Задача 1

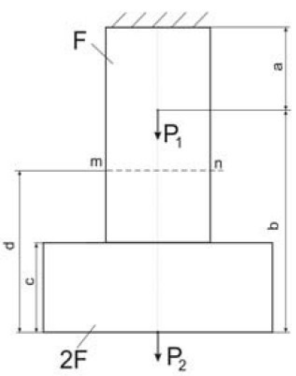
Для ступенчатого стального стержня находящегося под воздействием заданных внешних сил

1. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений по длине стержня.

2. Определить перемещение свободного конца стержня и сечения m-n, приняв E= $2 \cdot 10^5$ МПа.

3. Определить запас прочности стержня, приняв σ_T =240 МПа.

Примечание: если запас прочности стержня получится меньше единицы, то необходимо подобрать новую площадь поперечного сечения при [σ]=160 МПа.



1

P_1 (кН)	P_2 (кН)	F (см^2)	a (м)	b (м)	c (м)	d (м)
20	65	12	4,8	8	2,6	6

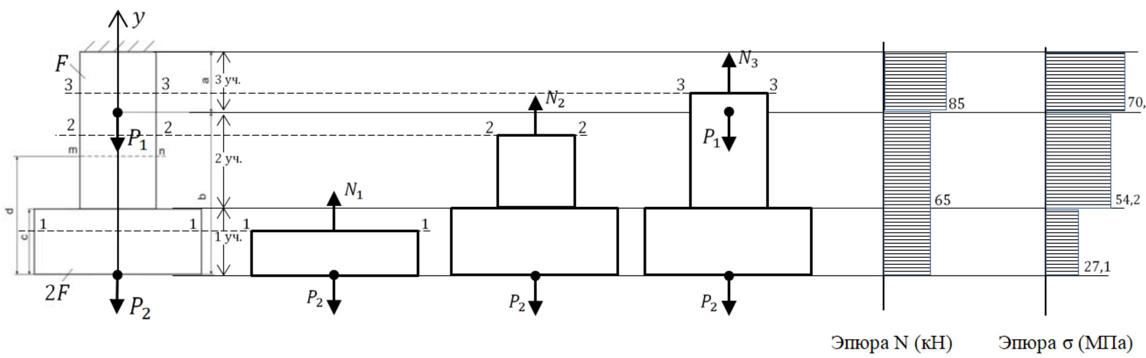
Решение:

1. Построение эпюры продольных сил

Определяем продольные силы на каждом участке, используя метод сечений. Мысленно разбиваем стержень на участки. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы, и место изменения размеров поперечного сечения и т.д. Таким образом, заданный стержень имеет три участка.

Чтобы не определять в заданной схеме опорную реакцию – реакцию заделки, расчет будем вести от свободного края к заделке. Величина продольной силы у заделки даст величину и направление реакции. Характерные сечения разбивают стержень на три участка. В нашем случае, применяя метод сечений, будем оставлять нижнюю и отбрасывать верхнюю отсеченную часть стержня.

При построении эпюры (графика) распределения продольных сил N проводим ось ординат графика параллельно оси стержня, откладываем в произвольно выбранном масштабе значения продольных сил по оси абсцисс.



На основании метода сечений продольная сила в любом сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций сил (активных и реактивных) на продольную ось стержня, действующих на оставленную часть.

При суммировании силы, направленные от сечения и вызывающие деформацию растяжения, берутся со знаком плюс, а направленные к сечению (сжатие) – со знаком минус.

Суммируя внешние силы со стороны свободного конца стержня, определим продольные силы на каждом участке:

Проведем произвольное сечение 1 – 1 на 1-м участке, отбрасываем верхнюю часть до сечения, изображаем продольную силу в сечении (вдоль оси стержня) и составляем уравнение равновесия оставленной части:

$$\sum y = N_1 - P_2 = 0 \rightarrow N_1 = P_2 = 65\,кН.$$

Для построения эпюры нормальных напряжений воспользуемся формулой:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

где N – продольная сила на участке, Н;

A – площадь поперечного сечения на участке, м^2.

Тогда для первого участка:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{2F}=\frac{65\cdot10^3}{2\cdot12\cdot10^{-4}}=27,1\cdot10^6\,Па=27,1\,МПа.$$

На втором участке, уравнение статики для данной системы сил имеет вид:

$$\sum Y=N_2-P_2=0\rightarrow N_2=P_2=65\,кН.$$

На втором участке также происходит деформация растяжения.

Определяем нормальные напряжения, возникающие в стержне на втором участке:

$$\sigma_2=\frac{N_2}{F}=\frac{65\cdot10^3}{12\cdot10^{-4}}=54,2\cdot10^6\,Па=54,2\,МПа.$$

На третьем участке, уравнение статики для системы сил будет иметь вид:

$$\sum Y=N_3-P_2-P_1=0\rightarrow N_3=P_2+P_1=65+20=85\,кН.$$

На третьем участке тоже происходит деформация растяжения.

Нормальные напряжения, возникающие в стержне на третьем участке:

$$\sigma_3=\frac{N_3}{F}=\frac{85\cdot10^3}{12\cdot10^{-4}}=70,8\cdot10^6\,Па=70,8\,МПа.$$

Строим эпюры продольных сил и нормальных напряжений всех участков бруса. Так как в пределах одного или нескольких смежных участков продольная сила не меняется, то эпюра ограничена прямыми, параллельными оси ординат.

Штриховка эпюр должна быть перпендикулярна оси стержня. Каждая линия штриховки (абсцисса графика) в соответствующем масштабе выражает величину продольной силы в лежащем против нее поперечном сечении стержня.

Для определения перемещения свободного конца стержня и сечения m - n воспользуемся законом Гука:

$$\Delta l=\frac{N\cdot l}{A\cdot E}=\frac{\sigma\cdot l}{E};$$

где Δl – абсолютное удлинение или укорочение (изменение длины) участка стержня, м;

N – продольная сила на участке, Н;

l – длина участка стержня, м;

E – модуль продольной упругости, Н/м^2;

F – площадь поперечного сечения участка, м^2;

EF – жесткость сечения бруса при растяжении (сжатии).

Перемещение свободного конца бруса равно удлинению всего стержня:

$$\Delta l = \frac{\sigma_1 \cdot c}{E} + \frac{\sigma_2 \cdot (b-c)}{E} + \frac{\sigma_3 \cdot a}{E} = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} \cdot (27,1 \cdot 10^6 \cdot 2,6 + 54,2 \cdot 10^6 \cdot 5,4 + 70,8 \cdot 10^6 \cdot 4,8) = 3,5 \cdot 10^{-3}\ м$$

Перемещение сечения m – n равно удлинению участка длиной [a + (b − d)]:

$$\Delta l_{m-n} = \frac{\sigma_2 \cdot (b-d)}{E} + \frac{\sigma_3 \cdot a}{E} = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} \cdot (54,2 \cdot 10^6 \cdot 2 + 70,8 \cdot 10^6 \cdot 4,8) = 2,2 \cdot 10^{-3}\ м = 2,2\ мм.$$

Коэффициентом запаса прочности называют отношение предельного напряжения к наибольшему расчетному напряжению:

$$n = \frac{\sigma_{пред}}{|\sigma_{max}|}$$

Для нашего стержня $\sigma_{пред} = \sigma_T = 240$ МПа, $\sigma_{max} = \sigma_3 = 70,8$ МПа,

$$n = \frac{240}{70,8} = 3,4; 3,4 > 1.$$

Коэффициент запаса прочности больше единицы, поэтому подбирать новую площадь поперечного сечения не требуется.

Задача 2

Для заданного стального стержня без учёта собственного веса

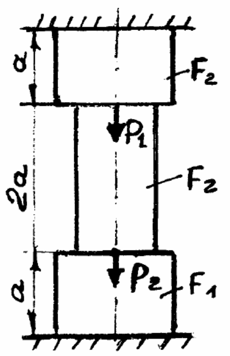
1. Раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений по длине стержня.

2. Определить и показать на наиболее напряжённом участке нормальное и касательное напряжения в наклонном сечении (P = 100 кН, F = 15 см^2 , a = 1 м, α =15°).

Проверить прочность конструкции, если [σ]=160 МПа.

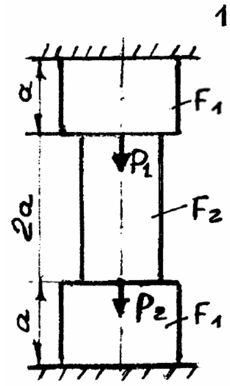
Примечание: при вычерчивании расчетной схемы утолщенные и утоненные участки стержня показывать в соответствии со значениями F_1 и F_2.

1



На рисунке надо полагать ошибка
в указаниях сечений бруса

1



P_i		F_i	
P_1	P_2	F_1	F_2
P	2P	F	2F

Решение:

Статика дает лишь одно уравнение равновесия, так как система сил, направлена по одной прямой.

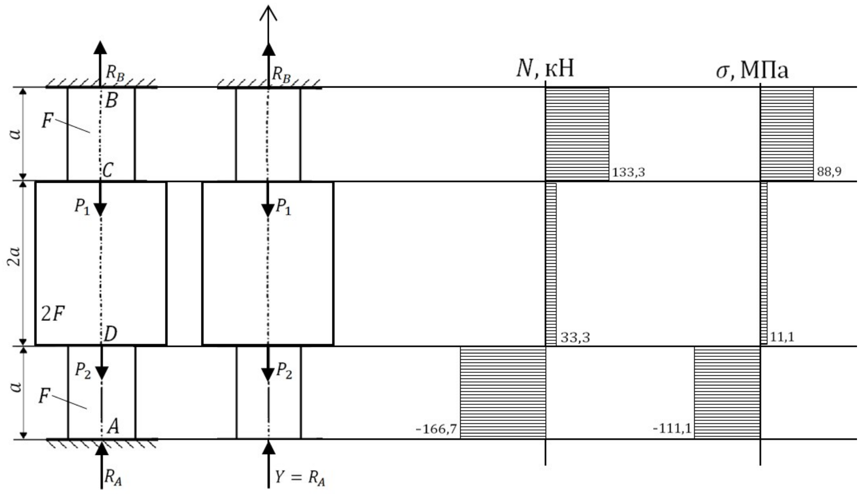
$$R_A + R_B - P_1 - P_2 = 0.$$

Для составления уравнения перемещений отбросим нижнюю заделку, и заменим ее действие на стержень соответствующей силой реакции R_A. В результате получим стержень, защемленный одним концом (статически определимый стержень) и нагруженный, заданными силами P_1 и P_2, и неизвестной силой $Y = R_A$.

Перемещение сечения А данного стержня равно нулю, так как фактически (в заданном стержне) это сечение жестко заделано:

$$\delta_A = 0$$

где δ_A – суммарное перемещение сечения А, от действия всех сил: P_1, P_2, и Y.



Применив принцип независимости действия сил, определяем перемещение сечения А от каждой силы в отдельности, предполагая, что действует она одна, и соответствующая ей реакция опоры А, а остальные силы в это время отсутствуют. Тогда перемещение от совместного действия всех сил равно алгебраической сумме перемещений от действия каждой силы в отдельности:

$$\delta_{AP_1} + \delta_{AP_2} + \delta_{AY} = 0.$$

Удлинение участка ВС в результате действия силы P_1:

$$\delta_{AP_1} = \frac{-P_1 \cdot a}{E \cdot F} = \frac{-P \cdot a}{E \cdot F}$$

Сумма удлинений участков ВС и CD в результате действия силы P_2:

$$\delta_{AP_2} = \frac{-P_2 \cdot a}{E \cdot F} - \frac{P_2 \cdot 2a}{E \cdot 2F} = \frac{-4P \cdot a}{E \cdot F}$$

Сумма укорочений участков AD, DC и CB в результате действия силы Y:

$$\delta_{AP_2} = \frac{-Y \cdot a}{E \cdot F} - \frac{Y \cdot 2a}{E \cdot 2F} - \frac{Y \cdot a}{E \cdot F} = \frac{-3Y \cdot a}{E \cdot F}$$

Тогда:

$$\frac{P \cdot a}{E \cdot F} + \frac{4P \cdot a}{E \cdot F} - \frac{3Y \cdot a}{E \cdot F} = 0$$

Откуда

$$Y=\frac{5P}{3}.$$

Таким образом, получаем:

$$R_A=\frac{5P}{3}=\frac{5\cdot 100}{3}=166,7\,кН\,;\; R_B=P_1+P_2-R_A=3P-\frac{5P}{3}=\frac{4\cdot 100}{3}=133,3\,кН\,.$$

Определим продольные силы на участках стержня, начиная с нижнего

$$N_1=-R_A=-166,7\,кН\,;$$

$$N_2=P_2-R_A=200-166,7=33,3\,кН\,.$$

$$N_3=P_2+P_1-R_A=200+100-166,7=133,3\,кН\,.$$

Напряжения равны продольной силе, деленной на площадь

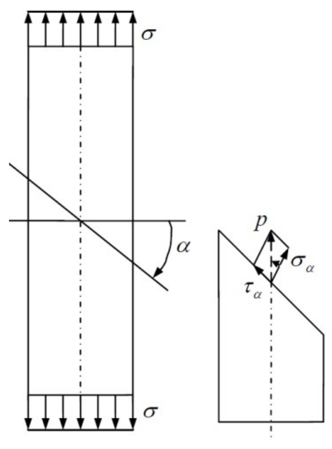
$$\sigma_1=\frac{-166700}{1500}=-111,1\,МПа$$

$$\sigma_2=\frac{-33300}{3000}=11,1\,МПа$$

$$\sigma_3=\frac{-133300}{3000}=88,9\,МПа$$

Строим эпюры по найденным значениям.

Полное напряжение, возникающее в некоторой наклонной площадке, составляющей угол α с плоскостью нормального сечения, определяется следующим образом: $p = \sigma \cdot \cos\alpha$.



Раскладываем это напряжение по нормали и касательной к наклонной площадке, находим:

$$\sigma_\alpha=p\cdot cos\alpha\,;\;\tau_\alpha=p\cdot sin\alpha\rightarrow\sigma_\alpha=\sigma\cdot\cos^2\alpha\,;\;\tau_\alpha=\frac{\sigma\cdot\sin 2\alpha}{2},$$

где σ_α и τ_α – нормальное и касательное напряжения в наклонном сечении.

Наибольшие напряжения возникают на участке AD, где происходит деформация сжатия:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = 111,1\ МПа.$$

Определим на этом участке нормальное и касательное напряжения в наклонном сечении при $\alpha = 15°$:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2\alpha = 111,1 \cdot \cos^2 15° = 103,6\ МПа;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma \cdot \sin 2\alpha}{2} = \frac{111,1 \cdot \sin(2 \cdot 15°)}{2} = 27,8\ МПа.$$

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{|N|}{F} \leq [\sigma].$$

где σ_{max} и N – соответственно нормальное напряжение и продольная сила в опасном поперечном сечении (то есть сечении, в котором возникают наибольшие напряжения);

F – площадь поперечного сечения;

[σ] – допускаемое напряжение: [σ]= 160 МПа ;

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = 111,1\ МПа,\ 111,1\ МПа \leq 160\ МПа.$$

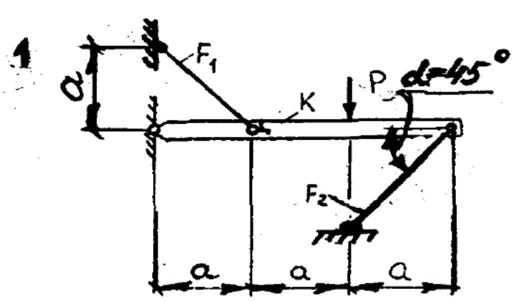
Следовательно, условие прочности выполняется и конструкция работоспособна.

Задача 3

Для заданной стержневой системы

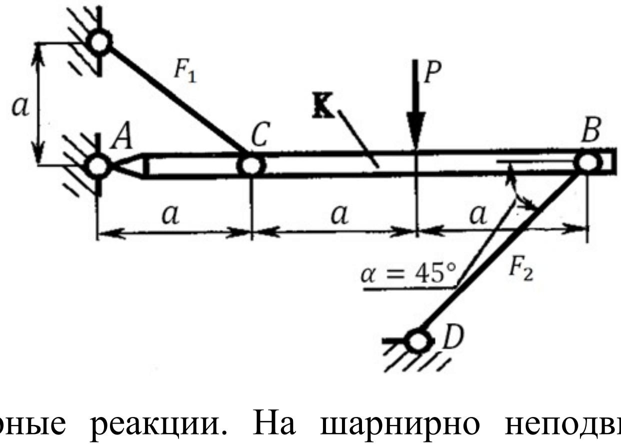
1. Раскрыть статическую неопределимость

2. Из условия прочности подобрать диаметр стальных стержней, удерживающих в равновесии абсолютно жёсткий брус К, если $\sigma_{пред} = \sigma_Т$, считая, что площадь F стержней одинакова (P = 10 кН, a = 1 м). Запас прочности n = 2,5.



P	Материал стержня, сталь марки	Предел текучести $\sigma_т$, МПа
2P	20	250

Решение:

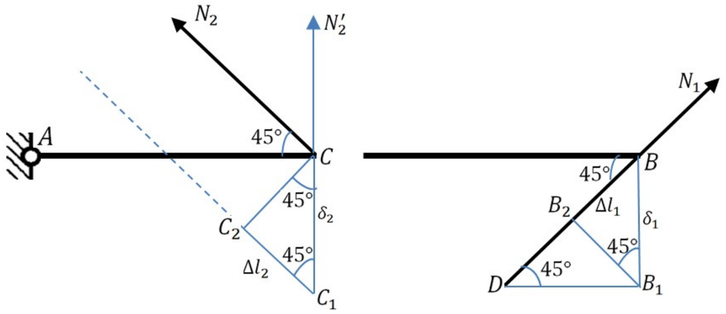


Назначаем опорные реакции. На шарнирно неподвижной опоре А раскладываем реакцию на две составляющие X_A и Y_A. В шарнирно закрепленных стержнях внутренние усилия и соответственно реакции всегда направлены вдоль стержней, так как стержни работают только на растяжение или сжатие. Внутренние усилия всегда численно равны реакциям. Получаем произвольную плоскую систему сил, для которой статика дает три уравнения равновесия:

$$\sum X=0,\ X_A-N_1\cos 45°-N_2\cos 45°=0;$$
$$\sum Y=0,\ Y_A-P-N_1\sin 45°+N_2\sin 45°=0;$$
$$\sum M_A=0,\ -P\cdot 2a+a\cdot N_1\sin 45°+3a\cdot N_2\sin 45°=0;$$

Система один раз статически неопределимая. Число неизвестных усилий 4: X_A, Y_A, N_1 и N_2, а число возможных уравнений статики 3.

В силу жесткости балки она и после деформации системы останется прямолинейной и лишь повернется вокруг шарнира A на небольшой угол за счет изменения длины стержней.



Уравнение совместности деформаций:

Из подобия треугольников ABB_1 и ACC_1 имеем:

$$\frac{CC_1}{BB_1}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{3}.$$

Из-за малости деформаций можно считать, что углы между стержнями и балкой не изменяются. А поскольку $CC_1 = \delta_2$, $BB_1 = \delta_1$, тогда $\delta_1 = 3\delta_2$.

Из треугольника CC_1C_2 следует, что $CC_1 = \Delta l_2 = \delta_2 \sin 45°$.

Из треугольника BB_1B_2 следует, что угол $\angle ABD = \angle BB_1B_2$, поэтому $\Delta l_1 = \delta_1 \sin 45°$.

$$l_1=3\cdot\frac{l_2}{\sin 45}\cdot\sin 45=3l_2.$$

В то же время

$$l_1=\frac{N_1 l_1}{EF};\ l_2=\frac{N_2 l_2}{EF};\ l_1=l_2=\frac{a}{\cos 45°}.$$

тогда

$$N_1=3N_2$$
$$-P\cdot 2a+a\cdot N_1\sin 45°+3a\cdot N_2\sin 45°=0$$
$$-P\cdot 2a+a\cdot 3N_2\sin 45°+3a\cdot N_2\sin 45°=0$$

$$N_2=\frac{P\cdot 2a}{6a\cdot \sin 45°}=\frac{P}{3\cdot \sin 45°}=\frac{2\cdot 10}{3\cdot 0{,}707}=9{,}4\,кН\,;\,N_1=3N_2=28{,}2\,кН\,.$$

Из условия прочности подбираем диаметр стержней:

$$\sigma_{max}=\frac{|N_{max}|}{F}\le[\sigma].$$

$$N_{max}=N_1=28{,}2\,кН$$

Отсюда

$$F\ge\frac{N_1}{[\sigma]}=\frac{28{,}2\cdot 10^3}{100\cdot 10^6}=2{,}8\cdot 10^{-4}\,м^2.$$

$$[\sigma]=\frac{\sigma_T}{n}=\frac{250}{2{,}5}=100\,МПа-допускаемое\;напряжение.$$

Площадь поперечного сечения стержней

$$F\ge 2{,}8\cdot 10^{-4}\,м^2,$$

тогда диаметр

$$d=\sqrt{\frac{4F}{\pi}}=\sqrt{\frac{4\cdot 2{,}8\cdot 10^{-4}}{3{,}14}}=1{,}89\cdot 10^{-2}\,м=1{,}89\,см\,.$$