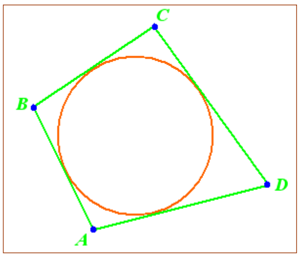
Отметим на окружности четыре точки, и соединим их хордами. Получили четырехугольник, вписанный в окружность.



\- попробуйте сформулировать определение вписанного четырехугольника. (Четырехугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется вписанным в эту окружность, а окружность – описанной.)

На другой окружности отметим 4 точки и проведем через них отрезки касательных. Получили четырехугольник, описанный около окружности.

\- попробуйте сформулировать определение описанного четырехугольника. (Четырехугольник, все стороны которого касаются окружности, называется описанным около этой окружности. А окружность – вписанной в этот четырехугольник.)



Свойства вписанного четырехугольника и его признак связаны с углами этого четырехугольника.

Теорема (свойство углов вписанного четырехугольника)

Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^0$

\- всегда ли можно вписать четырехугольник в окружность? (нет)

\- попробуйте сформулируйте теорему обратную?

Если …., то… Это будет признаком вписанного четырехугольника

Если в четырехугольнике сумма двух противоположных углов равна 180°, то около такого четырехугольника можно описать окружность.

Для доказательства теоремы нужно повторить понятие вписанного четырехугольника, а также признаки вписанного четырехугольника.

Пусть в окружность с центром О вписан четырёхугольник ABCD. Требуется доказать, что $\angle A + \angle C = 180°$ и $\angle B + \angle D = 180°$. $\angle A$, как вписанный в окружность О, измеряется $^1/_2\smile$ BCD. $\angle C$, как вписанный в ту же окружность, измеряется $^1/_2\smile$ BAD.

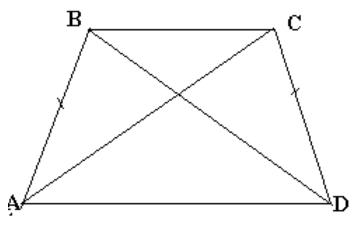
Следовательно, сумма углов А и С измеряется полусуммой дуг BCD и BAD в сумме же эти дуги составляют окружность, т. е. имеют 360°. Отсюда $\angle A + \angle C = 360° : 2 = 180°$.

Аналогично доказывается, что и $\angle B + \angle D = 180°$. Однако это можно вывести и иным путём. Так как известно, что сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника равна 360°. Сумма углов А и С равна 180°, значит, на сумму других двух углов четырёхугольника остаётся тоже 180° .

Для закрепления материала можно сделать следующие задачи:

Задача 1. Доказать, что для равнобедренной трапеции ABCD (AB=CD) справедливо равенство $AC\cdot BD = AB^2 + AD\cdot BC$ (Устно, по готовому чертежу)

Дано:



ABCD-трапеция

AB=CD

Доказать:

$AC\cdot BD = AB^2 + AD\cdot BC$

Доказательство:

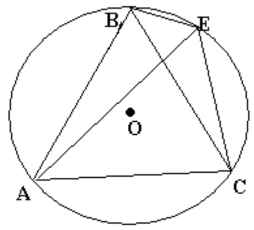
Какое свойство можно использовать при доказательстве?

Ответ. $AC\cdot BD = AB\cdot CD + AD\cdot BC$

Что следует из этого свойства?

AB=CD, значит $AC\cdot BD = AB^2 + AD\cdot BC$ Что и т.д.

Задача 2. На окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC взята точка E, отличная от вершин треугольника. Доказать, что один из отрезков AE, EB, EC равен сумме двух других.



Дано:

⊿ABC

AB=BC=CA

Точка E лежит на Окр(O;R)

Доказать:

AE=BE+EC

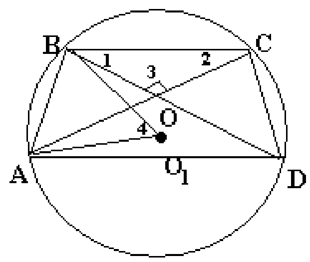
Доказательство:

Можно ли воспользоваться ранее изученным свойством?

Данное свойство применимо к задаче $AE\cdot BC = BE\cdot AC + AB\cdot EC$,

Что следует из этого свойства?

AB=BC=CA, то $AE\cdot BC = BE\cdot BC + BC\cdot EC$, откуда AE=BE+EC. Что и т.д.



Задача 3.

Дано:

ABCD – трапеция

Окр(O_1,R)- описанная

около трапеции

AC¿BD

Доказать:

$$S_{\Delta AOB}=\frac{AC^2-2R^2}{4}$$

Доказательство.

Что можно заметить из условия задачи?

$\angle 1=\angle 2=45°$, тогда $\angle 4=90°$.

Какое свойство подходит для доказательства?

$AC^2=AB^2+AD\cdot BC$;

Какие выводы следуют из этого свойства?

$AB^2=2R^2$, $AD=\sqrt{2}AO$, значит $AC^2=2R^2+2AO\cdot BO$, откуда $AC^2=2R^2+4S_{\Delta AOB}$ и $S_{\Delta AOB}=\frac{AC^2-2R^2}{4}$. Что и т.д.

2.3 Методические рекомендации по изучению понятия описанный четырёхугольник

Тема: Описанные четырехугольники

Цели на урок: ввести понятие описанного многоугольника, ознакомить учащихся со свойствами описанного четырехугольника.

II.Актуализация знаний.

Математический диктант.

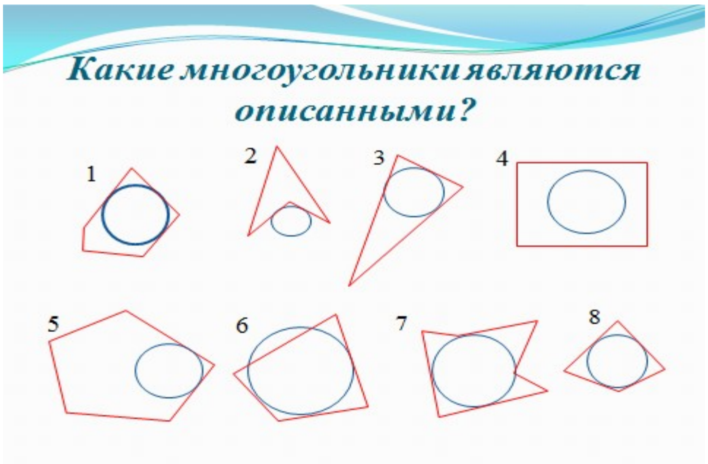
1. Можно ли описать окружность около параллелограмма? Прямоугольника? Ромба? Почему?
2. Может ли вписанный в окружность четырехугольник иметь равные стороны, но неравные углы? Почему?
3. Может ли вписанный в окружность многоугольник иметь равные углы, но неравные стороны? Почему?
4. Можно ли описать окружность около пятиугольника с углами 80^0, 90^0, 100^0, 130^0, 140^0? Почему?
5. Какой четырехугольник называется дельтоидом? Перечислите его свойства.

Для нахождения ответов на поставленные вопросы можно провести диалог между учителем и учеником.

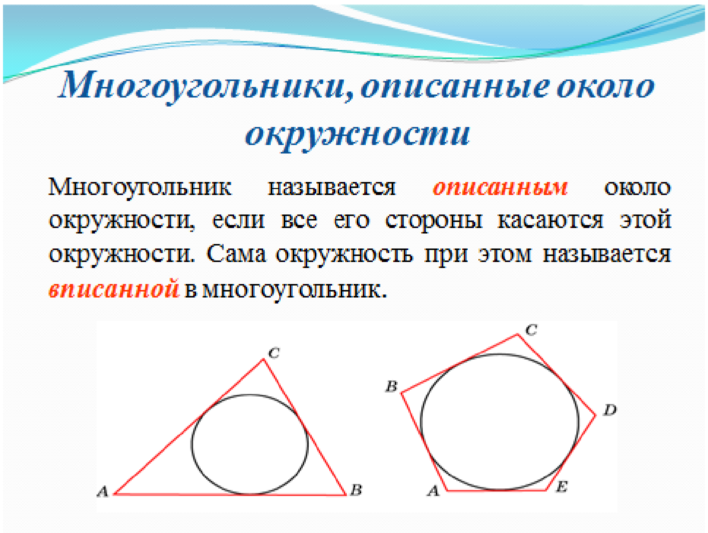
Чтобы ответить на вопросы, нужно повторить ранее изученные определения, а именно, определения вписанного и описанного четырехугольника, свойства вписанных и описанных четырехугольников.

1. ***Устная работа***

- ✓ Внимательно рассмотрите рисунки. Как вы думаете, какие многоугольники являются описанными около окружности. Почему вы так решили?
- ✓ Как можно назвать стороны этих четырехугольников по отношению к окружности?



- ✓ Попробуйте сформулировать определение описанного многоугольника

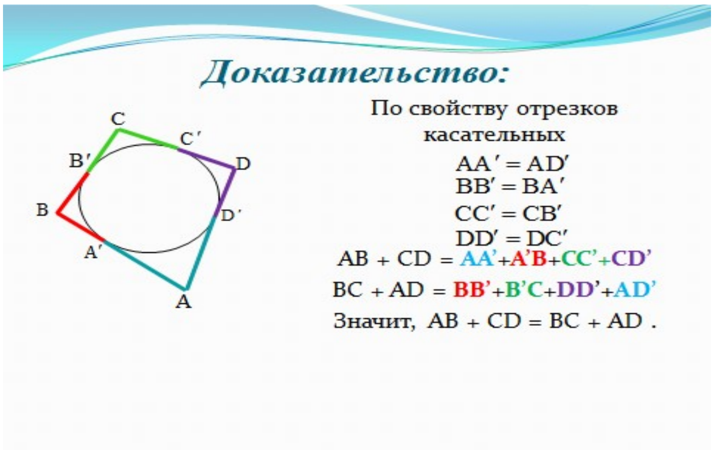


III.Учебно-познавательная деятельность.

Перейдем теперь к рассмотрению описанных многоугольников. Ситуация здесь в некотором смысле двойственная по отношению к вписанным многоугольникам. При этом стороны описанного многоугольника двойственны углам вписанного многоугольника. Так, например, если для вписанного четырехугольника необходимым и достаточным условием является равенство сумм противолежащих углов, то для описанного выпуклого четырехугольника необходимым и достаточным условием является равенство сумм противоположных сторон. А именно, имеют место следующие теоремы.

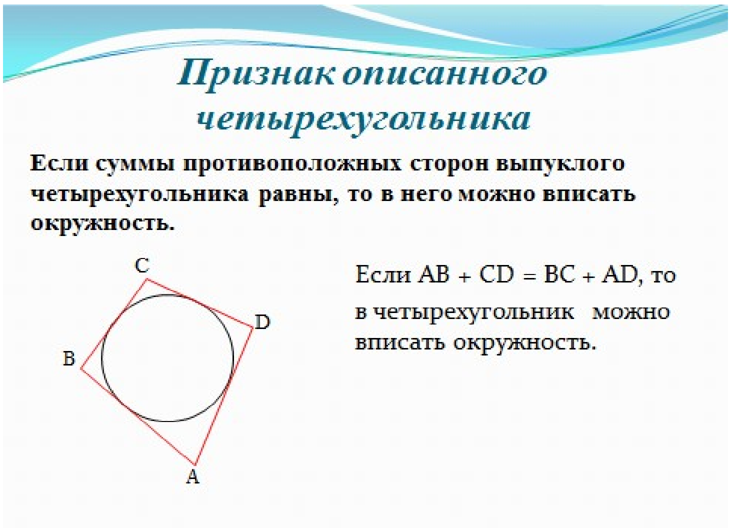
Теорема 1 (свойство сторон описанного четырехугольника)

Суммы противоположных сторон описанного около окружности четырехугольника равны.



Теорема 2 (признак четырехугольника, в который можно вписать окружность)

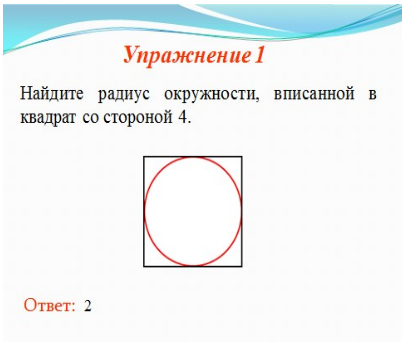
Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность. Учащимся предлагается самостоятельно разобрать доказательство по учебнику (работа с учебником в течение 5 минут, после чего учащиеся могут задавать вопросы по доказательству).

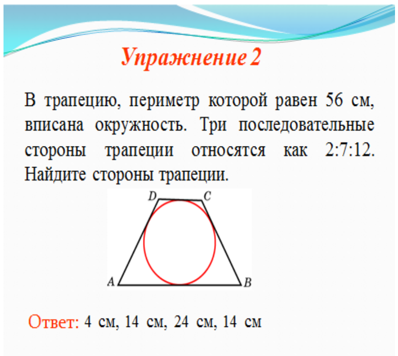


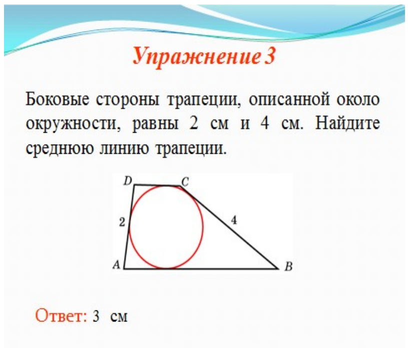
Замечание: в процессе разбора доказательства теорем группа учащихся, самостоятельно разбиравших дома теоремы и готовивших слайды к презентации выполняют индивидуальные задания. Каждому ученику выдаётся карточка с планом исследования . Выполняя задания в соответствии с этим планом, ученики все промежуточные действия и конечные выводы записывают в тетрадях. (Приложение 2)

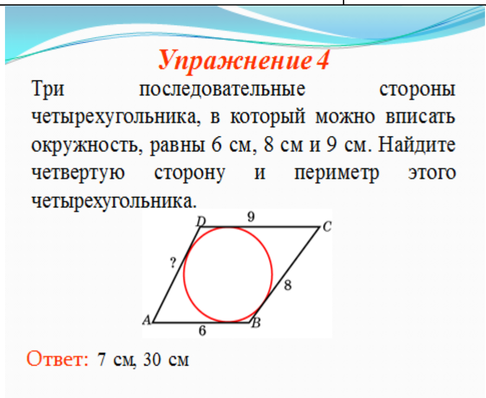
IV. Решение задач.

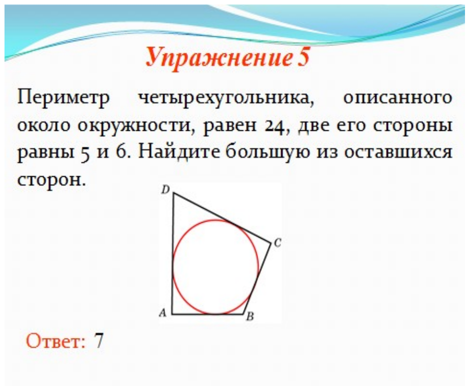
1. ***Устная работа***
    1) Можно ли вписать окружность в прямоугольник?
    2) Можно ли вписать окружность в квадрат?
    3) Можно ли вписать окружность в ромб?
    4) Можно ли вписать окружность в параллелограмм?
    5) В какие ещё четырехугольники можно вписать окружность?
    6) При каком условии можно вписать окружность в трапецию?
    7) Задачи слайдов 7 – 11.





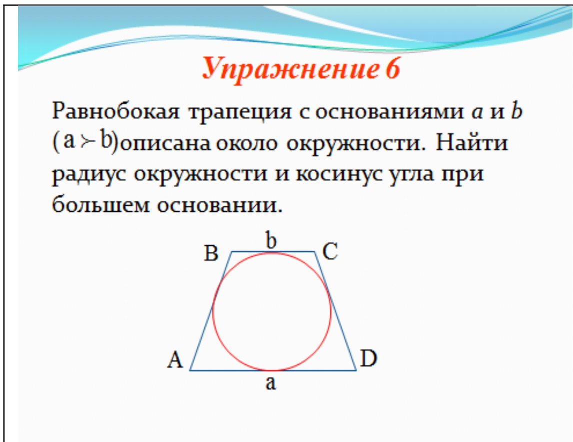


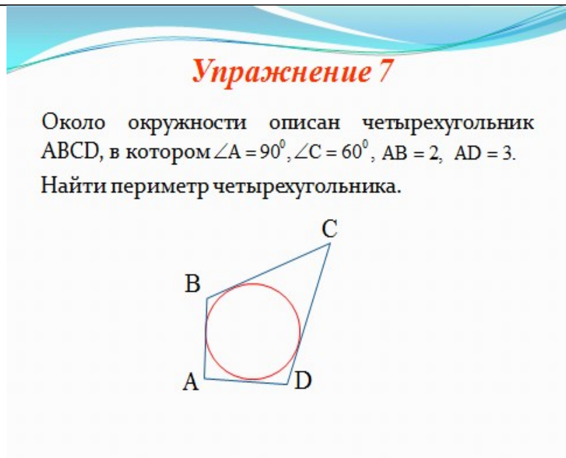




Раздается таблица «Примеры описанных четырехугольников»

2. ***Письменная работа*** (решение задач по готовым чертежам (слайды 12 – 13))





Заключение

В ходе выполнения работы по рассмотрению темы «Ключевые задачи по теме вписанные и описанные четырехугольники» были получены следующие результаты:

1) Выделены основные теоретические аспекты подходов к изучению математических понятий;
2) Проведен анализ понятия «Ключевая задача»
3) Рассмотрен анализ содержания темы «Вписанные и описанные четырехугольники»
4) Выделены базовые ключевые задачи по теме «Вписанные и описанные четырехугольники»
5) Даны фрагменты уроков по темам «Вписанные и описанные четырехугольники»

Вписанные и описанные четырехугольники являются одной из ключевых тем в основном курсе геометрии, поэтому роль ключевых задач при изучении является весь существенной. Также ключевые задачи помогают бороться с проблемой полезависимости учащихся, которая часто только мешает развиваться в изучении различного материала.

Список использованной литературы

1. Александров, А. Д. Геометрия [Текст] : учеб. пособие для 9 кл. с углубл. изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – Москва : Просвещение, 2016. – 240 с.
2. Алябьева В. Г. «Многообразие конфигураций: от геометрических до тактических. исторический очерк» [Текст]// Пермский государственный национальный исследовательский университет// г. Пермь – 2013.
3. Аргунов Б. И. и Скорняков Л. А. «Конфигурационные теоремы» [Текст] // Государственное издательство технико-теоретической литературы// г. Москва - 1957.
4. Атанасян, Л. С. Геометрия. 7-9 классы [Текст] : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 20-е изд. – Москва : Просвещение, 2016. – 384 с.
5. Э.Н.Балаян «Геометрия: задачи на готовых чертежах 7-9 классы»….
6. Бурмистрова, Т. А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст] : пособие для учителей общеобразов. организаций / [сост. Т. А. Бурмистрова]. – 2-е изд., дораб. – Москва : Просвещение, 2014. – 95 с.
7. Виленкин Н.Я., Абайдулин С.К., Таварткиладзе Р.К. Определения в школьном курсе математики и методика работы над ними //Математика в школе. – 2014. -№4
8. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом и теорем. – М, 2011.
9. Гусев, В. А. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений [Текст] / В. А. Гусев, В. В. Орлов, В. А. Панчищина и др.; под ред. В. А. Гусева. – Москва : Издат. центр «Академия», 2004. – 368 с.
10. Дорофеев Г.В. О строгости определения математических понятий школьного курса с методической точки зрения // Математика в школе. – 2009. -№ 3
11. Гусев, В. А. Развитие пространственного мышления учащихся как одна из основных задач школьного математического образования [Текст] / В. А. Гусев // Школа будущего. – 2013. – № 3. – С. 65-70.

12. Жук, Л. В. Реализация дидактического принципа наглядности в обучении геометрии средствами информационных компьютерных технологий [Текст] / Л. В. Жук // European Social Science Journal. – 2014. – № 4-1 (43). – С. 157-160.
13. Звавич, Л. И. Тесты по геометрии. 8 класс: к учебнику Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева и др. «Геометрия. 7-9 классы» [Текст] / Л. И. Звавич, Е. В. Потоскуев. – Москва : Издательство «Экзамен», 2013. – 158 с.
14. Зильберберг Н.И. Урок математики: подготовка и проведение [Текст] // Н.И.Зильберберг. -М.: Просвещение, 1996. - 176 с.
15. Каталог заданий. Задача на доказательство и вычисление [Электронный ресурс] // Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». – Режим доступа : https://ege.sdamgia.ru/test?theme=206.
16. Каталог заданий. Задача на доказательство и вычисление [Электронный ресурс] //Интернет-проект «Задачи».– Режим доступа : http://www.problems.ru/about_system.php
17. Лоповок Л.М. «Факультативные задания по геометрии для 7-11 классов. Пособие для учителя» [Текст]// г.Киев, «РАДЯНСЬКА ШКОЛА». – 1990. – С.23.
18. Мищенко, Т. М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 9 класс : к учебнику Ф .В. Погорелова «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) [Текст] / Т. М. Мищенко. – Москва : Издательство «Экзамен», 2015. – 225 с.
19. Мордковича А.Г. «Беседы с учителями математики»….
20. Погорелов, А. В. Геометрия. 7–9 классы [Текст] : учеб. для общеобразоват. организаций / А. В. Погорелов. – 2-е изд. – Москва: Просвещение, 2014. – 240 с.
21. Прасолов В.В. «Задачи по планиметрии»./ Учебное пособие, 6-е издание./ Издательство МЦНМО// г.Москва – 2007. С.11-16.
22. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию [Текст] / М-во образования и науки РФ. – Москва : Просвещение, 2015. – 560 с.

23. Саранцев, Г. И. Общая методика преподавания математики [Текст] : учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов / Г. И. Саранцев. – Саранск : Тип. «Крас. Окт.», 1999. – 208 с.
24. Смирновой И. М. «Геометрия 7 - 9» [Текст] / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – Москва : МЦНМО, 2015. – 2-е изд., доп. – 216 с.
25. Шарыгин, И. Ф. Геометрия. 7-9 кл. [Текст] : учеб. для общеобразоват. учреждений / И. Ф. Шарыгин. – Москва : Дрофа, 2012. – 462 с.
26. Шарыгин И.Ф. «Нужна ли школе 21 века геометрия?» [Текст]:серия 3,8 – Москва: Изд-во МЦНМО, 2004, с. 37-52.
27. Шарыгин, И.Ф. Рассуждения о концепции школьной геометрии [Текст] / И.Ф.Шарыгин. - М.: МЦНМО, 2000 - 56 с. 48
28. Шарыгин, И.Ф. Решение задач: Учебное пособие для 10 класса общеобразовательных учреждений [Текст] / И.Ф.Шарыгин. - М.: Просвещение, 1994.-252 с. 192-195
29. Ященко И.В., Рослова Л.О., Высоцкий И.Р., Семенов А.В. «Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2018 года по МАТЕМАТИКЕ» [Текст] // Москва – 2018.