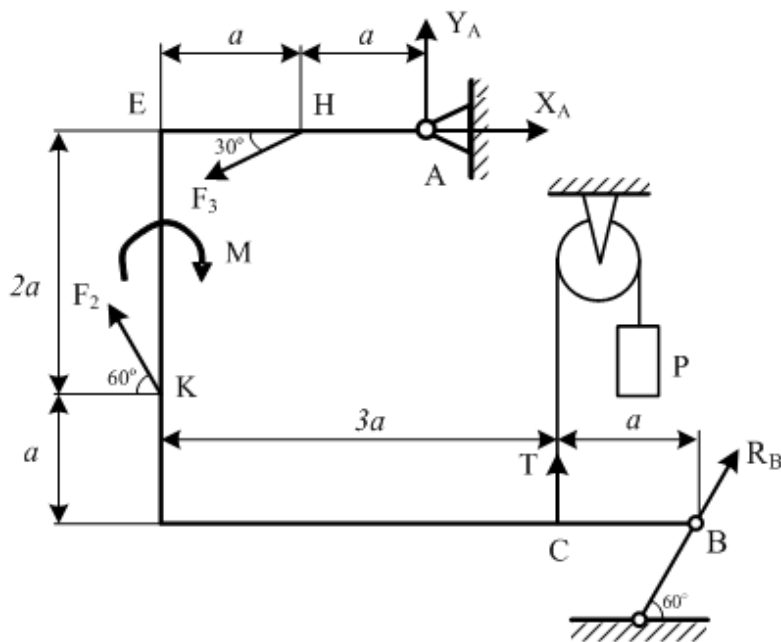


## Задача 2

### Решение



Рассмотрим равновесие жесткой рамы. На раму действуют силы: силы  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ , пара сил с моментом  $M$ , натяжение троса  $\vec{T}$  ( $T=P$ ) и реакции связей  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$ ,  $\vec{R}_B$ .

Неизвестны реакции связей  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$ ,  $\vec{R}_B$ .

Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_x = 0, \quad X_A - F_3 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ + R_B \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad Y_A - F_3 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ + T + R_B \sin 60^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma m_A = 0, \\ F_3 \sin 30^\circ \cdot a - M - F_2 \cos 60^\circ \cdot 2a - F_2 \sin 60^\circ \cdot 2a + T \cdot a + R_B \cos 60^\circ \cdot 3a + R_B \sin 60^\circ \cdot 2a = 0 \quad (3)$$

Из уравнения (3):

$$R_B = \frac{-F_3 \sin 30^\circ \cdot a + M + F_2 \cos 60^\circ \cdot 2a + F_2 \sin 60^\circ \cdot 2a - T \cdot a - R_B \cos 60^\circ \cdot 3a}{\sin 60^\circ \cdot 2a} =$$

$$= \frac{-30 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 60 + 20 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,866 \cdot 2 \cdot 0,5 - 25 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 3 \cdot 0,5 + 0,866 \cdot 2 \cdot 0,5} \approx \ddot{\ddot{}} 41,66 \text{ кН}$$

Из уравнения (2):

$$Y_A = F_3 \sin 30^\circ - F_2 \sin 60^\circ - T - R_B \sin 60^\circ = 30 \cdot 0,5 - 20 \cdot 0,866 - 25 - 41,66 \cdot 0,866 \approx \ddot{\ddot{}} -63,4 \text{ кН}$$

Из уравнения (1):

$$X_A = F_3 \cos 30^\circ + F_2 \cos 60^\circ - R_B \cos 60^\circ = 30 \cdot 0,866 + 20 \cdot 0,5 - 41,66 \cdot 0,5 \approx \ddot{\ddot{}} 15,15 \text{ кН}$$

Реакции, полученные со знаком «минус», в действительности имеют направление противоположное принятому на рисунке.

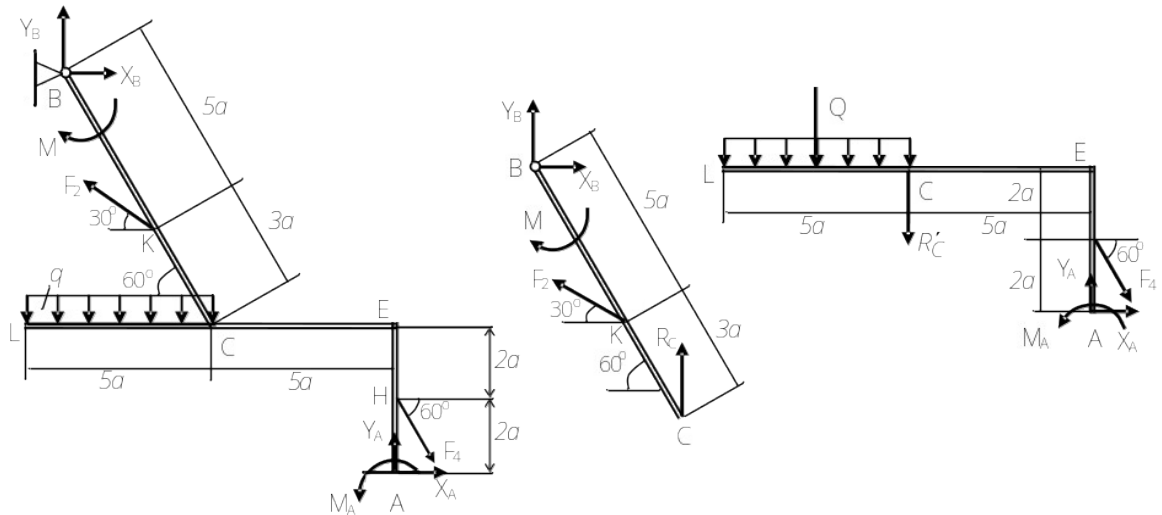
**Проверка:**  $\Sigma m_B(F_K) = 0$

$$\begin{aligned} & -T \cdot a - F_2 \sin 60^\circ \cdot 4a + F_2 \cos 60^\circ \cdot a - M + F_3 \cos 30^\circ \cdot 3a + F_3 \sin 30^\circ \cdot 3a - X_A \cdot 3a - Y_A \cdot 2a = 0 \\ & -25 \cdot 0,5 - 20 \cdot 0,866 \cdot 4 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,5 \cdot 0,5 - 60 + 30 \cdot 0,866 \cdot 3 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 0,5 - 15,15 \cdot 3 \cdot 0,5 + 63,4 \cdot 2 \cdot 0,5 = \\ & \qquad \qquad \qquad 0,01 \approx 0 \end{aligned}$$

Ответ:  $X_A = 15,15 \text{ кН}$ ,  $Y_A = -63,4 \text{ кН}$ ,  $R_B = 41,66 \text{ кН}$

### Задача 3

### Решение



Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим вначале равновесие стержня BC.

На стержень действуют сила  $\vec{F}_2$ , пара сил с моментом  $M$ , реакция  $R_C$  и составляющие  $X_B, Y_B$  реакции опоры B.

Для полученной плоской системы сил составляем уравнения равновесия:

$$\sum \vec{F}_{kx} = 0; X_B - F_2 \cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum \vec{F}_{ky} = 0; Y_B + F_2 \sin 30^\circ + R_C = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = 0; -M - F_2 \cos 60^\circ \cdot 5a + R_C \cdot 8a \cos 60^\circ = 0 \quad (3)$$

Из (3):

$$R_C = \frac{M + F_2 \cos 60^\circ \cdot 5a}{8a \cos 60^\circ} = \frac{60 + 20 \cdot 0,5 \cdot 5 \cdot 0,2}{8 \cdot 0,2 \cdot 0,5} = 87,5 \text{ (кН)}$$

Из (2):

$$Y_B = -F_2 \sin 30^\circ - R_C = -20 \cdot 0,5 - 87,5 = -97,5 \text{ (кН)}$$

Из (1):

$$X_B = F_2 \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ (кН)}$$

Теперь рассмотрим равновесие угольника AEL. На него действует сила  $\vec{F}_4$ , равномерно распределенная нагрузка, которую заменим силой  $\vec{Q}$ , приложенной в середине участка LC ( $Q = q \cdot 5a = 20$  кН), сила давления стержня BC  $R'_C$  (направлена противоположно  $R_C$  и численно  $R'_C = R_C$ ) и реакция жесткой заделки A ( $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A$ ).

Для этой плоской системы сил тоже составим уравнения равновесия:

$$\Sigma \vec{F}_{kx} = 0; X_A + F_4 \cos 60^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma \vec{F}_{ky} = 0; Y_A - F_4 \sin 60^\circ - R'_C - Q = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma m_A(\vec{F}_k) = 0; M_A - F_4 \cos 60^\circ \cdot 2a + R'_C \cdot 5a + Q \cdot 7,5a = 0 \quad (6)$$

Из (4):

$$X_A = -F_4 \cos 60^\circ = -40 \cdot 0,5 = -20 \text{ (кН)}$$

Из (5):

$$Y_A = F_4 \sin 60^\circ + R'_C + Q = 40 \cdot 0,866 + 87,5 + 20 = 142,14 \text{ (кН)}$$

Из (6):

$$M_A = F_4 \cos 60^\circ \cdot 2a - R'_C \cdot 5a - Q \cdot 7,5a = 40 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,2 - 87,5 \cdot 5 \cdot 0,2 - 20 \cdot 7,5 \cdot 0,2 \approx -109,5 \text{ (кНм)}$$

Реакции, полученные со знаком «минус» в действительности имеют направление противоположное принятому на рисунке.

**Проверка (для всей конструкции):**  $\Sigma m_C(\vec{F}_k) = 0$

$$F_2 \cos 60^\circ \cdot 3a - M - X_B \cdot 8a \sin 60^\circ - Y_B \cdot 8a \cos 60^\circ + Q \cdot 2,5a - F_4 \sin 60^\circ \cdot 5a + F_4 \cos 60^\circ \cdot 2a + X_A \cdot 4a + Y_A \cdot 5a + M_A = 0$$

$$F_2 \cos 60^\circ \cdot 3 - \frac{M}{a} - X_B \cdot 8 \sin 60^\circ - Y_B \cdot 8 \cos 60^\circ + Q \cdot 2,5 - F_4 \sin 60^\circ \cdot 5 + F_4 \cos 60^\circ \cdot 2 +$$

$$+X_A \cdot 4 + Y_A \cdot 5 + \frac{M_A}{a} = 0$$

$$20 \cdot 0,5 \cdot 3 - \frac{60}{0,2} - 17,32 \cdot 8 \cdot 0,866 + 97,5 \cdot 8 \cdot 0,5 + 20 \cdot 2,5 - 40 \cdot 0,866 \cdot 5 + 40 \cdot 0,5 \cdot 2 -$$

$$-20 \cdot 4 + 142,14 \cdot 5 - \frac{109,5}{0,2} = 0$$

$$0,01 \approx 0$$

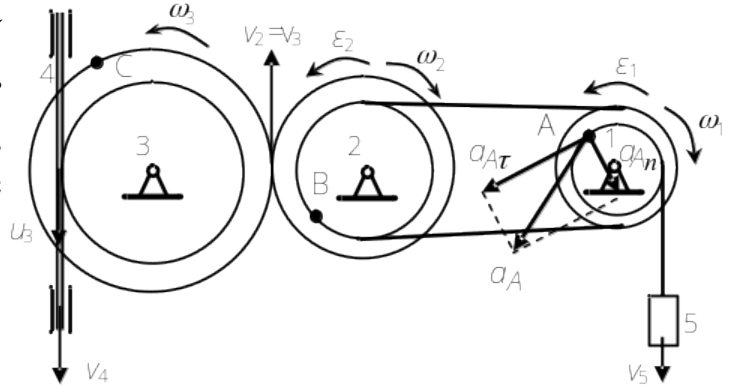
Ответ:

$M_A$	$X_A$	$Y_A$	$R_C$	$X_B$	$Y_B$
кНм	кН				
-109,5	-20	142,14	87,5	17,32	-97,5

## Задача 4

### Решение

Скорости точек, лежащих на ободах колес радиуса  $R_i$ , обозначим через  $v_i$ , а точек, лежащих на ободах колес радиуса  $r_i$ , через  $u_i$ .



**Угловые скорости всех колес.**

Колеса 3 и 2 находятся в зацеплении, следовательно,  $v_3 = v_2$ , то есть  $\omega_3 R_3 = \omega_2 R_2$  и отсюда  $\omega_3 = \frac{R_2}{R_3} (7t - 3t^2)$ .

При  $t_1 = 2$  с

$$\omega_3 = \frac{8}{16} (7 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2) = 1 \text{ (1/с)}.$$

**Скорость  $v_5$**

Т.к. колеса 2 и 1 связаны ременной передачей, то  $v_1 = u_2$  или  $\omega_1 R_1 = \omega_2 r_2$  и  $\omega_1 = \frac{r_2}{R_1} (7t - 3t^2)$ .

$$v_5 = u_1 = \omega_1 r_1 = \frac{r_1 r_2}{R_1} (7t - 3t^2)$$

При  $t_1 = 2$  с

$$v_5 = \frac{2 \cdot 6}{4} (7 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2) = 6 \text{ (см/с)}$$

**Угловое ускорение  $\varepsilon_2$ .**

Так как  $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2$ , то  $\varepsilon_2 = 7 - 6t = 7 - 6 \cdot 2 = -5$  (1/с<sup>2</sup>).

### Ускорение $a_A$ .

Для т.А  $\vec{a}_A = \vec{a}_{At} + \vec{a}_{An}$ , где  $a_{At} = r_1 \varepsilon_1$ ,  $a_{An} = r_1 \omega_1^2$ .

Угловое ускорение  $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = \frac{r_2}{R_1} (7 - 6t) = \frac{6}{4} (7 - 6 \cdot 2) = -7,5$  (1/с<sup>2</sup>).

Таким образом при  $t_1 = 2$  с

касательная составляющая  $a_{At} = -2 \cdot 7,5 = -15$  (см/с<sup>2</sup>),

нормальная составляющая  $a_{An} = r_1 \left[ \frac{r_2}{R_1} (7t - 3t^2) \right]^2 = 2 \left[ \frac{6}{4} (7 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2) \right]^2 = 18$  (см/с<sup>2</sup>),

полное ускорение  $a_A = \sqrt{a_{At}^2 + a_{An}^2} = \sqrt{15^2 + 18^2} = 23,4$  (см/с<sup>2</sup>).

### Ускорение $a_4$ .

Т.к. рейка 4 совершает поступательное движение, то  $a_4 = \dot{v}_4 = \dot{u}_3 = \dot{\omega}_3 r_3 = \frac{r_3 R_2}{R_3} (7 - 6t)$ .

Тогда  $a_4 = \frac{12 \cdot 8}{16} (7 - 6 \cdot 2) = -30$  (см/с<sup>2</sup>).

Ответ:

$v_5$	$\omega_3$	$\varepsilon_2$	$a_A$	$a_4$
см/с	1/с	1/с <sup>2</sup>	см/с <sup>2</sup>	
6	1	-5	23,4	-30

## Задача 5

### Решение

Рассматриваем движение т.М как сложное, считая ее движение по окружности относительным, а вращение пластины – переносным. Тогда абсолютная скорость и абсолютное ускорение точки найдутся по формулам:

$$\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер},$$

$$\vec{a} = a_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор} \text{ или в развернутом виде}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{отн}^{\tau} + \vec{a}_{отн}^n + \vec{a}_{пер}^{\tau} + \vec{a}_{пер}^n + \vec{a}_{кор}.$$

#### Положение т.М:

При  $t=1$  с

$$s = \frac{\pi}{6} R (3 \cdot 1 - 1^2) = \frac{\pi}{3} R \text{ (см)} - \text{ т.М находится в области положительных значений выше т.А.}$$

Тогда  $\angle ACM = \frac{s}{R} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ , а  $\angle DCM = 30^\circ$ .

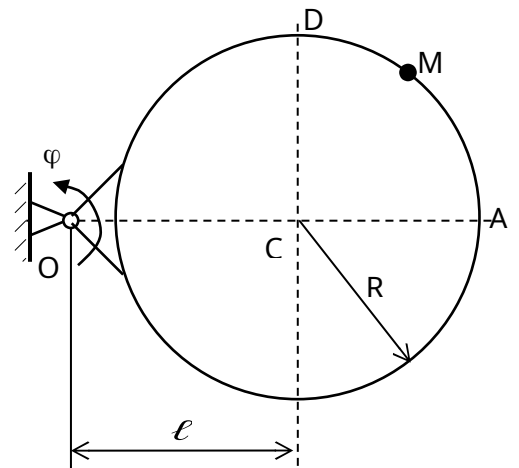
Расстояние от оси вращения О до т.М :

$$R_1 = \sqrt{(\ell + R \cos 60^\circ)^2 + (R \sin 60^\circ)^2} = R \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = R \sqrt{3} = 104 \text{ (см)}.$$

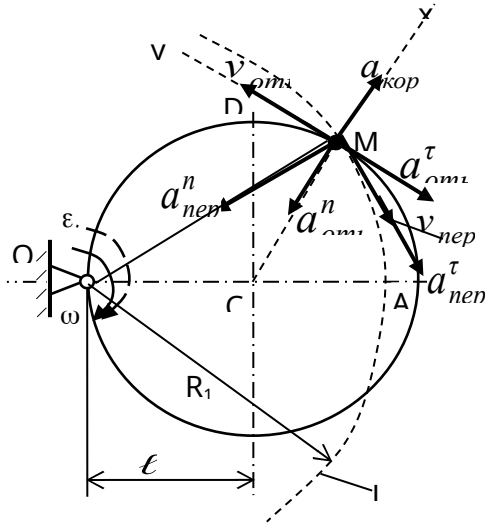
#### Относительное движение.

Относительная скорость  $\vec{v}_{отн} = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{6} R (3 - 2t)$ .

При  $t = 1$  с







$\vec{v}_{отн} = \frac{\pi}{6} 60(3 - 2 \cdot 1) = 31,4 \text{ (см/с)}$  – вектор направлен в сторону положительных значений  $s$ .

Модуль относительной скорости  $v_{отн} = |\vec{v}_{отн}| = 31,4 \text{ см/с}$ .

Модуль относительного касательного ускорения  $a_{отн}^\tau = |\vec{a}_{отн}^\tau|$ , где

$$\vec{a}_{отн}^\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{\pi}{3} R$$

При  $t = 1 \text{ с}$

$$\vec{a}_{отн}^\tau = -\frac{3,14}{3} 60 = -62,8 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Значит  $a_{отн}^\tau = 62,8 \text{ (см/с}^2\text{)}$ .

Вектор  $\vec{a}_{отн}^\tau$  направлен в сторону отрицательных значений  $s$ . Знаки  $\vec{v}_{отн}$  и  $\vec{a}_{отн}^\tau$  разные, следовательно, относительное движение т.М замедленное.

Относительное нормальное ускорение

$$\vec{a}_{отн}^n = \frac{v_{отн}^2}{R} = \frac{31,4^2}{60} = 16,4 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

**Переносное движение.**

Модуль переносной скорости  $v_{пер} = R_1 \cdot \omega$ ,

где  $R_1$  – радиус окружности  $L$ , описываемой той точкой тела, с которой совпадает в данный момент т.М

$$\omega = |\vec{\omega}| = \frac{d\phi}{dt} = 2t - 6t^2$$

$\omega$  – модуль угловой скорости тела:

При  $t_1 = 1 \text{ с}$

$$\vec{\omega} = 2 \cdot 1 - 6 \cdot 1^2 = -4 \text{ 1/с; } \omega = 4 \text{ рад/с}.$$

Модуль переносной скорости:  $v_{пер} = R_1 \cdot \omega = 104 \cdot 4 = 416$  (см/с). Вектор  $\vec{v}_{пер}$  направлен по касательной к окружности L в сторону вращения тела.

Модуль переносного вращательного ускорения  $a_{пер}^{\tau} = R_1 \cdot \varepsilon$ , где  $\varepsilon = |\vec{\varepsilon}|$  -

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d^2 \phi}{dt^2} = 2 - 12t$$

модуль углового ускорения тела Д:

При  $t_1 = 1$  с

$\vec{\varepsilon} = 2 - 12 \cdot 1 = -10$  ( $1/c^2$ ); то есть переносное вращательное движение - ускоренное, так как знаки  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\varepsilon}$  одинаковы.

Значит  $\varepsilon = 10$   $1/c^2$  и

$$a_{пер}^{\tau} = 104 \cdot 10 = 1040 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор  $\vec{a}_{пер}^{\tau}$  направлен в по  $\vec{v}_{пер}$ .

Модуль переносного центростремительного ускорения  $a_{пер}^n = R_1 \cdot \omega^2 = 104 \cdot 4^2 = 1664$  (см/с<sup>2</sup>).

Вектор  $\vec{a}_{пер}^n$  направлен от т.М к оси вращения.

**Кориолисово ускорение**  $\vec{a}_{кор} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{отн}$ .

Модуль кориолисова ускорения  $a_{кор} = 2 \omega \cdot v_{отн} \cdot \sin(\omega, \vec{v}_{отн})$ , где  $\sin(\vec{\omega}, \vec{v}_{отн}) = \sin 90^\circ = 1$ .

Так как  $\omega = 4$  рад/с, а  $v_{отн} = 31,4$  см/с, то  $a_{кор} = 2 \cdot 4 \cdot 31,4 = 251,2$  (см/с<sup>2</sup>).

Вектор  $\vec{a}_{кор}$  направлен в соответствии с правилом векторного произведения.

### Абсолютная скорость.

Абсолютную скорость т.М найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей. Векторы  $\vec{v}_{отн}$  и  $\vec{v}_{пер}$  расположены под углом  $150^\circ$  (см. рисунок) друг к другу.

Модуль абсолютной скорости

$$v = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2 - 2v_{отн}v_{пер}\cos 30} = \sqrt{31,4^2 + 416^2 - 2 \cdot 31,4 \cdot 416 \cdot 0,866} = 389,1 \text{ (см/с)}$$

### Абсолютное ускорение.

Все векторы лежат в плоскости чертежа. Модуль абсолютного ускорения находим методом проекций:

$$a_x = a_{кор} - a_{отн}^n - a_{пер}^n \cos 30 - a_{пер}^{\tau} \cos 60 = 251,2 - 16,4 - 1664 \cdot 0,866 - 1040 \cdot 0,5 = -1726,2 \text{ (см/с}^2\text{)}$$

$$a_y = -a_{отн}^{\tau} + a_{пер}^n \sin 30 - a_{пер}^{\tau} \sin 60 = -62,8 + 1664 \cdot 0,5 - 1040 \cdot 0,866 = -131,4 \text{ (см/с}^2\text{)}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1726,2^2 + 131,4^2} = 1731 \text{ (см/с}^2\text{)}$$



