Задача №3

Схема расчета надежности резервированного устройства приведена на рис. 3.1.

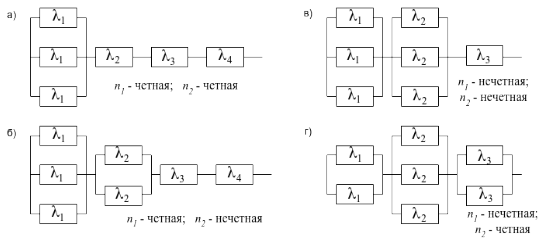

Рис. 3.1

Интенсивности отказов элементов имеют следующие значения:

$\lambda_1 = 1 \cdot 10^{-4}$ 1/час, $\lambda_2 = 1 \cdot 10^{-4}$ 1/час, $\lambda_3 = 1 \cdot 10^{-3}$ 1/час

Предполагается,

1) что последствие отказов элементов отсутствует, то есть элементы работают и отказывают независимо друг от друга,

2) для элементов надежности работы описывается экспоненциальной моделью распределения.

Необходимо найти:

1) вероятность безотказной работы устройства в течение 100 часов;

2) среднюю наработку до первого отказа.

Решение:

1) Определим вероятность безотказной работы устройства в течение 100 часов.

При последовательном соединении,

$$P_c(t) = p_I(t) \cdot p_{II}(t) \cdot p_{III}(t), \qquad (3.1)$$

где $p_I(t) = 1 - [1 - p_1(t)]^3 = 3p_1(t) - 3p_1^2(t) + p_1^3(t)$

$p_{II}(t) = 1 - [1 - p_2(t)]^3 = 3p_2(t) - 3p_2^2(t) + p_2^3(t)$

$p_{III}(t) = p_3(t)$

Подставляя значения $p_{I}(t), p_{II}(t), p_{III}(t)$ в выражение (3.1), получим

$$P_c(t) = \left[3p_1(t) - 3p_1^2(t) + p_1^3(t)\right] \cdot \left[3p_2(t) - 3p_2^2(t) + p_2^3(t)\right] \cdot p_3(t) =$$

$$= p_1^3(t)p_2^3(t)p_3(t) - 3p_1^3(t)p_2^2(t)p_3(t) - 3p_1^2(t)p_2^3(t)p_3(t) + 3p_1^3(t)p_2(t)p_3(t) +$$

$$+ 9p_1^2(t)p_2^2(t)p_3(t) + 3p_1(t)p_2^3(t)p_3(t) - 9p_1^2(t)p_2(t)p_3(t) - 9p_1(t)p_2^2(t)p_3(t) +$$

$$+ 9p_1(t)p_2(t)p_3(t)$$

Так как $p_1(t) = e^{-\lambda_1 t}$, $p_2(t) = e^{-\lambda_2 t}$, $p_3(t) = e^{-\lambda_3 t}$, то

$$P_c(t) = e^{-(3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)t} - 3e^{-(3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)t} - 3e^{-(2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)t} +$$

$$+ 3e^{-(3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} + 9e^{-(2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)t} + 3e^{-(\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)t} - 9e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} -$$

$$- 9e^{-(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)t} + 9e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} = e^{-1,60 \cdot 10^{-3} t} - 3e^{-1,50 \cdot 10^{-3} t} - 3e^{-1,50 \cdot 10^{-3} t} +$$

$$+ 3e^{-1,40 \cdot 10^{-3} t} + 9e^{-1,40 \cdot 10^{-3} t} + 3e^{-1,40 \cdot 10^{-3} t} - 9e^{-1,30 \cdot 10^{-3} t} - 9e^{-1,30 \cdot 10^{-3} t} +$$

$$+ 9e^{-1,20 \cdot 10^{-3} t}$$

При t = 100 получим

$$P_c(100) = 0,9048$$

2) Определим среднюю наработку до первого отказа.

$$T_{ср.с} = \int_0^{\infty} P_c(t)dt \qquad (3.2)$$

После интегрирования получим

$$T_{ср.с} = \frac{1}{3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3} - \frac{3}{3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3} - \frac{3}{2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{3}{3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} +$$

$$+ \frac{9}{2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{3}{\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3} - \frac{9}{2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} - \frac{9}{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{9}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

Подставляя в данное выражение для $T_{ср.с}$ значение интенсивности отказов из условия задачи, получим

$$T_{ср.с} = \frac{1}{10^{-3}(0,3 + 0,3 + 1)} - \frac{3}{10^{-3}(0,3 + 0,2 + 1)} - \frac{3}{10^{-3}(0,2 + 0,3 + 1)} +$$

$$+ \frac{3}{10^{-3}(0,3 + 0,1 + 1)} + \frac{9}{10^{-3}(0,2 + 0,2 + 1)} + \frac{3}{10^{-3}(0,1 + 0,3 + 1)} -$$

$$- \frac{9}{10^{-3}(0,2 + 0,1 + 1)} - \frac{9}{10^{-3}(0,1 + 0,2 + 1)} + \frac{9}{10^{-3}(0,1 + 0,1 + 1)} \approx 993 \text{ час.}$$

Задача №4

Составить систему уравнений Колмогорова А.Н. для графа состояний резервированной системы, изображенного на рис. 4.1. В данном случае G_0 и G_1 – работоспособные состояния системы; G_2 – неработоспособное состояние; P_i – вероятность нахождения системы в i-ом состоянии; λ – интенсивность отказа; μ – интенсивность восстановления. Найти коэффициент готовности системы $K_г(t) = P_0(t) + P_1(t)$, решив полученную систему уравнений.

$$\lambda = 1 \cdot 10^{-4}\ 1/\text{час}; \quad \mu = 1 \cdot 10^{-4}\ 1/\text{час};$$

Найти предельный коэффициент готовности, применяя теорему А.А. Маркова. Сделать проверку, используя ранее найденный коэффициент готовности $K_г(t)$. Построить график коэффициента готовности $K_г(t)$.

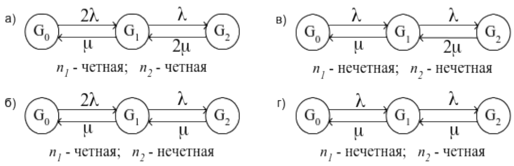

Рис. 4.1

Решение:

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова по следующему правилу:

1) Производная вероятности состояния равна сумме стольких слагаемых, сколько стрелок связано с этим состоянием.

2) Каждое слагаемое равно произведению интенсивности потока событий, переводящего систему по данной стрелке, на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.

3) Слагаемое имеет знак минус, если стрелка исходит из данного состояния, а знак плюс – если стрелка направлена в данное состояние.

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda \cdot P_0(t) - \mu \cdot P_1(t) - \lambda \cdot P_1(t) + 2\mu \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda \cdot P_1(t) - 2\mu \cdot P_2(t) \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1 \end{cases}$$

(4.1)

Из последнего уравнения следует, что

$$P_2(t) = 1 - P_0(t) + P_1(t) \qquad (4.2)$$

и

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \frac{dP_1(t)}{dt} + \frac{dP_2(t)}{dt} = 0 \leftrightarrow \frac{dP_2(t)}{dt} = -\frac{dP_0(t)}{dt} - \frac{dP_1(t)}{dt} \tag{4.3}$$

Исключаем из второго уравнения $P_2(t)$ с помощью (4.2):

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda \cdot P_0(t) - \mu \cdot P_1(t) - \lambda \cdot P_1(t) + 2\mu \cdot (1 - P_0(t) - P_1(t)) \end{cases} \tag{4.4}$$

Далее находим общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = (\lambda - 2\mu) \cdot P_0(t) - (\lambda + 3\mu) \cdot P_1(t) + 2\mu \end{cases} \tag{4.5}$$

Составим характеристическое уравнение матрицы системы

$$\begin{vmatrix} -\lambda - k & \mu \\ \lambda - 2\mu & -\lambda - 3\mu - k \end{vmatrix} = k^2 + (2\lambda + 3\mu)k + \lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2 = 0$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = \frac{-(2\lambda + 3\mu) - \sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}}{2}$$

$$k_2 = \frac{-(2\lambda + 3\mu) + \sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}}{2}$$

При $\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$ 1/ч; $\mu = 1 \cdot 10^{-4}$ 1/ч. Получим

$$k_1 = -\frac{1}{4000} - \frac{1}{20000} \cdot \sqrt{5}$$

$$k_2 = -\frac{1}{4000} + \frac{1}{20000} \cdot \sqrt{5}$$

$$k_1 = -3{,}618 \cdot 10^{-4}$$

$$k_2 = -1{,}382 \cdot 10^{-4} \tag{4.5к12}$$

Из уравнения $(-\lambda - k)s_1 + \mu s_2 = 0$ получим собственные векторы $(s_1; s_2)$, соответствующие собственным числам k_1 и k_2

$$\left(-\mu;\ \frac{3}{2}\mu + \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}\right),\ \left(-\mu;\ \frac{3}{2}\mu - \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}\right)$$

Следовательно, общее решение однородной части системы (4.5) имеет вид

$$\begin{cases} P_0(t) = -\mu \cdot C_1 e^{k_1 t} - \mu \cdot C_2 e^{k_2 t} \\ P_1(t) = \left(\frac{3}{2}\mu + \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}\right) \cdot C_1 e^{k_1 t} + \left(\frac{3}{2}\mu - \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}\right) \cdot C_2 e^{k_2 t} \end{cases}$$

Частное решение системы (4.5) найдем в виде

$$\begin{cases} P_0(t) = A \\ P_1(t) = B \end{cases}$$

После подстановки в систему (4.5) получим

$$\begin{cases} 0 = -\lambda \cdot A + \mu \cdot B \rightarrow B = \dfrac{\lambda}{\mu} A \\ 0 = (\lambda - 2\mu) \cdot A - (\lambda + 3\mu) \cdot B + 2\mu \end{cases}$$

Из второго уравнения получим

$$0 = (\lambda - 2\mu) \cdot A - (\lambda + 3\mu) \cdot \frac{\lambda}{\mu} A + 2\mu$$

$$\frac{-(\lambda - 2\mu) \cdot \mu + (\lambda + 3\mu) \cdot \lambda}{\mu} A = 2\mu$$

$$A = \frac{2\mu^2}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2}$$

Следовательно,

$$B = \frac{2\lambda\mu}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2}$$

Общее решение системы (4.5) имеет вид

$$\begin{cases} P_0(t) = -\mu \cdot C_1 e^{k_1 t} - \mu \cdot C_2 e^{k_2 t} + \dfrac{2\mu^2}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2} \\ P_1(t) = \left(\dfrac{3}{2}\mu + \dfrac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}\right) \cdot C_1 e^{k_1 t} + \left(\dfrac{3}{2}\mu - \dfrac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu \ldots}\right. \\ + \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2} \end{cases}$$

(4.6)

В начальный момент времени система находится в работоспособном состоянии G_0, поэтому

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = 0, \quad P_2(t) = 0 \qquad (4.7)$$

Из (4.6) после подстановки начальных условий (4.7) следует

$$\begin{cases} 1 = -\mu \cdot C_1 - \mu \cdot C_2 + \dfrac{2\mu^2}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2} \\ 0 = \left(\dfrac{3}{2}\mu + \dfrac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}\right) \cdot C_1 + \left(\dfrac{3}{2}\mu - \dfrac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}\right) \cdot C_2 + \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu \cdot C_1 + \mu \cdot C_2 = \dfrac{-\lambda^2 - 2\lambda\mu}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2} \\ \left(\dfrac{3}{2}\mu + \dfrac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}\right) \cdot C_1 + \left(\dfrac{3}{2}\mu - \dfrac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}\right) \cdot C_2 = \dfrac{-2\lambda\mu}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2} \end{cases}$$

Вычтем из 2-го уравнения 1-е уравнение умноженное на $-\dfrac{3}{2}$. Первое уравнение разделим на μ.

$$C_1 + C_2 = \frac{-\lambda^2 - 2\lambda\mu}{\mu(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)} \qquad (4.7а)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2} \cdot C_1 - \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2} \cdot C_2 = \frac{-2\lambda\mu}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2} - \frac{3(-\lambda^2 - 2\lambda\mu)}{2(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2} \cdot C_1 - \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2} \cdot C_2 = \frac{3\lambda^2 + 2\lambda\mu}{2(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2} \cdot (C_1 - C_2) = \frac{3\lambda^2 + 2\lambda\mu}{2(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}$$

$$C_1 - C_2 = \frac{3\lambda^2 + 2\lambda\mu}{\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)} \qquad (4.7б)$$

Следовательно, после сложения (4.7а), (4.7б) и вычитания после преобразований получим

$$C_1 = \frac{3\lambda^2\mu + 2\lambda\mu^2 - (\lambda^2 + 2\lambda\mu)\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}}{2\mu\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)} \qquad (4.7в)$$

$$C_2 = \frac{-3\lambda^2\mu - 2\lambda\mu^2 - (\lambda^2 + 2\lambda\mu)\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}}{2\mu\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)} \qquad (4.7г)$$

Найдем коэффициент готовности из (4.6): $K_г(t) = P_0(t) + P_1(t) = =$

$$\frac{\mu + \sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}}{2} \cdot C_1 e^{k_1 t} + \frac{\mu - \sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}}{2} \cdot C_2 e^{k_2 t} + \frac{2\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2} \qquad (4.8)$$

После подстановки в (4.8) интенсивностей из условия задачи

$\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$ 1/ч; $\mu = 1 \cdot 10^{-4}$ 1/ч.

с учетом (4.7в), (4.7г) и ($4.5к_{12}$) получим

$$K_г(t) = \frac{4}{5} - 0{,}124 e^{-3{,}618 \cdot 10^{-4} t} + 0{,}324 e^{-1{,}382 \cdot 10^{-4} t}$$

$$\lim_{t \to \infty} K_г(t) = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Построим график коэффициента готовности (рис. 4.2).

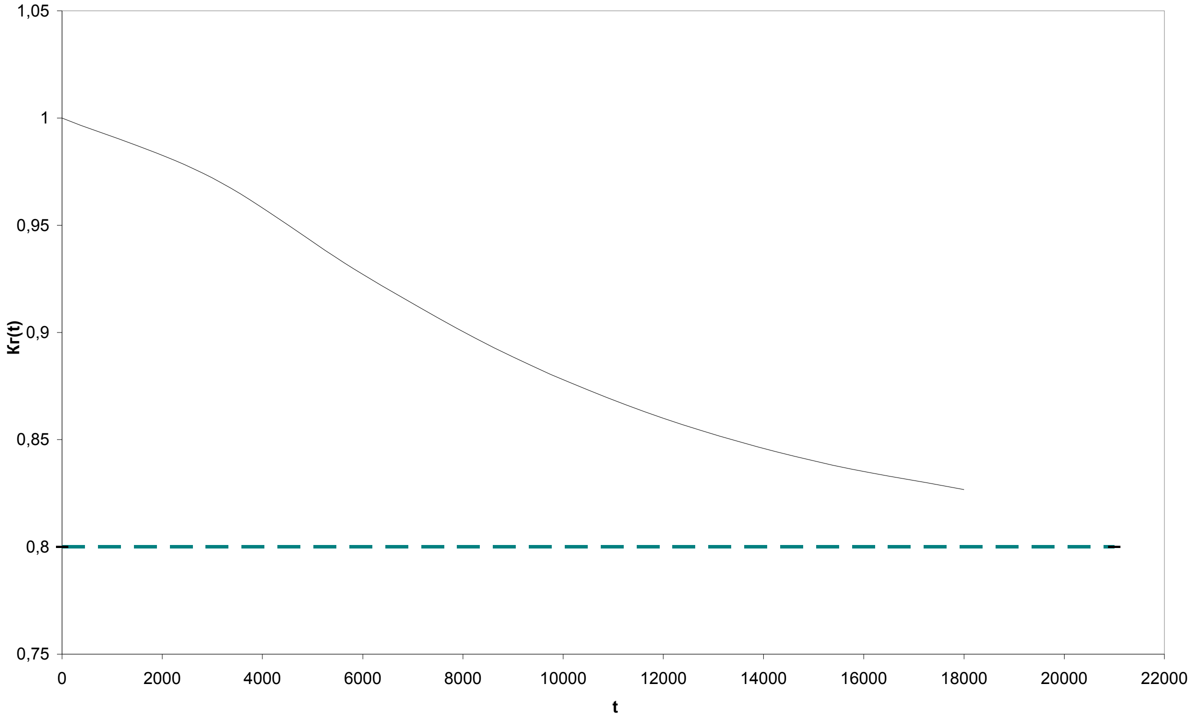

Рис. 4.2

Для частичной проверки решений системы дифференциальных уравнений (4.1) заметим, что при $t \to +\infty$ справедлива предельная теорема А.А. Маркова: если все интенсивности потоков событий постоянны, а граф состояний таков, что из каждого состояния можно перейти в каждое другое за конечное число шагов, то предельные вероятности состояний существуют и не зависят от начального состояния системы.

В соответствии с теоремой А.А. Маркова:

$$\text{при } t \to \infty \quad P_i(t) \to P_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Следовательно, производные

$$\frac{dP_i(t)}{dt} \to 0, \quad i = 0, 1, 2 \text{ при } t \to \infty,$$

и система дифференциальных уравнений (4.1) превращается в однородную систему линейных алгебраических уравнений с нормировочным уравнением:

[illegible]

(4.9)

Ее решение:

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{2\mu^2}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2} \\ P_1 = \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2} \\ P_2 = \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2} \end{cases}$$

(4.10)

Эти же результаты получаем из (4.6) при $t \to +\infty$: корни характеристического уравнения при $\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$ 1/ч; $\mu = 1 \cdot 10^{-4}$ 1/ч. отрицательны:

$$k_1 = -3{,}618 \cdot 10^{-4}$$

$$k_2 = -1{,}382 \cdot 10^{-4}$$

и поэтому все экспоненты в (4.6) при $t \to +\infty$ стремятся к 0, следовательно, пределы дают (4.10).

$$K_г = P_0 + P_1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$