Тема 2.4. Нормальное распределение

Задача 9.1

Случайная величина *X* имеет плотность распределения вероятностей ***f(x)*.**

Найти:

а) *M(X)* и *D(X)*;

б) вероятность того, что *X* примет значение меньше α;

в) вероятность того, что *X* примет значение больше β;

г) вероятность того, что *X* примет значение в интервале (α; β);

д) вероятность того, что абсолютная величина отклонения *X* от математического ожидания не превысит δ.

α=1,5, β=3,5, δ=2,5, *f(x)*= $1/\sqrt{8}\pi\ e\hat{}(-(x-2)^2/8)$

Решение:

Для данной случайной величины X с плотностью распределения вероятностей $f(x) = 1/\sqrt{8}\pi\ e\hat{}(-(x-2)^2/8)$ можно применить нормальное распределение, так как она имеет нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$, где μ - математическое ожидание, а σ^2 - дисперсия.

а) Математическое ожидание M(X) равно $\mu = E(X) = \int xf(x)dx$, где интегрирование проводится от -бесконечности до +бесконечности.
Дисперсия D(X) равна $\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \int(x-\mu)^2f(x)dx$.

Вычислим математическое ожидание и дисперсию:

$\mu = E(X) = \int xf(x)dx = \int x * 1/\sqrt{8}\pi\ e\hat{}(-(x-2)^2/8)dx = 2$

$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \int(x-2)^2 * 1/\sqrt{8}\pi\ e\hat{}(-(x-2)^2/8)dx = 2$

Ответ: M(X) = 2, D(X) = 2.

б) Вероятность того, что X примет значение меньше α, равна $P(X<\alpha) = P(Z<(\alpha-\mu)/\sigma)$, где Z - стандартная нормальная случайная величина.

$P(X<1.5) = P(Z<(1.5-2)/\sqrt{2}) = P(Z<-0.354) = 0.363$

Ответ: $P(X<\alpha) = 0.363$.

в) Вероятность того, что X примет значение больше β, равна $P(X>\beta) = P(Z>(\beta-\mu)/\sigma)$, где Z - стандартная нормальная случайная величина.

$P(X>3.5) = P(Z>(3.5-2)/\sqrt{2}) = P(Z>0.854) = 0.197$

Ответ: $P(X>\beta) = 0.197$.

г) Вероятность того, что X примет значение в интервале (α,β), равна $P(\alpha<X<\beta) = P((\alpha-\mu)/\sigma<Z<(\beta-\mu)/\sigma)$, где Z - стандартная нормальная случайная величина.

$P(1.5<X<3.5) = P((-0.354<Z<0.854) = P(Z<0.854) - P(Z<-0.354) = 0.197 - 0.363 = -0.166$

Ответ: $P(\alpha<X<\beta) = -0.166$.

д) Вероятность того, что абсолютная величина отклонения X от математического ожидания не превысит δ, равна $P(|X-\mu|\leq\delta) = P(|Z|\leq\delta/\sigma)$, где Z - стандартная нормальная случайная величина.

$P(|X-2|\leq 2.5) = P(|Z|\leq 2.5/\sqrt{2}) = P(|Z|\leq 1.768) = 0.928$

Ответ: $P(|X-\mu|\leq\delta) = 0.928$.

Задача 9.2

Рост девочек в возрасте от 15 до 20 лет есть нормально распределённая случайная величина *X* с параметрами ***a*** см и **σ.** Какую долю платьев для девочек, имеющих рост от **α** до **β** см, нужно предусмотреть в объёме производства для данной возрастной группы. ***a=159,* σ=2, α=158, β=162**

Решение:

Рост девочек имеет нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$, где μ = a и $\sigma = 2$, а α и β - границы интервала роста. Нам нужно найти вероятность $P(\alpha \leq X \leq \beta)$, т.е. вероятность того, что рост девочек будет в интервале от α до β.

$P(\alpha \leq X \leq \beta) = P((\alpha - \mu)/\sigma \leq (X - \mu)/\sigma \leq (\beta - \mu)/\sigma) = P((-0.5) \leq Z \leq 1.5)$, где Z - стандартная нормальная случайная величина.

Вычислим эту вероятность по таблице значений функции Лапласа или с помощью калькулятора:

$P(-0.5 \leq Z \leq 1.5) \approx 0.7745 - 0.3085 = 0.466$

Ответ: Доля платьев для девочек, имеющих рост от α до β см, равна 0.466 или 46.6%.