Задача №2. Решить уравнение, допускающее понижения порядка

$x^2 y'' = y'$

Решение:

В данном уравнении второго порядка в явном виде не участвует переменная у. Заменим первую производную y' новой функцией *z*, которая зависит от *x:* $y' = z$.

Если $y' = z$,то $y'' = z'$. Цель проведённой замены – понизить степень уравнения.

$x^2 z' = z^2 x^2 \frac{dz}{dx} = z^2 \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}$

Проинтегрируем обе части равенства

$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dz}{z^2} = - \int \frac{dx}{x^2} \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C_1$

$z = \frac{x}{C_1 x + 1}$

Возвращаемся к переменной *y*.

$y' = \frac{x}{C_1 x + 1} dy = \frac{x}{C_1 x + 1} dx$

Интегрируем обе части равенства:

$\int dy = \int \frac{x}{C_1 x + 1} dx$

$y = \int \frac{x}{C_1 x + 1} dx = \frac{1}{C_1} \int \frac{C_1 x + 1 - 1}{C_1 x + 1} dx = \frac{1}{C_1} \int \left(1 - \frac{1}{C_1 x + 1} \right) dx = ¿¿$

$$\text{¿}\,\frac{1}{C_1}\int dx-\frac{1}{C_1}\int\frac{dx}{C_1x+1}=\frac{1}{C_1}\int dx-\frac{1}{C_1^2}\int\frac{d\left(C_1x+1\right)}{C_1x+1}=$$

$$\text{¿}\,\frac{x}{C_1}-\frac{\ln\left|C_1x+1\right|}{C_1^2}+C_2$$

Ответ: Общее решение $y=\frac{x}{C_1}-\frac{\ln\left|C_1x+1\right|}{C_1^2}+C_2$

Задача №3. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases}\text{¿}\,\frac{dx}{dt}=\frac{t}{y}\\ \text{¿}\,\frac{dy}{dt}=\frac{-t}{x}\end{cases}$$

Решение:

Из уравнения $\frac{dx}{dt}=\frac{t}{y}$ выражаем переменную $t=y\frac{dx}{dt}$. Подставляем это выражение в уравнение $\frac{dy}{dt}=\frac{-t}{x}$:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-y\frac{dx}{dt}}{x}=\frac{-y}{x}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$dy=\frac{-ydx}{x}$$

Разделяем переменные: $\frac{dy}{y}=\frac{-dx}{x}$

Интегрируем обе части: $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$

$$\ln|y|=-\ln|x|+\ln C_1$$

$$\ln|y|=\ln\frac{C_1}{|x|}$$

$$y=\frac{C_1}{x}$$

Подставляем полученное выражение в уравнение $\frac{dx}{dt}=\frac{t}{y}$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t}{\frac{C_1}{x}}=\frac{tx}{C_1}$$

Разделяем переменные и интегрируем обе части

$$\frac{dx}{dt}=\frac{tx}{C_1} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{tdt}{C_1} \Rightarrow \int \frac{dx}{x}=\frac{1}{C_1}\int tdt$$

$$\ln|x|=\frac{1}{C_1}\cdot\frac{t^2}{2}+\ln C_2$$

$$x=C_2 e^{\frac{t^2}{2C_1}}$$

Тогда $y=\frac{C_1}{x}=\frac{C_1}{C_2 e^{\frac{t^2}{2C_1}}}=\frac{C_1}{C_2}e^{\frac{-t^2}{2C_1}}$

Ответ: Общее решение системы уравнений $\begin{cases} x=C_2 e^{\frac{t^2}{2C_1}} \\ y=\frac{C_1}{C_2}e^{\frac{-t^2}{2C_1}} \end{cases}$

Задача №4. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,7. Сколько нужно провести испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений события равнялось 10?

Решение:

Наивероятнейшее число определяется двойным неравенством:

$$np-q\le k_0\le np+p$$

В нашем случае $q=1-p=1-0,7=0,3$

$$\begin{cases} 0,7n-0,3\le 10 \\ 0,7n+0,7\ge 10 \end{cases}$$

Из первого неравенства:

$$n\le\frac{10+0,3}{0,7}=14,714$$

Из второго неравенства:

$$n\ge\frac{10-0,7}{0,7}=13,286$$

$$13,284\le n\le 14,714$$

Так как n – целое число, получаем n = 14.

Ответ: 14 испытаний.