9	6	1
А	Б	В

Задача 4

Кручение круглого бруса

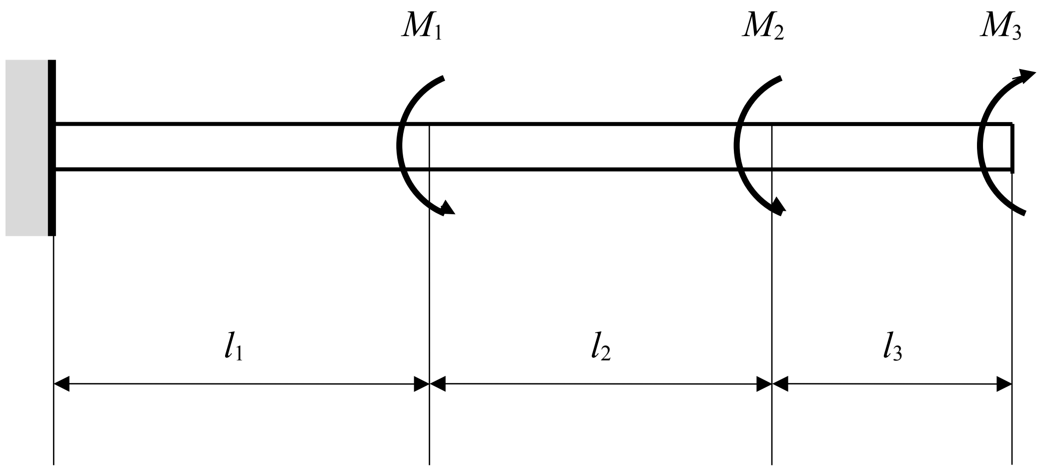
Для вала круглого сечения заданной схемы (рис.1) требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.
2. Подобрать диаметр вала из условия прочности при заданном значении допускаемого напряжения $[\tau]$ и из условия жесткости при заданном значении допускаемого относительного угла закручивания $[\Theta]$. Из полученных двух значений диаметра назначить больший.
3. Построить эпюру максимальных касательных напряжений.
4. Приняв модуль сдвига $G=0,8\cdot 10^5$ МПа, построить эпюру углов поворота сечений по длине вала.
5. Вычислить потенциальную энергию упругой деформации вала W и работу внешних сил A. При расхождении этих величин более 1 % следует уточнить расчет или найти ошибки.

Дано:

$Схема-1, l_1=1,4\,м, l_2=1,3\,м, l_3=1,0\,м, M_1=1,6\,кН*м, M_2=1,5\,кН*м, M_3=0,8\,кН*м, [\tau]=55$ М

$\frac{рад}{м}$.



Решение

Определим реакцию – момент M_A в заделке (рис. 1,*а*). Из условия равновесия вала

$$M_A - M_1 - M_2 + M_3 = 0,$$

определим реактивный момент

$$M_A = M_1 + M_2 - M_3 = 1{,}6 + 1{,}5 - 0{,}8 = 2{,}3 \text{ кНм}.$$

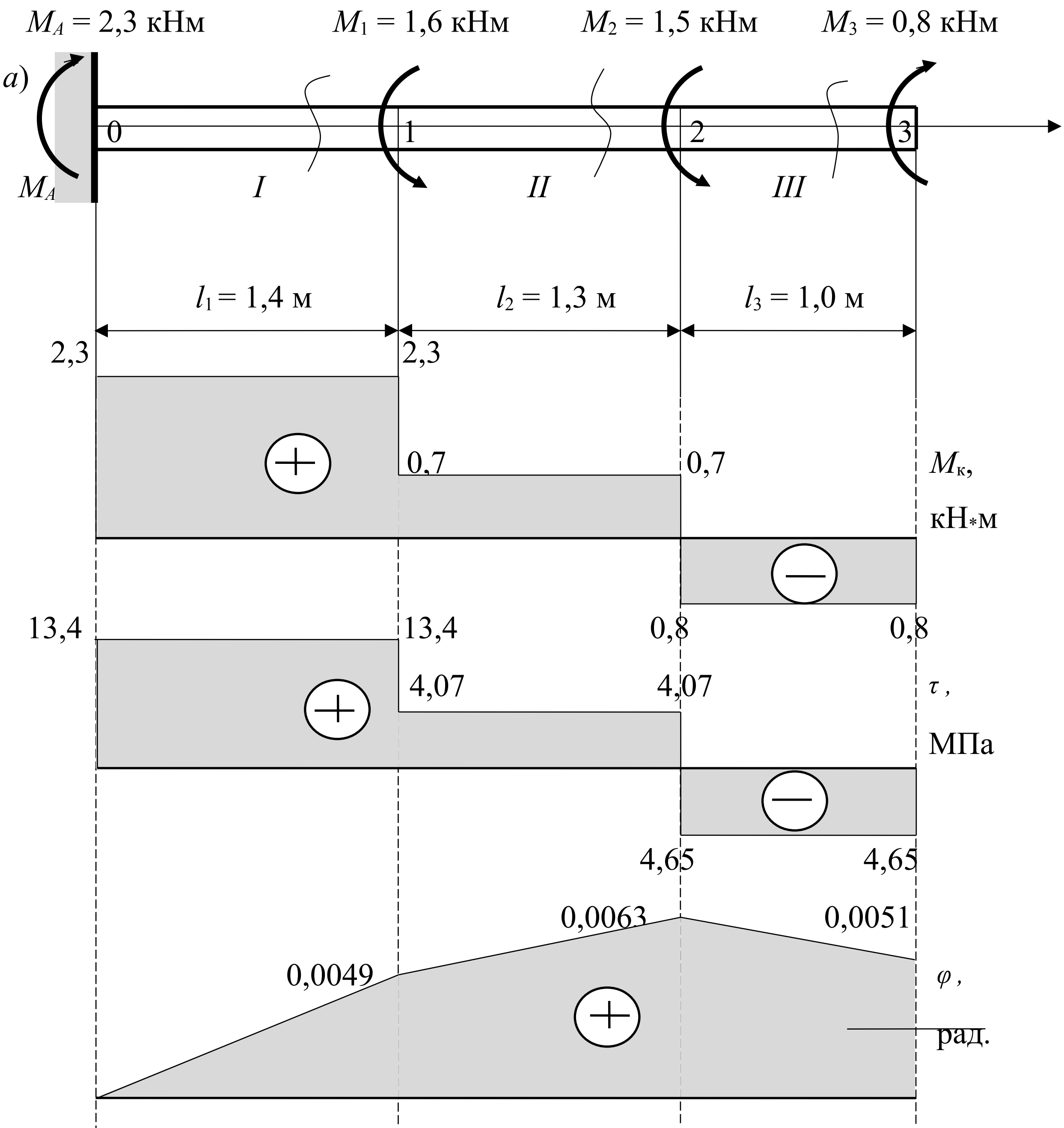


Рис. 1. Эпюры $M_к, \tau$ и φ

Слева от сечения, проведенного на первом участке, действует только один реактивный момент M_A, причем, если смотреть на вал слева, он поворачивает рассматриваемую часть против часовой стрелки. Следовательно, на участке *I*

$$M_{к1} = M_A = 2{,}3 \text{ кНм}.$$

По аналогии получаем:

– на участке *II* $\quad M_{к2} = M_A - M_1 = 2{,}3 - 1{,}6 = 0{,}7$ кНм;

– на участке *III* $\quad M_{к3} = - M_3 = - 0{,}8$ кНм.

Строим эпюру крутящих моментов (рис. 1,*б*).

Максимальный по модулю крутящий момент $M_{к\,max} = 2{,}3$ кНм.

Подбираем диаметр вала из условий прочности и жесткости.

Условие прочности при кручении

$$\tau_{max} = \frac{M_{к\,max}}{W_p} \le [\tau],$$

где W_p – полярный момент сопротивления поперечного сечения. Для вала круглого сечения $W_p = \dfrac{\pi d^3}{16}$.

С учетом этого условие прочности запишется в виде

$$\tau_{max} = \le [\tau],$$

откуда

$$d \ \ge \ \sqrt[3]{\frac{16 M_{к\,max}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 * 2,3 * 10^6}{3,14 * 55}} = 59{,}7 \text{ мм} = 5{,}97 \text{ см}.$$

Условие жесткости при кручении вала

$$\Theta_{max} = \frac{M_{к\,max}}{G I_p} \le [\Theta],$$

где I_p – полярный момент инерции поперечного сечения.

Так как для круглого сечения $I_p = \pi d^4/32$, то условие жесткости имеет вид

$$\Theta_{max} = \frac{32 M_{к\,max}}{\pi G d^4} \le [\Theta].$$

Следовательно, диаметр вала

$$d \ \ge \ = \sqrt[4]{\frac{32 * 2,3 * 10^3}{3,14 * 0,8 * 10^{11} * 3,49 * 10^{-3}}} = 0{,}0957 \text{ м} = 9{,}57 \text{ см}.$$

Так как диаметр вала должен удовлетворять обоим условиям, окончательно принимаем d = 9,57 см.

Определим максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях вала.

Вычислив предварительно полярный момент сопротивления

$$W_p = \pi d^3/16 = 3,14 \cdot 9,57^3/16 = 172,0\ см^3 = 172 \cdot 10^{-6}\ м^3,$$

находим:

– участок I

$$\tau_{max} = \frac{M_{к1}}{W_p} = \frac{-2,3 \cdot 10^3}{172,0 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6} = 13,4\ МПа;$$

– участок II

$$\tau_{max} = \frac{M_{k2}}{W_p} = \frac{-0,7 \cdot 10^3}{172,0 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6} = 4,07\ МПа;$$

– участок III

$$\tau_{max} = \frac{M_{k3}}{W_p} = \frac{--0,8 \cdot 10^3}{172,0 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6} = -4,65\ МПа.$$

Строим эпюру τ_{max} (рис. 1,*в*).

Для построения эпюры углов поворота сечений сначала необходимо вычислить углы закручивания каждого из участков вала.

Вычислив предварительно полярный момент инерции сечения

$$I_p = \pi\, d^4 / 32 = 3,14 \cdot 9,57^4 / 32 = 823,1\ см^4 = 823,1 \cdot 10^{-8}\ м^4,$$

получим:

– участок I

$$\varphi_I = \frac{M_{к1} l_1}{GI_p} = \frac{2,3 \cdot 10^3 \cdot 1,4}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 823,2 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0049\ рад;$$

–участок II

$$\varphi_{II} = \frac{M_{к2} l_2}{GI_p} = \frac{-0,7 \cdot 10^3 \cdot 1,3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 823,1 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0014\ рад;$$

– участок III

$$\varphi_{III} = \frac{M_{к3} l_3}{GI_p} = \frac{-0,8 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 823,1 \cdot 10^{-8}} = -0{,}0012\ рад.$$

Обозначим характерные сечения вала, начиная от заделки, цифрами 0, 1, 2, 3 (рис. 1*а*). Очевидно, что в заделке сечение и после приложения заданных крутящих моментов остается неподвижным, т. е. $\varphi_0 = 0$.

Углы поворота других характерных сечений находим алгебраическим суммированием углов закручивания отдельных участков:

– сечения 1 $\varphi_1 = \varphi_I =$ 0,0049 рад;

– сечения 2 $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_{II} =$ 0,0049 + 0,0014 = 0,0063 рад;

– сечения 3 $\varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_{III} =$ 0,0063 - 0,0012 = 0,0051 рад.

Эпюра углов поворота сечений по длине вала показана на рис. 1*г*.

Вычислим потенциальную энергию упругой деформации вала W и работу внешних сил A.

Потенциальная энергия упругой деформации

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{кi}^2 l_i}{2GI_p},$$

где $n = 3$ – количество участков вала.

$$W = \frac{M_{к1}^2 l_1}{2GI_p} + \frac{M_{к2}^2 l_2}{2GI_p} + \frac{M_{к3}^2 l_3}{2GI_p} = \frac{\left(M_{к1}^2 l_1 + M_{к2}^2 l_2 + M_{к3}^2 l_3\right)}{2GI_p} = ¿$$

$$¿\,\frac{\left((2,3\cdot 10^3)^2\cdot 1,4 + (0,7\cdot 10^3)^2\cdot 1,3 + (-0,8\cdot 10^3)^2\cdot 1,0\right)}{2\cdot 0,8\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 823,1\cdot 10^{-8}} = 6,59\ Дж.$$

Работа внешних сил

$$A = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} M_j \varphi_j,$$

где φ_j – угол поворота сечения, в котором приложен крутящий момент M_j;

$m = 3$ – число моментов (реактивный момент M_A работы не совершает, так как сечение в заделке неподвижно ($\varphi_0 = 0$)).

Все сечения вала после его нагружения повернулись (при наблюдении вала справа) по ходу часовой стрелки. В связи с этим работа моментов M_1 и M_2, которые действуют в противоположном направлении, будет отрицательной, а работа момента M_3, действующего в обратном направлении – положительной.

Следовательно,

$$A=\frac{1}{2}\left(-M_1\varphi_1-M_2\varphi_2+M_3\varphi_3\right)=\text{¿}\,\frac{1}{2}\left(-1,6\cdot 10^3\cdot 0{,}0049-1,5\cdot 10^3\cdot 0{,}0063+0,8\cdot 10^3\cdot 0{,}0051\right)$$

$$\text{¿}-6{,}605\ \text{Дж}.$$

Расхождение величин W и A

$$\delta=\frac{\left|-6{,}605\right|-6,59}{6,59}\cdot 100\%=0,23\%<1\%.$$

Практически одинаковые значения энергии деформации и работы внешних сил свидетельствуют о том, что задача решена верно.