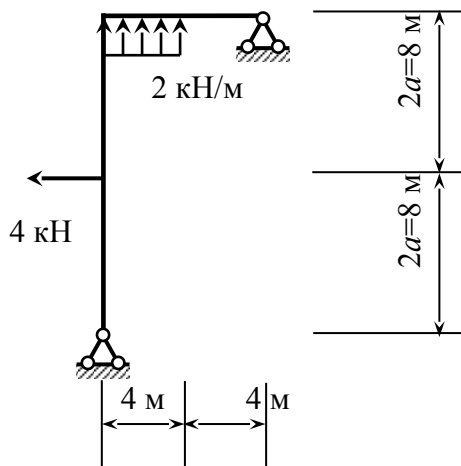


## Задача №1

### Расчет статически неопределимой рамы методом сил



Дано:

$a$ , (м)	$P$ , (кН)	$q$ , (кН/м)	схема
4,0	4,0	2,0	1

**Задание:**

1. Провести кинематический анализ и выявить степень статической неопределимости рамы.
2. Выбрать основную систему.
3. Записать каноническое уравнение.
4. Подсчитать коэффициенты канонического уравнения. Для этого в грузовом и единичном состоянии построить эпюры моментов. Жёсткость всех участков считать одинаковой.
5. Из канонического уравнения определить неизвестную реакцию.
6. Построить окончательную эпюру моментов.
7. Провести кинематическую проверку (допустимая погрешность вычислений не более 5%).
8. Построить эпюры  $Q$ ,  $N$  методом сечений.
9. Выполнить статическую проверку: проверить равновесие узлов рамы.

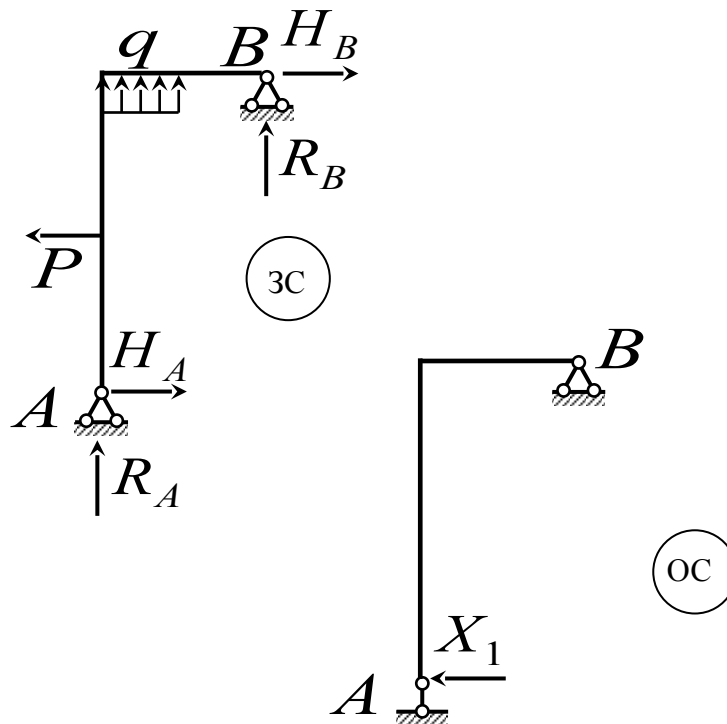
**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** изучить метод сил и приобрести практические навыки расчета статически неопределимых рам. Приобрести практические навыки в определении степени статической неопределимости системы, в выборе основной системы, грузового и единичного состояний, и умений в построении эпюр в рамах и определении коэффициентов канонического уравнения.

**Решение:**

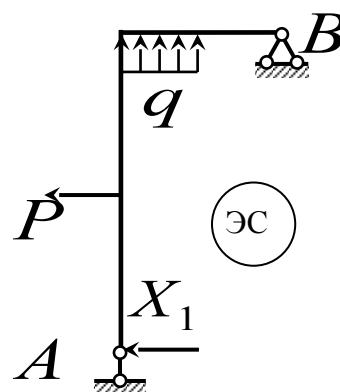
1. Определение степени статической неопределимости.

При заданных условиях опирания неизвестными являются четыре опорные реакции ( $R_A, H_A, R_B, H_B$ ). Для плоской системы сил можно составить три уравнения статического равновесия ( $\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_i = 0$ ),  $n = 4 - 3 = 1$ , следовательно, рама один раз статически неопределима.

2. Отбросим «лишние» связи и превратим заданную систему в статически определимую, т.е. получим основную систему (ОС).

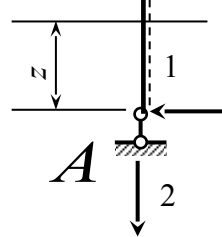


Вместо отброшенной связи вводим силовой фактор  $X_1$ . Загружаем раму внешней нагрузкой, получаем эквивалентную систему.



3. Так как система один раз статически неопределима, то требуется составить дополнительно одно каноническое уравнение  $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$ , где  $\delta_{11}$  – перемещение от единичной силы;  $\Delta_{1P}$  – перемещение от внешней нагрузки.

4. Строим эпюру изгибающих моментов от единичной силы, предварительно определив значения опорных реакций.



К основной системе (ОС) прикладываем единичную силу  $X_1 = 1$  (в месте и направлении отброшенной связи).

$$\sum F_x = 0; -X_1 + H_B = 0; H_B = X_1 = 1,0.$$

$$\sum F_y = 0; -R_A + R_B = 0.$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 8,0 + X_1 \cdot 16,0 = 0;$$

$$R_A = \frac{X_1 \cdot 16,0}{8,0} = \frac{1,0 \cdot 16,0}{8,0} = 2,0;$$

Из  $\sum F_y = 0$  получим:  $R_A = R_B = 2,0$ .

Разбиваем раму на два участка и составляем уравнение изгибающих моментов для каждого из них. Эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_1$  строим со стороны растянутых волокон.

1-й участок:  $0 \leq z \leq 4a = 16,0$  м

$$\bar{M}_1 = X_1 \cdot z;$$

$$z = 0 \quad \bar{M}_1 = 0;$$

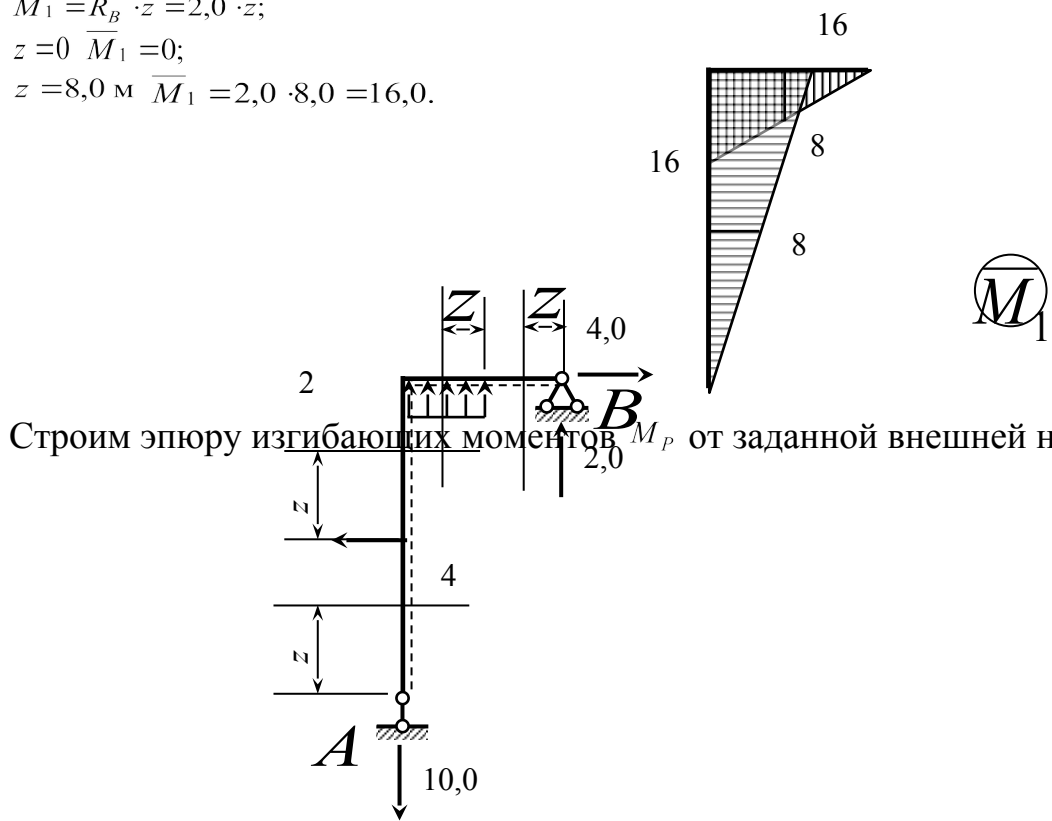
$$z = 16,0 \text{ м} \quad \bar{M}_1 = 1,0 \cdot 16,0 = 16,0.$$

2-й участок:  $0 \leq z \leq 2a = 8,0$  м

$$\bar{M}_1 = R_B \cdot z = 2,0 \cdot z;$$

$$z = 0 \quad \bar{M}_1 = 0;$$

$$z = 8,0 \text{ м} \quad \bar{M}_1 = 2,0 \cdot 8,0 = 16,0.$$



Строим эпюру изгибающих моментов  $M_p$  от заданной внешней нагрузки.

Определим опорные реакции от внешней нагрузки:

$$\sum F_x = 0; H_B - P = 0; H_B = P = 4,0 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; - R_A \cdot 8,0 + q \cdot 4,0 \cdot \left( \frac{4,0}{2} + 4,0 \right) + P \cdot 8,0 = 0;$$

$$R_A = \frac{2,0 \cdot 4,0 \cdot \left( \frac{4,0}{2} + 4,0 \right) + 4,0 \cdot 8,0}{8,0} = \frac{2,0 \cdot 4,0 \cdot 6,0 + 4,0 \cdot 8,0}{8,0} = 10,0 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = 0; - R_A + R_B + q \cdot 4,0 = 0;$$

$$\text{Из } \sum F_y = 0; R_B = R_A - q \cdot 4,0 = 10,0 - 2,0 \cdot 4,0 = 2,0 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum M_A = 0; - R_B \cdot 8,0 - P \cdot 8,0 - q \cdot 4,0 \cdot \frac{4,0}{2} + H_B \cdot 16,0 = 0;$$

$$- 2,0 \cdot 8,0 - 4,0 \cdot 8,0 - 2,0 \cdot 4,0 \cdot 2,0 + 4,0 \cdot 16,0 = 0;$$

$$- 16,0 - 32,0 - 16,0 + 64,0 = 0; - 64,0 + 64,0 = 0.$$

Реакции вычислены верно.

Построим эпюру по участкам, записав выражения изгибающих моментов на каждом из них:

$$\text{1-й участок: } 0 \leq z \leq 2a = 8,0 \text{ м}$$

$$M_p = 0;$$

$$\text{2-й участок: } 0 \leq z \leq 2a = 8,0 \text{ м}$$

$$M_x'' = P \cdot z = 4,0 \cdot z;$$

$$z = 0 \quad M_p = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z = 8,0 \text{ м} \quad M_p = 4,0 \cdot 8,0 = 32,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{3-й участок: } 0 \leq z \leq a = 4,0 \text{ м}$$

$$M_p = R_B \cdot z = 2,0 \cdot z;$$

$$z = 0 \quad M_p = 2,0 \cdot 0 = 0;$$

$$z = 4,0 \text{ м} \quad M_p = 2,0 \cdot 4,0 = 8,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

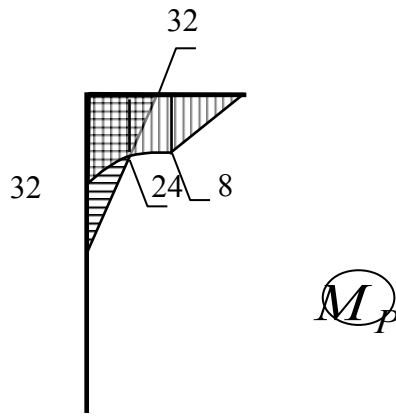
$$\text{4-й участок: } 0 \leq z \leq a = 4,0 \text{ м}$$

$$M_p = R_B \cdot (4,0 + z) + q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = 2,0 \cdot (4,0 + z) + 2,0 \cdot z \cdot \frac{z}{2} = 8,0 + 2,0 \cdot z + z^2;$$

$$z = 0 \quad M_p = 8,0 + 2,0 \cdot 0 + 0^2 = 8,0;$$

$$z = 2,0 \text{ м} \quad M_p = 8,0 + 2,0 \cdot 2,0 + 2,0^2 = 24,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z = 4,0 \text{ м} \quad M_p = 8,0 + 2,0 \cdot 4,0 + 4,0^2 = 32,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



Определим перемещение от единичной силы и перемещение от внешней нагрузки.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 16,0 \cdot 16,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16,0 \right) + \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 16,0 \cdot 8,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16,0 \right) =$$

$$= \frac{1365,333 + 682,667}{EJ} = \frac{2048,0}{EJ}.$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot 32,0 \cdot 8,0 \cdot \left\{ \frac{2}{3} \cdot 16,0 + \frac{1}{3} \cdot 8,0 \right\} + \frac{1}{2} \cdot 8,0 \cdot 4,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,0 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot 8,0 \cdot 4,0 \cdot \left\{ \frac{2}{3} \cdot 8,0 + \frac{1}{3} \cdot 16,0 \right\} + \frac{1}{2} \cdot 32,0 \cdot 4,0 \cdot \left\{ \frac{2}{3} \cdot 32,0 \right. \right.$$

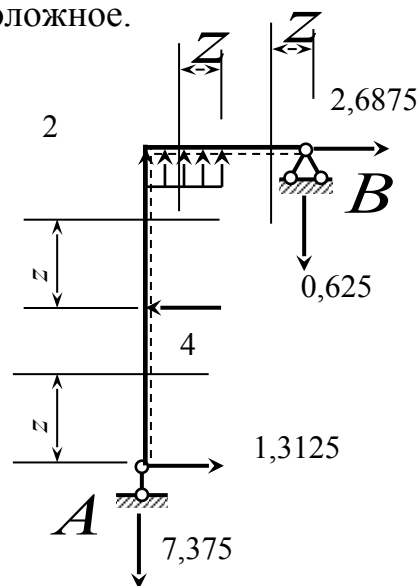
$$\left. - \frac{2,0 \cdot 4,0^3}{12} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot 8,0 + \frac{1}{2} \cdot 16,0 \right\} \right]$$

$$= \frac{1706,6667 + 85,3333 + 170,6667 + 853,3333 - 128,0}{EJ} = \frac{2688,0}{EJ}$$

8. Решаем каноническое уравнение:  $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$ ;

$$\frac{2048,0}{EJ} \cdot X_1 + \frac{2688,0}{EJ} = 0; X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{2688,0}{2048,0} = -1,3125 \text{ кН.}$$

Строим окончательно эквивалентную систему и определяем значения опорных реакций, направляя реакции в соответствии со знаками. Так как значение реакции в отброшенной связи получилось отрицательным, меняем направление на противоположное.



$$\sum F_x = 0; H_B - P + X_1 = 0; H_B = P - X_1 = 4,0 - 1,3125 = 2,6875 \text{ кН;}$$

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 8,0 - q \cdot 4,0 \cdot \frac{4,0}{2} + H_B \cdot 16,0 - P \cdot 8,0 = 0;$$

$$R_B = \frac{q \cdot 4,0 \cdot \frac{4,0}{2} - H_B \cdot 16,0 + P \cdot 8,0}{8,0} =$$

$$= \frac{2,0 \cdot 4,0 \cdot 2,0 - 2,6875 \cdot 16,0 + 4,0 \cdot 8,0}{8,0} = 0,625 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = 0; -R_A - R_B + q \cdot 4,0 = 0;$$

$$\text{Из } \sum F_y = 0; R_A = -R_B + q \cdot 4,0 = -0,625 + 2,0 \cdot 4,0 = 7,375 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 8,0 + P \cdot 8,0 + q \cdot 4,0 \cdot \left( \frac{4,0}{2} + 4,0 \right) - X_1 \cdot 16,0 = 0;$$

$$- 7,375 \cdot 8,0 + 4,0 \cdot 8,0 + 2,0 \cdot 4,0 \cdot \left( \frac{4,0}{2} + 4,0 \right) - 1,3125 \cdot 16,0 = 0;$$

$$- 59,0 + 32,0 + 48,0 - 21,0 = 0; - 80,0 + 80,0 = 0.$$

Реакции вычислены верно.

6. Строим окончательную эпюру изгибающих моментов  $M$ . Для этого складываем грузовую эпюру с исправленной единичной.

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + M_p.$$

7. Выполним кинематическую проверку правильности решения задачи.

$$\Delta = \int \frac{M \cdot \bar{M}_1}{EJ} dz = 0$$

$$\Delta = \int \frac{M \cdot \bar{M}_1}{EJ} dz = - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{10,5 \cdot 8,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,0 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{10,5 \cdot 8,0}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 8,0 + \frac{1}{3} \cdot 16,0 \right) +$$

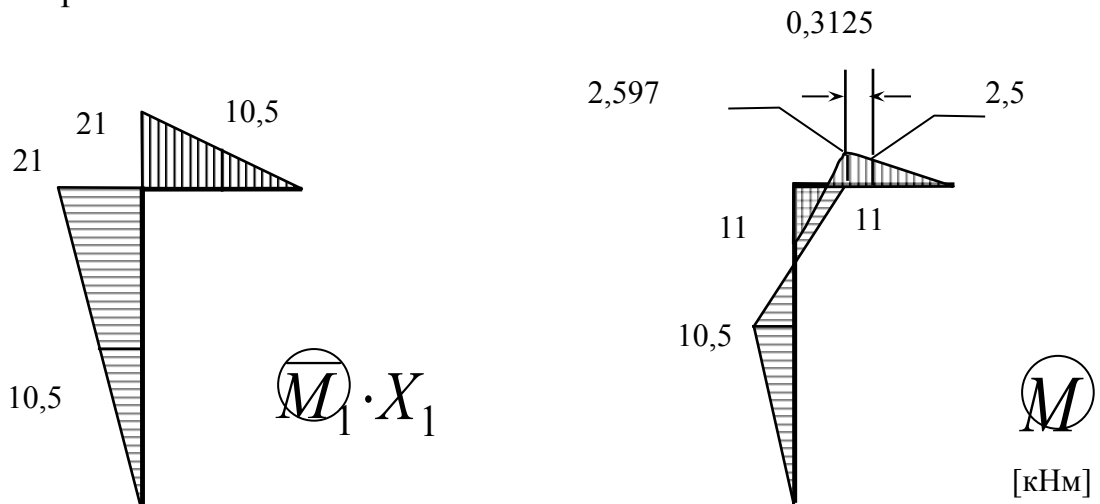
$$+ \frac{1}{EJ} \cdot \frac{11,0 \cdot 8,0}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 16,0 + \frac{1}{3} \cdot 8,0 \right) + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{11,0 \cdot 4,0}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 16,0 + \frac{1}{3} \cdot 8,0 \right) -$$

$$- \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2,0 \cdot 4,0^3}{12} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 16,0 + \frac{1}{2} \cdot 8,0 \right) - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2,5 \cdot 4,0}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 8,0 + \frac{1}{3} \cdot 16,0 \right) -$$

$$- \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2,5 \cdot 4,0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,0 = \frac{- 224,0 - 448,0 + 586,667 + 293,333 - 128,0 - 53,333 - 26,667}{EJ} =$$

$$= \frac{- 880,0 + 880,0}{EJ} = 0.$$

Расчёт верен.



8. Построение эпюр  $Q$  и  $N$  методом сечений.

а) эпюра поперечных сил (эп.  $Q$ ).

1-й участок:

$$0 \leq z \leq 2a = 8,0 \text{ м}$$

$$Q = -X_1 = -1,3125 \text{ кН.}$$

2-й участок:

$$0 \leq z \leq 2a = 8,0 \text{ м}$$

$$Q = -X_1 + P = -1,3125 + 4,0 = -2,6875 \text{ кН.}$$

3-й участок:

$$0 \leq z \leq a = 4,0 \text{ м}$$

$$Q = R_B = 0,625 \text{ кН.}$$

4-й участок:

$$0 \leq z \leq a = 4,0 \text{ м}$$

$$Q = R_B - q \cdot z = 0,625 - 2,0 \cdot z;$$

$$z = 0 \quad Q = 0,625 \text{ кН;}$$

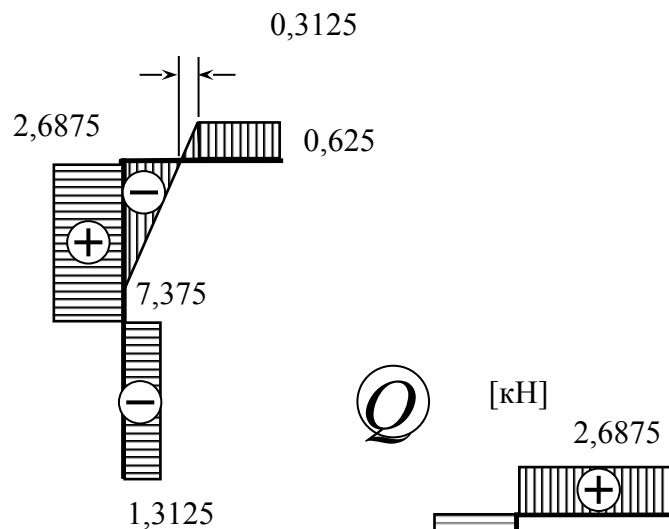
$$z = 4,0 \text{ м} \quad Q = 0,625 - 2,0 \cdot 4,0 = -7,375 \text{ кН.}$$

Определим вершину параболы:

$$0,625 - 2,0 \cdot z = 0; \quad z_{\max} = \frac{0,625}{2,0} = 0,3125 \text{ м.}$$

Вычислим экстремальное значение момента изгибающего:

$$M_{\text{ext}} = -0,625 \cdot (4,0 + 0,3125) + 2,0 \cdot 0,3125^2 = -2,5 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$



б) эпюра продольных сил (эпюра  $N$ )

1-й участок:

$$0 \leq z \leq 2a = 8,0 \text{ м}$$

$$N = R_A = 7,375 \text{ кН.}$$



2-й участок:

$$0 \leq z \leq 2a = 8,0 \text{ м}$$

$$N = R_A = 7,375 \text{ кН.}$$

3-й участок:

$$0 \leq z \leq a = 4,0 \text{ м}$$

$$N = H_B = 2,6875 \text{ кН.}$$

4-й участок:

$$0 \leq z \leq a = 4,0 \text{ м}$$

$$N = H_B = 2,6875 \text{ кН.}$$

9.) Выполним статическую проверку: проверим равновесие вырезанного из рамы узла С.

$$\sum F_x = 0; - 2,6875 + 2,6875 = 0;$$

$$\sum F_y = 0; 7,375 - 7,375 = 0;$$

$$\sum M_C = 0; 11,0 - 11,0 = 0.$$

Узел в равновесии.

Задача решена верно.