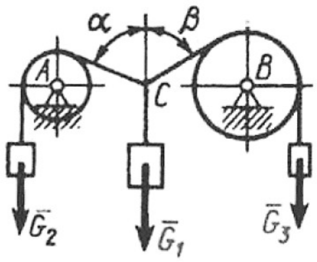
СОДЕРЖАНИЕ

1 Задача 1-С: Плоская система сходящихся сил

Условие. Грузы весом G_1, G_2 и G_3 находятся в равновесии. Известны вес груза $G_2=55\ H$ и углы $\alpha=75°$, $\beta=60°$. Определить вес груза G_3.

Схема по заданию.



Решение.

Выбираем правую плоскую декартовую систему координат и составляем расчетную схему (рисунок 1).

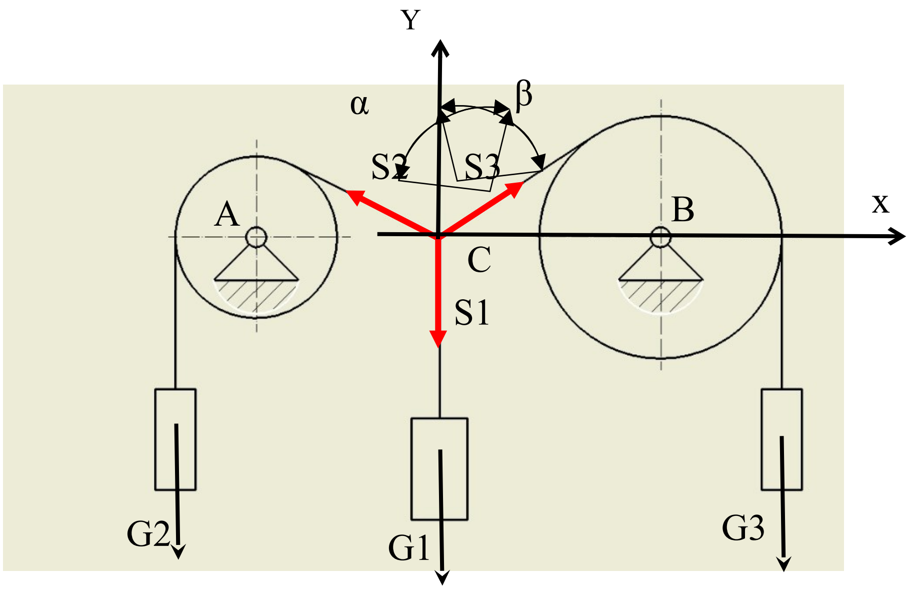


Рисунок 1 Расчетная схема

Реакции связей направлены по тросам от узла С соединения тросов. Реакция S_1 будет направлена в направлении блока 1 и трос будет растянут. Реакция S_2 будет направлена вниз, а S_3 в направлении блока 2 троса будут растянуты.

Начало координат возьмем в точке пересечения С действующих сил. Следовательно, получаем плоскую систему сходящихся сил.

Запишем уравнение равновесия:

$$\begin{cases} \Sigma Fxi = 0 : S_3 * sin\beta - S_2 * sin\alpha = 0, (1.1) \\ \Sigma Fyi = 0 : S_3 * cos\beta + S_2 * cos\alpha - S_1 = 0, (1.2) \end{cases}$$

Поскольку в исходных данных не задан вес G_1, то уравнение два рассматривать нет смысла.

Тогда из уравнения (1) находим усилие S_3, которое и будет равно весу G_3.

$$S_3 = (S¿¿2 \cdot sin\alpha) / sin\beta = (55 \cdot \sin 75°) / \sin 60° = 62,8\, H¿$$

Ответ G_3= 62,8 Н.

						Лис
					4	
Изм.	Лис	№ докум.	Подпись	Дат		

2 Задача 2-С: Плоская система произвольно расположенных сил

Условие. На жесткую раму действует пара сил с моментом $M=60$ *Н·м* и две силы $F_1=10$ *Н* приложена в точке К под углом $\alpha_1=30^o$ и $F_4= 40$ *Н* приложена в точке Н под углом $\alpha_4=60^o$. Схема рамы рис. 5, $a=0,5$ *м*.

Определить реакции связей (опорные реакции) в точках *А* и *В* с помощью аналитических условий равновесия. Убедиться в правильности решения, выполнив проверку.

Схема рамы показана на рисунке 2.1.

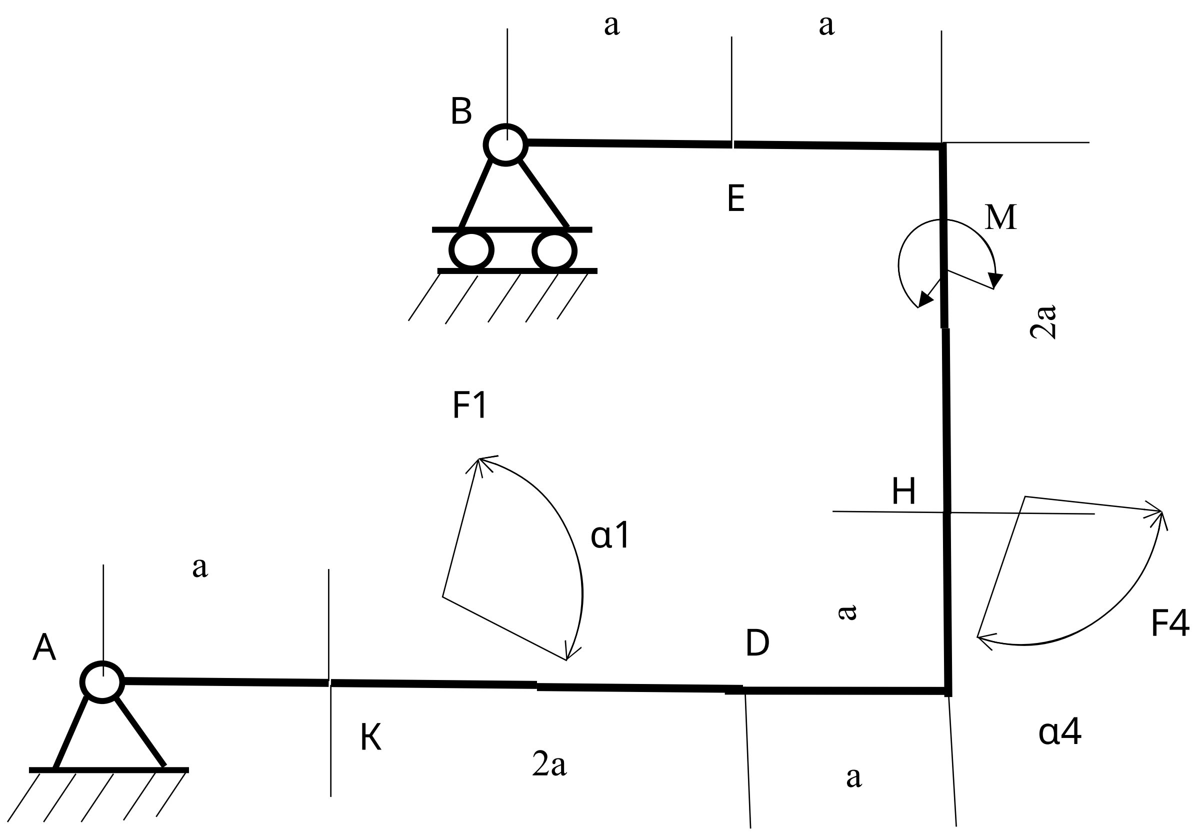


Рисунок 2.1 –Схема жесткой рамы

Решение.

Выбираем правую плоскую декартовую систему координат и составляем расчетную схему (рисунок 2.2).

В точке A шарнирно-неподвижная опора, поэтому неизвестную силу реакции связи R_A раскладываем на составляющие, параллельные осям координат.

$$R_A = R_{xA} + R_{yA}$$

В точке B шарнирно-подвижная опора. Неизвестную силу реакции связи R_B направляем по нормали к опорной поверхности.

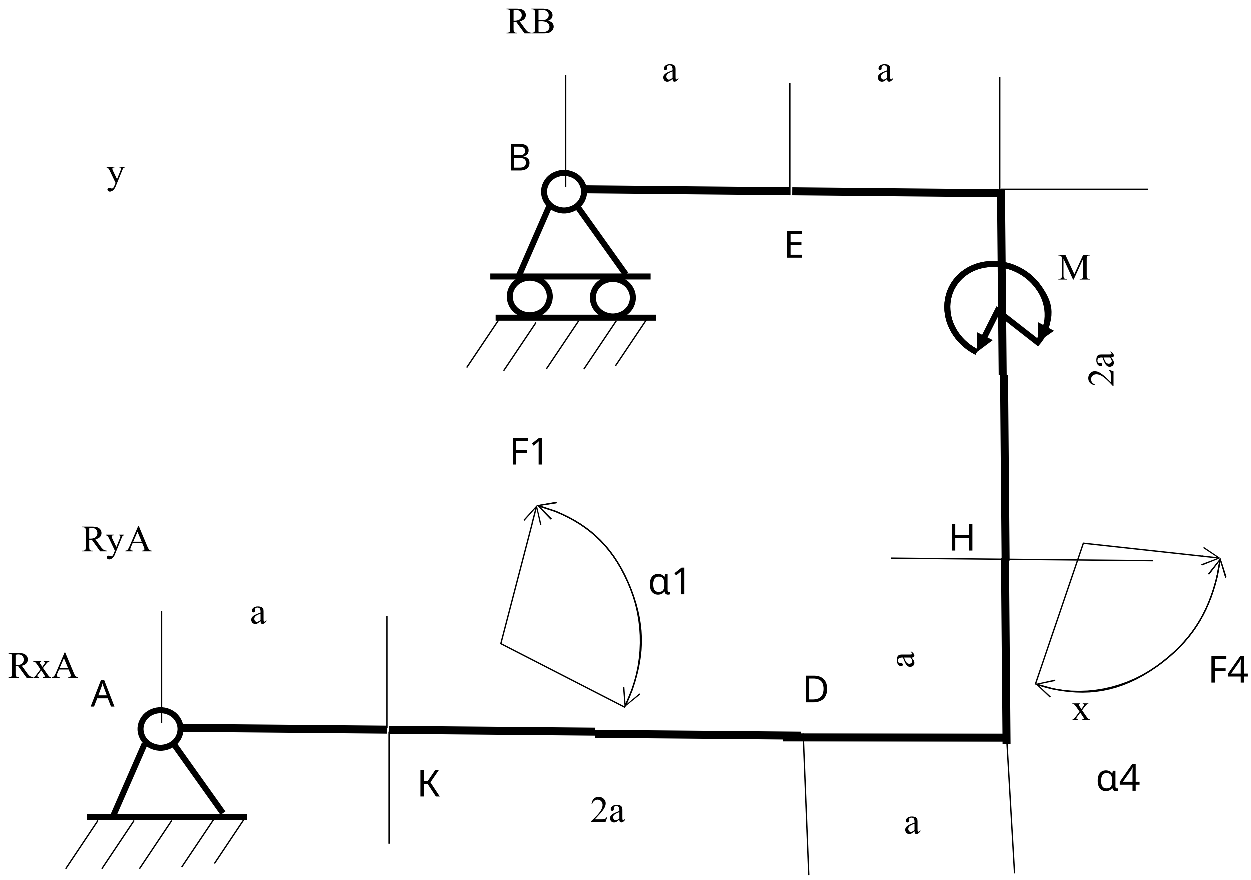


Рисунок 2.2 –Расчетная схема жесткой рамы

Записываем условия равновесия плоской системы в аналитической форме.

$$\begin{cases} \Sigma F_{xi}=0: \quad R_{xA}+F_4\cdot\sin\alpha_4+F_1\cdot\cos\alpha_1=0 & (2.1) \\ \Sigma F_{yi}=0: \quad R_{yA}-F_4\cdot\cos\alpha_4+F_1\cdot\sin\alpha_1+R_B=0 & (2.2) \\ \Sigma M_A(F_i)=0: \quad -F_4\cdot\sin\alpha_4\cdot a-F_4\cdot\cos\alpha_4\cdot 4a+F_1\cdot\sin\alpha_1\cdot a+ & \\ \quad +R_B\cdot 2a-M=0 & (2.3) \end{cases}$$

Решаем систему из трех уравнений.

Из уравнения (2.1) получаем:

$R_{xA} = -F_4 \cdot \sin\alpha_4 - F_1 \cdot \cos\alpha_1 = -40 \cdot \sin 60 - 10 \cdot \cos 30 = -40 \cdot 0{,}866 - 10 \cdot 0{,}866 = = -43{,}3$ H.

Из уравнения (2.3) получаем:

$R_B = (F_4 \cdot \sin\alpha_4 \cdot a + F_4 \cdot \cos\alpha_4 \cdot 4a - F_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot a + M)/2a = (40 \cdot \sin 60 \cdot 0{,}5 + 40 \cdot \cos 60 \cdot 4 \cdot 0{,}5 - 10 \cdot \sin 30 \cdot 0{,}5 + 60)/2 \cdot 0{,}5 = (40 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}5 + 40 \cdot 0{,}5 \cdot 4 \cdot 0{,}5 - 10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 60)/1 = 17{,}32 + 69{,}28 + 60 = 114{,}82$ H.

Из уравнения (2.2) получаем:

$R_{yA} = F_4 \cdot \cos\alpha_4 - F_1 \cdot \sin\alpha_1 - R_B = 40 \cdot 0{,}5 - 10 \cdot 0{,}5 - 144{,}1 = 20 - 5 - 144{,}1 =$

$= -99{,}82$ H.

Выполняем проверку:

$\Sigma M_H(Fi) = 0 : R_{xA} \cdot a - R_{yA} \cdot 4a + F_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot a - F_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot 3a - R_B \cdot 2a - M =$

$= (-43{,}3) \cdot 0{,}5 - (-99{,}82) \cdot 4 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}5 - 10 \cdot 0{,}5 \cdot 3 \cdot 0{,}5 - 114{,}82 \cdot 2 \cdot 0{,}5 - 60 = 0.$

Определяем величину реакции связи R_A

$R A = \sqrt{R_{xA}^2 + R_{yA}^2} = ¿¿$

$¿ \sqrt{43{,}3^2 + (-99{,}82)^2} = 108{,}81\ H$

Значение и R_{xA} R_{yA} получились отрицательными. Это указывает на то, что принятые направления этой силы противоположны их действительным направлениям.

Направление R_A найдем по направляющим косинусам.

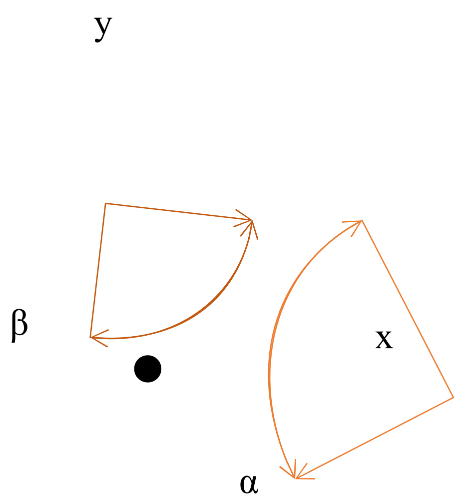


Рисунок 2.3 – Схема для определения направления R_A

$\cos\alpha = R_{xA}/R_A = -4\ 3{,}3/108{,}81 = -0{,}3979 \Rightarrow \alpha = 113{,}45°$

$\cos\beta = R_{yA}/R_A = -99{,}82/108{,}81 = -0{,}9174 \Rightarrow \beta = 156{,}55°$

Ответ: $R_A = 108{,}81$ H, $R_B = 114{,}82$ H.

3 Задача 3-С: Плоская система произвольно расположенных сил

Условие. На жесткую раму действуют силы, указанные в таблице 3.. Схема конструкции рамы представлена на рисунке3.1. Размеры стержней указаны в *м*.

Определить реакции связей (опорные реакции) в конструкции с помощью аналитических условий равновесия. Убедиться в правильности решения, выполнив проверку.

Таблица 3.1. Исходные данные.

№ вар.	***G***, *кН*	***P***, *кН*	***M***, *кН·м*	***q***, *кН/м*	***α***, *град.*
18	20	10	10	-	30

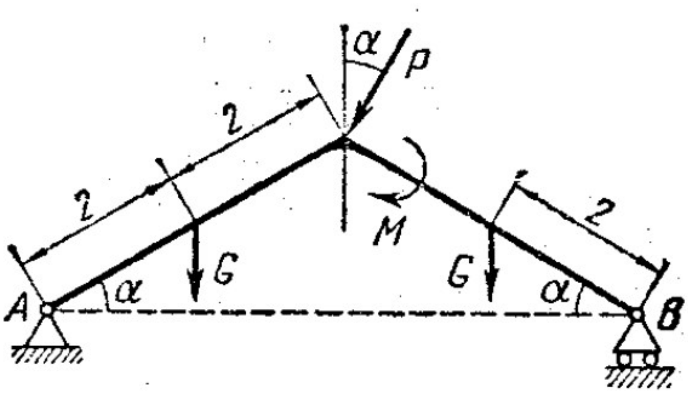


Рисунок 3.1 - Схема конструкции рамы

Решение:

Выбираем правую плоскую декартовую систему координат и составляем расчетную схему (рисунок 3.2).

В точке *A* шарнирно-неподвижная опора, поэтому неизвестную силу реакции связи R_A раскладываем на составляющие, параллельные осям координат.

$$R_A = R_{xA} + R_{yA} \,, \tag{3.1}$$

В точке В шарнирно-подвижная опора. Неизвестную силу реакции связи $R_В$ направляем по нормали к опорной поверхности.

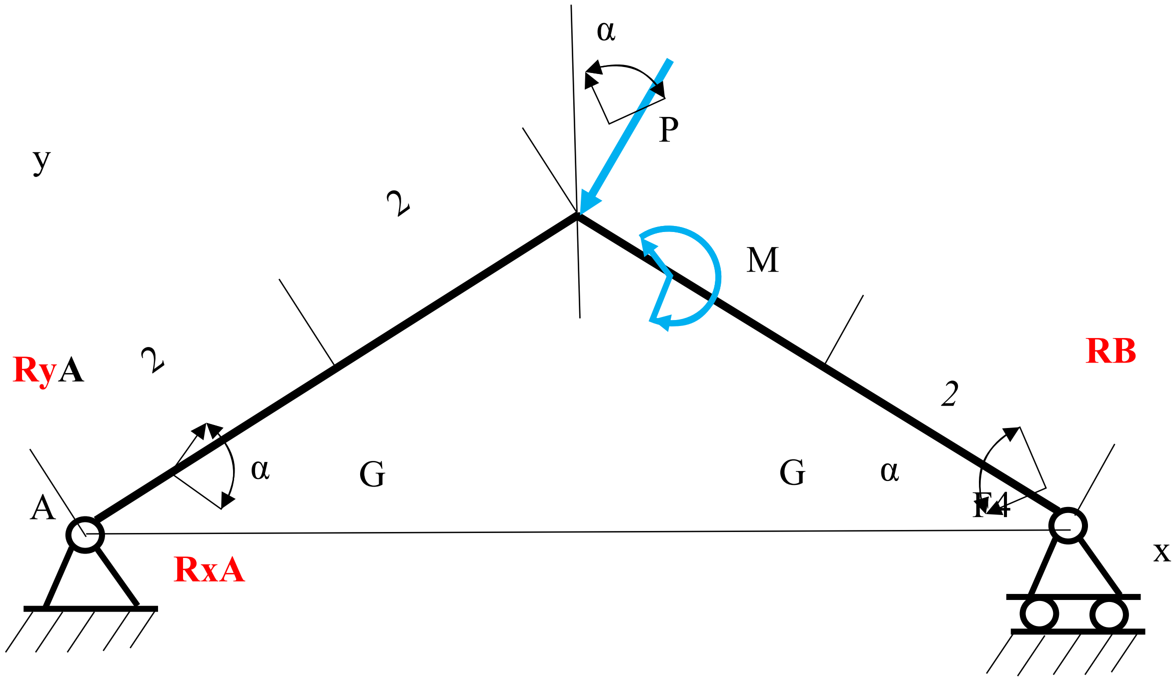


Рисунок 3.2 – Расчетная схема конструкции рамы

Записываем условия равновесия плоской системы в аналитической форме.

$$\Sigma F_{xi}=0: \qquad R_{xA}-P\cdot\sin\alpha=0\ , \tag{3.1}$$

$$\Sigma F_{yi}=0: \qquad R_{yA}-2G-P\cdot\cos\alpha+R_B=0, \tag{3.2}$$

$$\Sigma M_A(F_i)=0: -G\cdot 2\cos\alpha-P\cdot\cos\alpha\cdot 4\cdot\cos\alpha+P\cdot\sin\alpha\cdot 4\cdot\sin\alpha -$$

$$-G\cdot 6\cdot\cos\alpha - M+R_B\cdot 6\cdot\cos\alpha=0\ , \tag{3.3}$$

Решаем систему из трех уравнений.

Из уравнения (3.1) получаем

$$R_{xA}=P\cdot\sin 30 = 10\cdot 0{,}5=5\ kH.$$

Из уравнения (3.3) получаем

$R_B=(G\cdot 2\cos\alpha+P\cdot\cos\alpha\cdot 4\cdot\cos\alpha-P\cdot\sin\alpha\cdot 4\cdot\sin\alpha+G\cdot 6\cdot\cos\alpha+M)/8\cdot\cos\alpha=$

$(20\cdot 0{,}866\cdot 2+10\cdot 0{,}866\cdot 4\cdot 0{,}866-10\cdot 0{,}5\cdot 4\cdot 0{,}5+20\cdot 6\cdot 0{,}866+10)/8\cdot 0{,}866=24{,}33\ кН.$

Из уравнения (3.2) получаем

$R_{yA=}2G+P\cdot\cos\alpha\text{-}R_B=2\cdot 20+10\cdot 0{,}866–24{,}33=24{,}33\ кН$

Выполняем проверку:

$\Sigma M_P(F_i)=0:$

					9	Лис
Изм.	Лис	№ докум.	Подпись	Дат		

$-R_{yA}\cdot 4\cdot cos\alpha+R_{xA}\cdot 4\cdot sin\alpha+G\cdot 2\cdot cos\alpha-G\cdot 2\cdot cos\alpha+R_B\cdot 4\cdot cos\alpha-M=-24,33\cdot 4\cdot 0,866+5\cdot 4\cdot 0,5+20\cdot 2\cdot 0,866-20\cdot 2\cdot 0,866+24,33\cdot 4\cdot 0,866-10=0.$

Определяем величину реакции связи R_A

$$R\,A=\sqrt{R_{xA}^2+R_{yA}^2}=\sqrt{5^2+(24,33)^2}=24,84\,H$$

Значения R_{xA} и R_{yA} получились положительными. Это указывает на то, что принятые направления этих сил совпадают с их действительными направлениями.

Направление R_A найдем по направляющим косинусам.

$\cos\alpha=R_{xA}/R_A= 5/24,84=0,2012 \Rightarrow \alpha=78,4°$

$\cos\beta=R_{yA}/R_A=24,33/24,84=-0,9795 \Rightarrow \beta=11,6°$

Ответ: $R_A = 24,84\ H$, $R_B = 24,33\ H.$

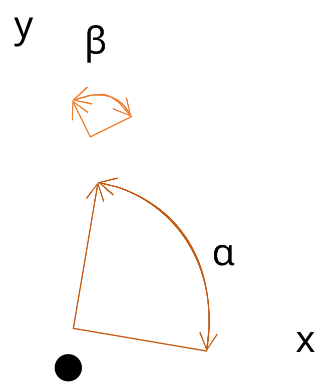


Рисунок 2.3 – Схема для определения направления RA

4 Задача 4-С: Плоская система произвольно расположенных сил

Условие: На жесткую раму действуют силы, указанные в таблице 4.1. Схема конструкции рамы представлена на рисунке 4.1. Размеры стержней указаны в *м*.

Определить реакции связей (опорные реакции) и давление в промежуточном шарнире составной конструкции (система двух тел) с помощью аналитических условий равновесия. Убедиться в правильности решения, выполнив проверку.

Таблица 4.1. Исходные данные.

№ вар.	***P₁****, кН*	***P₂****, кН*	***M****, кН·м*	***q****, кН/м*
18	7	16	27	0,8

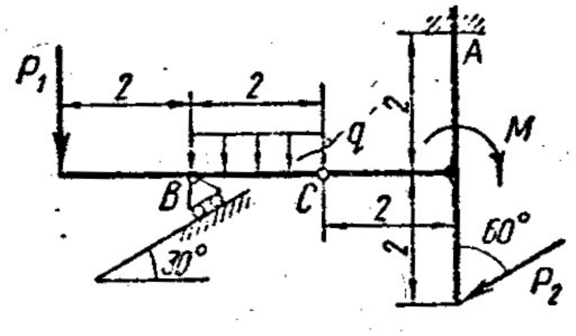


Рисунок 4.1 - Схема конструкции рамы

Решение. Выбираем правую плоскую декартовую систему координат и составляем расчетную схему.

Согласно аксиоме о связях в точках *A* и *B* вместо связей изображаем силы реакции связей.

В точке *B* шарнирно-подвижная опора. Неизвестную силу реакции связи R_B направляем по нормали к опорной поверхности.

В точке *A* заделка, поэтому неизвестные силы реакции R_A раскладываем на составляющие, параллельные осям координат. А также там прикладывается момент M_B.

$$R_A = R_{xA} + R_{yA}\ , \tag{4.1}$$

Изм.	Лис	№ докум.	Подпись	Дат

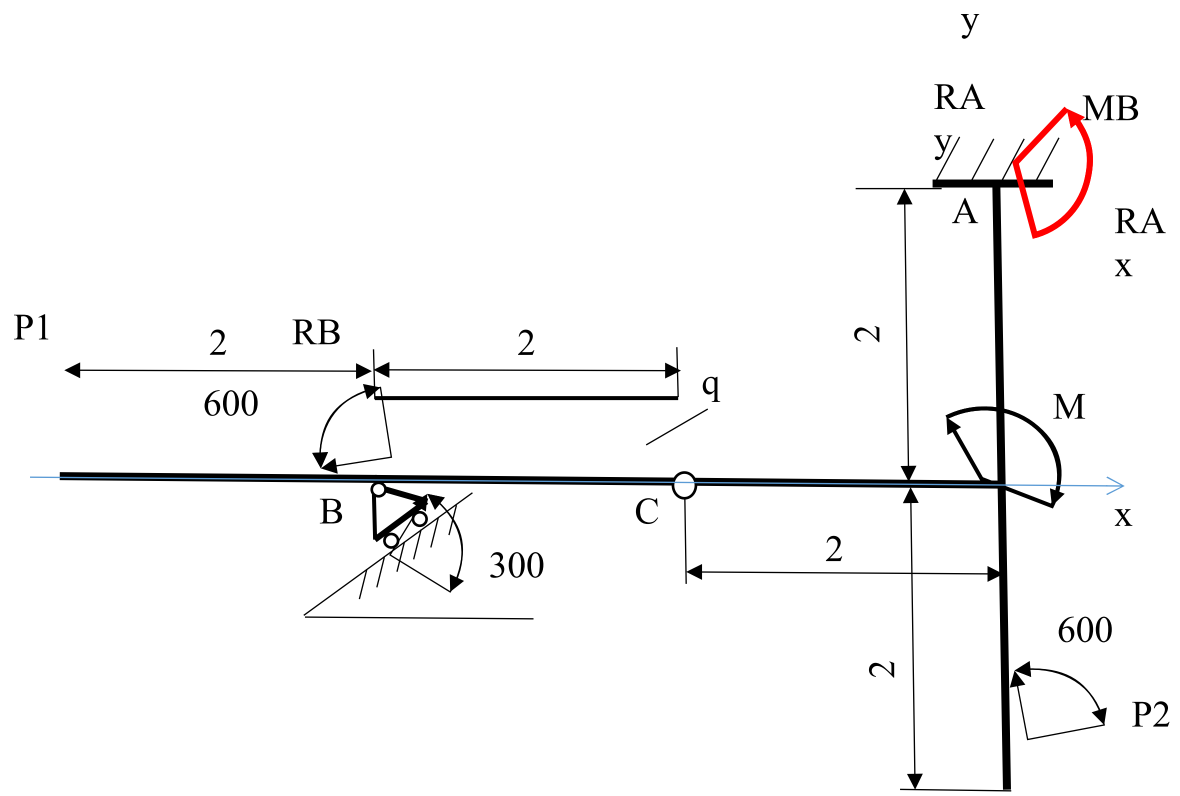


Рисунок 4.2 – Расчетная схема конструкции

Сначала записываем условия равновесия плоской системы в аналитической форме для всей конструкции.

$\Sigma F_{xi}=0$: $\qquad -R_B\cdot\cos60+R_{Ax}-P_2\cdot \sin60 =0$ (4.1)

$\Sigma F_{yi}=0$: $\qquad -P_1+ R_B\cdot sin60+R_{Ay}-q\ 2-P_2\cdot cos60=0$ (4.2)

$\Sigma MA(F_i)=0$: $\qquad P_1\cdot6-R_B\cdot\sin60\cdot4- R_B\cdot\cos60\cdot2 +q\cdot2\cdot3-M-$

$-P_2\cdot\sin60\cdot4+M_B=0$ (4.3)

Решить систему не представляется возможным, поэтому разобьем составную конструкцию на две по шарниру (правую (рисунок 4.3) и левую (рисунок 4.4)). Усилие (давление) в шарнире Rc раскладываем на составляющие, параллельные осям координат.

$$R_C=R_{xC}+R_{yC}, \qquad (4.4)$$

Усилия R_{xc} и R_{yc} в шарнире правой части конструкции равны по величине и противоположны по направлению усилиям в левой части конструкции. Если снова соединить две части конструкции, то давление в шарнире будет = 0.

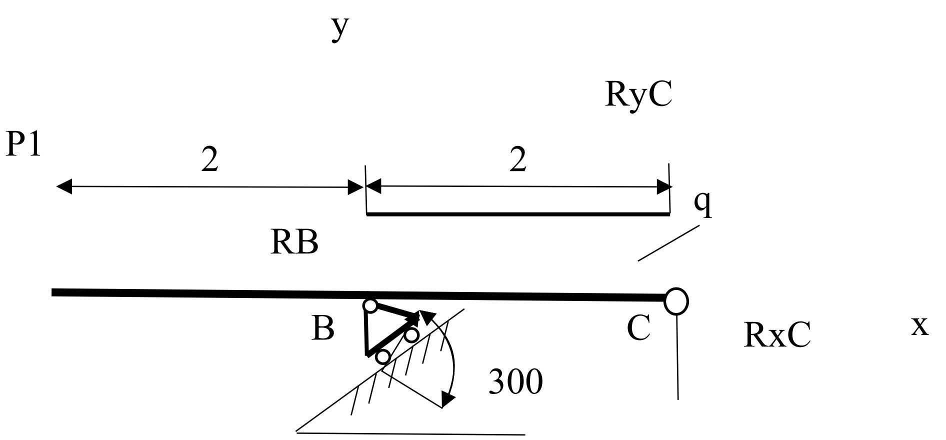


Рисунок 4.3 – Расчетная схема конструкции (левая)

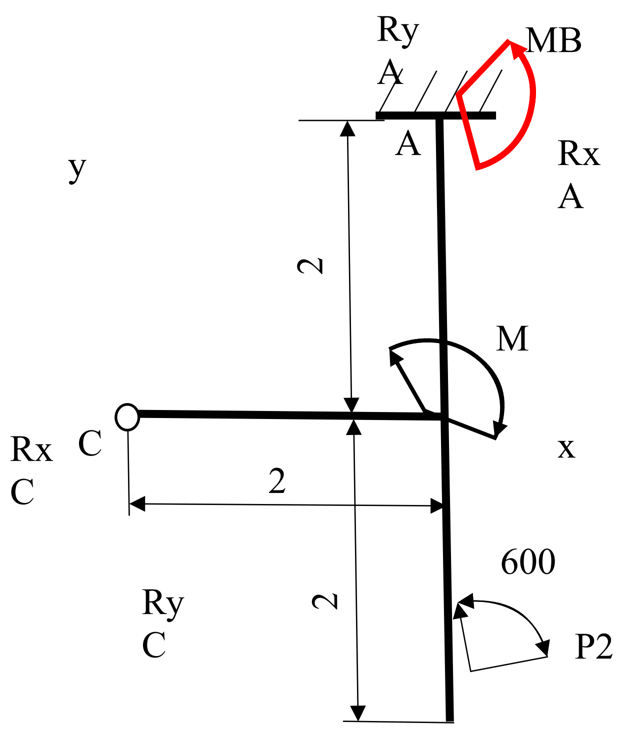


Рисунок 4.4 – Расчетная схема конструкции (правая)

Записываем условия равновесия плоской системы в аналитической форме для левой части конструкции.

$\Sigma Fxi=0$: $R_{xC}-R_B \cdot \cos60=0$ (4.5)

$\Sigma Fyi=0$: $R_{yC}-P_1+R_B\cdot\sin 60-q\cdot 2=0$ (4.6)

$\Sigma M_c(F_i)=0$: $-R_B\cdot\sin 60\cdot 2+P_1\cdot 4+q\cdot 2\cdot 1=0$ (4.7)

Из уравнения (4.7) получаем

$$R_B=(-P_1\cdot 4-q\cdot 2\cdot 1)/(2\cdot 0{,}866)=(-7\cdot 4-0{,}8\cdot 2\cdot 1)/2\cdot 0{,}866=17{,}1\ кН.$$

Из уравнения (4.6) получаем

$$R_{yC}=(-R_B\sin 60+P_1+q\cdot 2)=-17{,}1\ 0{,}866+7+0{,}8\cdot 2=-6{,}2\ кН.$$

Из уравнения (4.5) получаем

$$R_{xC}=R_B\cdot\cos 60=17{,}1\cdot 0{,}5=8{,}55\ кН.$$

Выполняем проверку:

$$\Sigma M_B(F_i)=0:$$

$$P_1\cdot 2-q\cdot 2\cdot 1+R_{yC}\cdot 2=7\cdot 2-0{,}8\cdot 2\ 1+(-6{,}2\cdot 2)=14-1{,}6-12{,}4=0.$$

Возвращаемся к решению уравнения (4.1)

$$R_{Ax}=R_B\cdot\cos 60+P_2\cdot\sin 60=17{,}1\cdot 0{,}5+16\cdot 0{,}866=22{,}406\ кН.$$

Из уравнения (4.2) получаем

$$R_{yA}=P_1-R_B\cdot sin 60+q\ 2+P_2\cdot cos 60=7-17{,}1\ 0{,}866+0{,}8\ 2+16\ 0{,}5=1{,}7914\ кН$$

Из уравнения (4.3) получаем

$$M_B=-P_1\cdot 6+R_B\cdot sin 60\cdot 4+R_B\cdot cos 60\cdot 2-q\cdot 2\cdot 3+M+P_2\cdot sin 60\cdot 4=$$
$$-7\cdot 6+17{,}1\cdot 0{,}866\cdot 4+17{,}1\cdot 0{,}5\cdot 2-0{,}8\cdot 2\cdot 3+27+16\cdot 0{,}866\cdot 4=111{,}9584\ кНм$$

Выполняем проверку:

$$\Sigma M_B(F_i)=0:$$

$$P_1\cdot 2-q\cdot 2\cdot 1-R_{xA}\cdot 2+R_{yA}\cdot 4+M_B-M-P_2\cdot cos 60\cdot 4-P_2\cdot sin 60\cdot 2=7\cdot 2-0{,}8\cdot 2-$$
$$22{,}406\cdot 2+1{,}7914\cdot 4+111{,}9584-27-16\cdot 0{,}5\cdot 4-16\cdot 0{,}866\cdot 2=0$$

Определяем величину усилия (давление) в шарнире Rc

$$RC=\sqrt{R_{xC}^2+R_{yC}^2}=\sqrt{8{,}55^2+(-6{,}2)^2}=10{,}56\,кН$$

Определяем величину усилия RА

$$RA=\sqrt{R_{xA}^2+R_{yA}^2}=\sqrt{22{,}406^2+1{,}7914^2}=22{,}47\,кН$$

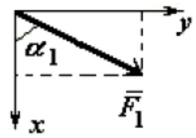
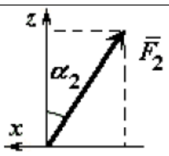
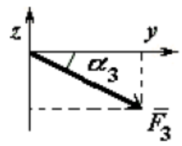
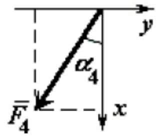
Ответ: R_c=10.56 *кН*; R_A= 22,47 *кН*; R_B=17,1 *кН*; M_B=111,9584 *кНм*.

5 Задача 5-С: Пространственная система произвольно расположенных сил

Плита весом *P*=3 *кН* со сторонами *AB=3a*, *BC=2a* закреплена в точке *A* сферическим, а в точке *B* цилиндрическим шарниром и удерживается в равновесии невесомым стержнем *CC′* (Рисунок 5.1). На плиту действует пара сил с моментом *M*=5 *кН·м*, лежащая в плоскости плиты, и две силы (номера, величины, направление и точки приложения сил приведены в таблице 5.1). Точки приложения сил *D*, *E, H* находятся на серединах сторон плиты, *a=0,8 м*.

Определить реакции связей (опорные реакции) в точках *A*, *B* и *C*.

Таблица 5.1 Направления и точки приложения сил

№ вар.	Сила								№ рис.
									
	F₁ = 4 кН		***F₂ = 6 кН***		***F₃ = 8 кН***		***F₄ = 10 кН***		
	Точка прил-я	α_1, °	Точка прил-я	α_2, °	Точка прил-я	α_3, °	Точка прил-я	α_4, °	
18	*H*	90	*D*	30	-	-	-	-	5

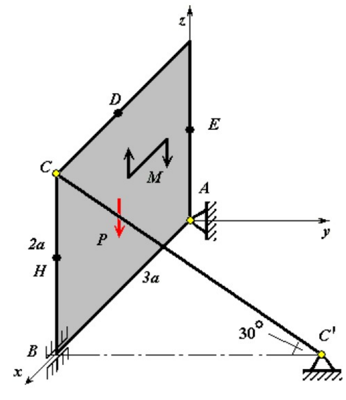


Рисунок 5.1 Схема закрепления плиты

Решение.

Выбираем правую пространственную декартовую систему координат с началом в точке *A* и составляем расчетную схему.

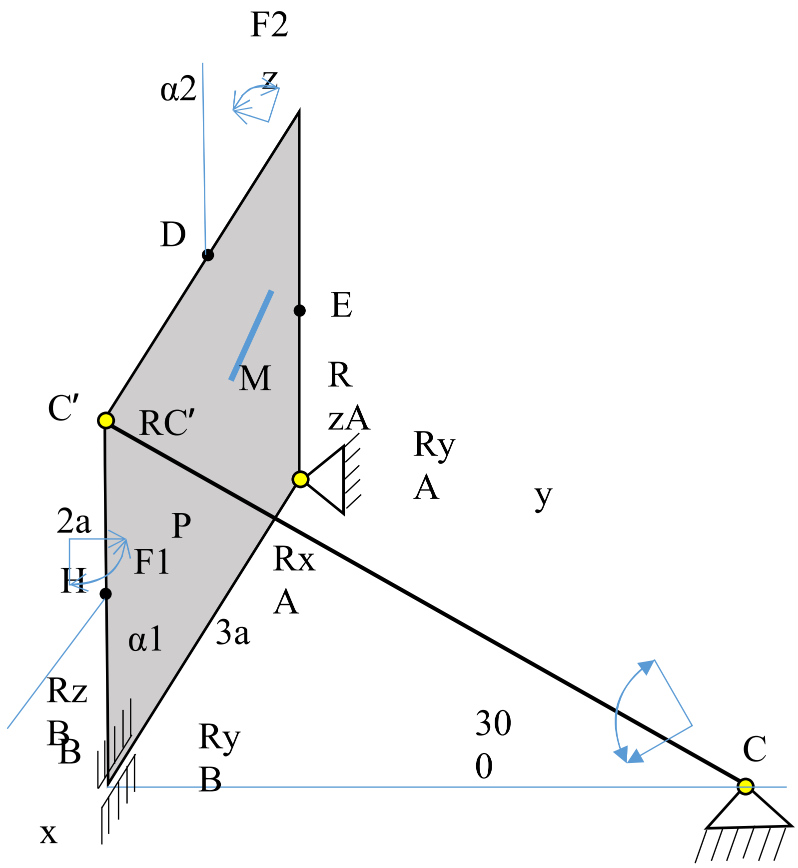
Согласно аксиоме о связях в точках *A, B* и *C* вместо связей изображаем силы реакции связей. В точке *A* сферический шарнир, поэтому неизвестную силу реакции связи R_A раскладываем на три составляющие, параллельные осям координат.

$$\overline{R_A}=\overline{R_{xA}}+\overline{R_{yA}}+\overline{R_{zA}}\ , \tag{5.1}$$

В точке B цилиндрический шарнир, поэтому неизвестную силу реакции связи R_B раскладываем на две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира.

$$\overline{R_B}=\overline{R_{yB}}+\overline{R_{zB}}\ , \tag{5.2}$$

В точке C невесомый стержень CC'. Неизвестную силу реакции стержня R_C направляем вдоль стержня.



$$\Sigma F_{xi}=0 : R_{xA}-F_2\cdot\sin\alpha_2=0 \tag{5.3}$$

$$\Sigma F_{yi}=0 : R_{yA}+R_{yB}+F_1+R_{c'}\cdot\cos 30=0 \tag{5.4}$$

$$\Sigma F_{zi}=0 : R_{zA}+R_{zB}-R_C\cdot\sin 30+F_2\cdot\cos\alpha_2-P=0 \tag{5.5}$$

$$\Sigma M_{xA}(F_i)=0 : -R_C\cdot\cos30\cdot2a-F_1\cdot a=0 \quad (5.6)$$

$$\Sigma M_{yA}(F_i)=0 : -R_{zB}\cdot3a+R_C\cdot\sin30\cdot3a-F_2\cdot\cos\alpha_2\cdot1,5a+P\cdot1,5a-M=0 \quad (5.7)$$

$$\Sigma M_{zA}(F_i)=0 : R_{yB}\cdot3a+F_1\cdot3a+R_C\cdot\cos30\cdot3a=0 \quad (5.8)$$

Решаем систему из шести уравнений.

Из уравнения (5.3) получим

$$R_{xA=}F_2\cdot\sin\alpha_2 = 6\cdot sin30=3\ кН$$

Из уравнения (5.6) получим

$$R_{C=}-F_1\cdot a/(\cos30\cdot2a) = -4\cdot0,8\ /(0,866\cdot2\cdot0,8)=2,31\ Н$$

Из уравнения (5.8) получим

$$R_{yB}=(-F_1\cdot3a-R_C\cdot\cos30\cdot3a)/3a=-F_1-R_C\cdot\cos30==-4-2,31\cdot0,866=-6,0005\ кН$$

Из уравнения (5.7) получим

$$R_{zB}=(R_C\cdot\sin30\cdot3a-F_2\cdot\cos\alpha_2\cdot1,5a+P\cdot1,5a-M)/3a=(2,31\cdot0,5\cdot3\cdot0,8-6\cdot0,866\cdot1,5\cdot0,8+$$

$$+3\cdot1,5\cdot0,8-5)/3\cdot0,8=(2,772-6,2352+3,6-5)/2,4=-2,026\ кН$$

Из уравнения (5.5) получим

$$R_{zA=}-R_{zB}+R_C\cdot\sin30-F_2\cdot\cos\alpha_2+P=2,026+\ 2,31\cdot0,5-6\cdot0,866+3=0,985\ кН$$

Из уравнения (5.4) получим

$$R_{yA}=-R_{yB}-F_1-R_{c'}\cdot cos30=\ R_{yA}=6-4-2,31\cdot0,866=\ -0,0005\ кН$$

Чтобы убедиться в правильности нахождения опорных реакций, составим проверочные уравнения. Для этого перенесем начало нашей системы координат в точку, где приложен вес плиты.

$\Sigma M_{yP}(Fi)=0$:

$R_{zA}\cdot1,5a-R_{zB}\cdot1,5a+R_c\cdot\sin30\cdot1,5a-M=0,985\cdot1,5\cdot0,8+2,026\cdot1,5\cdot0,8+2,31\cdot0,5\cdot1,5\cdot0,8-5=$
$=0,0008\approx0$

Полученная цифра в четвертом знаке после запятой могла получиться потому, что в процессе расчета полученные значения округлялись.

Поэтому можно сделать вывод что проверка сошлась.

$\Sigma M_{zP}(F_i)=0$:

$-R_{yA}\cdot 1{,}5a+R_{yB}\cdot 1{,}5a+F_1\cdot 1{,}5a+R_C\cdot \cos 30\cdot 1{,}5a=0{,}0005\cdot 1{,}5\cdot 0{,}8+(-6{,}0005)\cdot 1{,}5\cdot 0{,}8+$

$+4\cdot 1{,}5\cdot 0{,}8+2{,}31\cdot 0{,}866\cdot 1{,}5\cdot 0{,}8=-0{,}0004\approx 0$

Проверка сошлась.

Определяем величину и направление реакции связи R_A

$$R\,A=\sqrt{R_{xA}^2+R_{yA}^2+R_{zA}^2}=\sqrt{3^2+(-0.0005)^2+0.985^2}=3.16\,кН$$

$\cos\alpha=R_{xA}/R_A=3/3{,}16=-0{,}949 \Rightarrow \alpha=18{,}3°$

$\cos\beta=R_{yA}/R_A=-0{,}0005/3{,}16=-0{,}00015 \Rightarrow \beta=90{,}01°$

$\cos\gamma=R_{zA}/R_A=0{,}985/3{,}16=0{,}312 \Rightarrow \gamma=71{,}84°$

Определяем величину и направление реакции связи R_B

$$R\,B=\sqrt{R_{yB}^2+R_{zB}^2}=\sqrt{(-6.0005)^2+(-2{,}026)^2}=6{,}33\,кН$$

$\cos\beta=R_{yB}/R_B=-6{,}0005/6{,}33=-0{,}9479 \Rightarrow \beta=161{,}43°$

$\cos\gamma=R_{zB}/R_B=-2{,}026/6{,}33=-0{,}32 \Rightarrow \gamma=108{,}67°$

Ответ: R_A = 3,16 *kH*, R_B = 6,33 *kH*, R_C = 2,31 *kH*.

						Лис
					19	
Изм.	Лис	№ докум.	Подпись	Дат		

6 Задача 6-К: Кинематический анализ плоского механизма

Плоский механизм состоит из стержней 1 – 4 и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами (рис. 6.1). Длины стержней равны: $l_1=0,4$ *м*, $l_2=1,2$ *м*, $l_3=1,4$ *м*, $l_4=0,8$ *м*. Положение механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$ (см. таблицу 6.1). Точка *D* находится в середине соответствующего стержня.

Определить величины указанные в таблице 6.1 в столбце «Найти».

Таблица 6.1.

№ вар.	Углы					Дано			Найти	№ рис.
	α,°	β,°	γ,°	φ,°	θ,°	ω_1, с-1	ω_4, с-1	υ_B, *м/с*		
18	60	60	60	90	120	-	3	-	v_A , v_D, ω_3	5

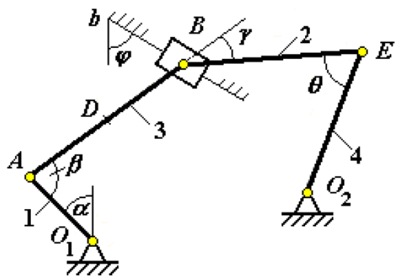


Рисунок 6.1 – Схема плоского механизма

7 Задача 7-К: Сложное движение материальной точки

Условие: Пластина (рисунок 7.1) вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω, заданной в таблице 7.1 (при знаке минус направление ω противоположно показанному на рисунке). Ось вращения OO_1, лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой *BD* движется точка *M*. Закон ее относительного движения задается уравнением $S = AM = f(t)$, (S – в сантиметрах, t – в секундах), приведенным в таблице 6.1. На всех рисунках точка *M* показана в положении, при котором $S = AM > 0$ (при $S < 0$ точка *M* находится по другую сторону от точки *A*).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент времени $t_1 = 1$ *с*.

Таблица 7.1

№ вар.	ω, *с-1*	*a*, *см*	$S = AM = f(t)$, *см*	№ рис.
18	4	20	$60\cdot(t^3 - 2t^2)$	5

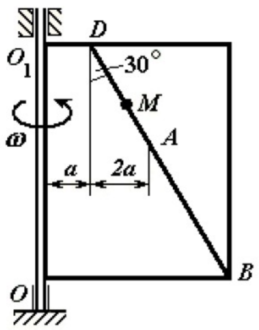


Рис. 5

Рисунок 7.1 – Вращающаяся пластина

Решение. Рассмотрим движение точки *M* как сложное: относительное движение – поступательное движение точки *M* вдоль прямой *BD*, переносное движение – вращательное движение точки *M* вместе с пластиной вокруг неподвижной оси OO_1. Тогда абсолютная скорость и абсолютное ускорение точки найдутся по формулам:

$$\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}, \tag{7.1}$$

$$\vec{a} = a_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}, \tag{7.2}$$

или в развернутом виде

$$\boxed{a = a_{отн}^{\tau} + a_{отн}^{n} + a_{пер}^{\tau} + a_{пер}^{n} + a_{кор}}. \tag{7.3}$$

Определим положение точки *M* на прямой .

$$S = AM = f(t) = 60 \cdot (t^3 - 2t^2), \tag{7.4}$$

Для этого подставим в уравнение (7.4) относительного движения точки время t=1с. подучим

$$MS_{t=1} = AM = 60 \cdot (1^3 - 2 \cdot 1^2) = -60\ см.$$

Так как $S < 0$, то точка *M* находится по другую сторону от точки *A*. в области отрицательных значений на отрезке AB. Выполняем рисунок с необходимыми построениями.

Рассмотрим относительное движение точки *M*.

Чтобы найти относительную скорость точки М необходимо продифференцировать перемещение по времени. Для этого возьмем первую производную выражения (7.4).

Получим

$$v_{отн} = dS/dt = (60 \cdot (t^3 - 2t^2))' = 60 \cdot (3t^2 - 4t),$$

При $t = 1\ с$ получаем

$$v_{отн} = 60 \cdot (3t^2 - 4t) = 60 \cdot (3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1) = -60\ см/с,$$

Знак минус говорит о том, что вектор относительной скорости направляем от точки М к точке В. В область отрицательных значений S. Проверить правильность выбора направления скорости можно, подставив в формулу пути другое время, например $t = 1{,}1\ с$:

$$S_{t=1{,}1} = AM = 60 \cdot (t^3 - 2t^2) = 60 \cdot (1{,}1^3 - 2 \cdot 1{,}1^2) = -65{,}34\ см.$$

Модуль относительной скорости $v_{отн} = |\vec{v}_{отн}| = 60$ см/с.

					22	Лис
Изм.	Лис	№ докум.	Подпись	Дат		

Модуль относительного касательного ускорения $a^{\tau}_{отн} = |\vec{a}^{\tau}_{отн}|$, где

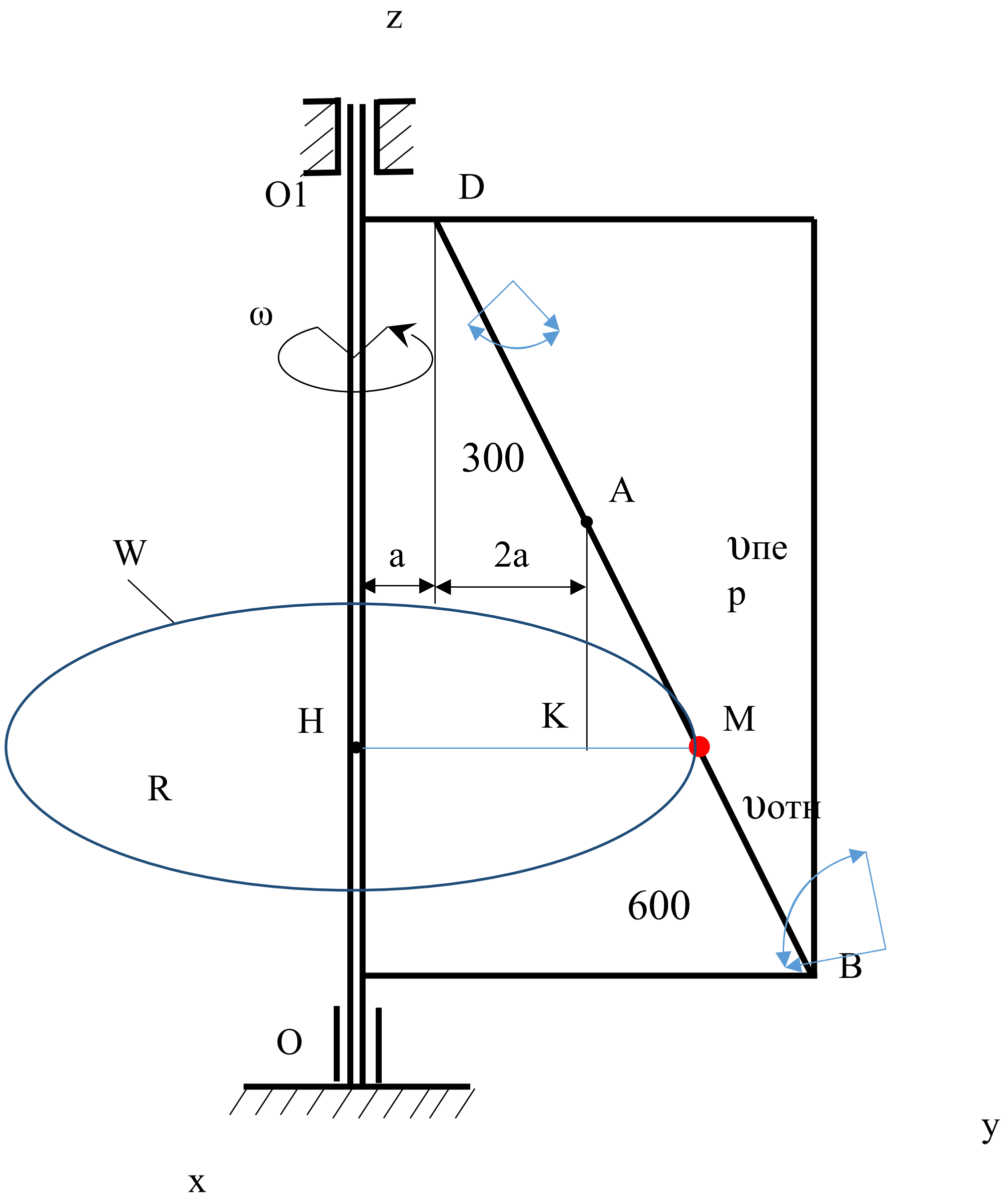


Рисунок 7.2 – Расчетная схема

$$a^{\tau}_{отн} = \frac{d^2 t}{dt^2} = ¿\ (60\cdot(t^3-2t^2))'' = 60\cdot(6t-4).$$

При $t = 1$ *с* получаем

$$a^{\tau}_{отн} = 60\cdot(6t-4) = 60\cdot(6\cdot1-4) = 120\ см/с^2.$$

Значит $a^{\tau}_{отн} = 120$ см/с^2.

Вектор $a^{\tau}_{отн}$ направлен в сторону положительных значений, т.к. знаки скорости и ускорения разные, следовательно, относительное движение точки М замедленное.

Относительное нормальное ускорение $\vec{a}^{n}_{отн} = \frac{v^2_{отн}}{\rho} = 0$, так как траектория относительного движения – прямая линия ($\rho = \infty$).

Определяем переносную скорость v_e. Для этого считаем, что точка М жестко связана с пластиной, а пластина совершает заданное движение. То есть пластина вращается вокруг оси OO_1.

Из точки М опустим перпендикуляр НМ на ось OO_1.

При переносном движении точка М движется по окружности W (hbceyjr 7/2) радиуса R=HM с центром в точке Н.

$R = HM = HK + KM = 3a + |AM| \sin 30° = 60 + 60 \cdot 0{,}5 = 90$ *см*;

Переносное движение:

Переносная скорость точки М перпендикулярна отрезку НМ и равна:

$$v_{пер} = \omega \cdot R = 4 \cdot 90 = 360 \text{ см/с}$$

Вектор $v_{пер}$ направлен по касательной к окружности в сторону вращения.

Модуль переносного вращательного ускорения $a^{\tau}_{пер} = R \cdot \varepsilon$, где $\varepsilon = |\vec{\varepsilon}|$ - модуль углового ускорения тела.

Так как $\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} = 0$, то $\varepsilon = 0$ так как $\omega = const$ и $a^{\tau}_{пер} = 0$

Модуль переносного центростремительного ускорения

$$a^{n}_{пер} = R \cdot \omega^2 = 90 \cdot 4^2 = 1440 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}^{n}_{пер}$ направлен от точки *М* к точке *Н* на оси OO_1.

Кориолисово ускорение.

$$\overrightarrow{a_{кор}} = 2\vec{\omega} \times \overrightarrow{\vartheta_{отн}}$$

Направление вектора $\vec{a}_{кор}$ определим по правилу Н. Е. Жуковского: надо спроецировать вектор относительной скорости $\vec{v}_{отн}$ (рисунок 7.3) точки на плоскость (представлена окружностью W), перпендикулярную вектору угловой скорости переносного вращательного движения, и повернуть полученную проекцию в этой плоскости на 90° в направлении переносного вращения.

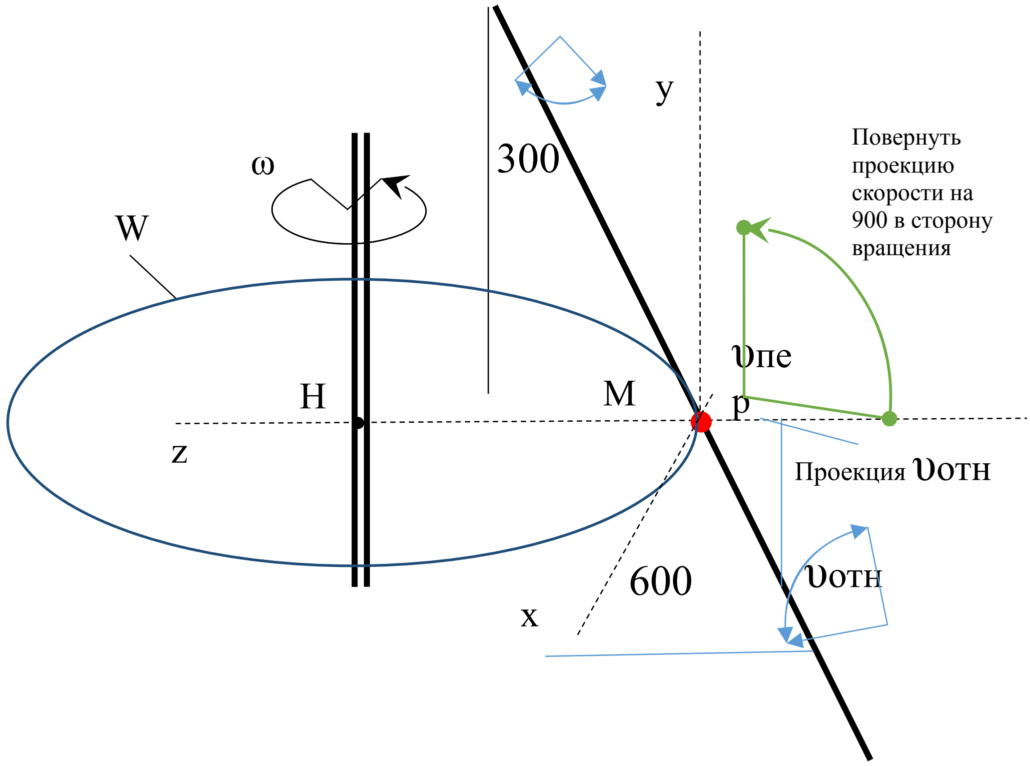


Рисунок 7.3 – Схема определения направления ускорения

Модуль кориолисова ускорения

$$a_{кор}=2\,\omega\cdot v_{отн}\cdot\sin\left(\omega,\vec{v}_{отн}\right),$$

где $\sin(\vec{\omega},\vec{\vartheta}_{отн})=150^0=0,5$.

Так как ω=4 рад/с, а $\vartheta_{отн}$ =60 см/с, то $a_{кор}=2\cdot4\cdot60\cdot0,5=240$ (см/с^2).

Вектор направлен в соответствии с правилом векторного произведения.

Определяем абсолютную скорость $\overline{v_M}$. Абсолютная скорость точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vartheta=\sqrt{\vartheta_{отн}^2+\vartheta_{пер}^2}=\sqrt{60^2+360^2}=365 \text{ см/с}$$

Абсолютное ускорение.

Модуль абсолютного ускорения находим методом проекций:

$$a_x=-a_{кор}=-240\ см/с^2$$

$$a_y=a_{отн}^{\tau}\cdot\cos30°=120\cdot0{,}866=103,92\ \text{см/с}^2$$

$$a_z = a_{пер}^n + a_{отн}^\tau \cdot \sin 30° = 1440 + 120 \cdot 0,5 = 1500 \text{ см/с}^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-240)^2 + 103,92^2 + 1500^2} = 1523 \text{ см/с}^2$$

Ответ: $v = 365$ *см/с* ; a=1523 *см/с²*

						Лис
					26	
Изм.	Лис	№ докум.	Подпись	Дат		