Практическое задание 1

Задача 1

Кривая индивидуального спроса на некоторое благо линейна и при цене $P=10$ эластичность спроса по цене принимает значение $\varepsilon_{Dp}=-1$. Значения цены P и коэффициент эластичности спроса по цене ε_{Dp} выбираются в соответствии с вариантом. Ответьте на вопрос: достижение какого уровня цены P приведет к полному отказу от потребления этого товара?

Решение:

Линейная функция спроса имеет вид:

$$Q_D=a-b\times P,$$

где Q_D – объем спроса на благо;

a – свободный член уравнения;

b – коэффициент угла наклона функции спроса;

P – рыночная цена товара.

Представим ее в виде обратной функции:

$$b\times P=a-Q,$$

$$P_D=a/b-Q/b.$$

Тогда для $Q=0$:

$$P=a/b-0/b,$$

$P=a/b$, т.е. для решения задачи необходимо рассчитать отношение коэффициентов функции спроса a/b.

Коэффициент ценовой эластичности спроса можно определить с использованием формулы:

$$\varepsilon_{Dp}=\frac{Q(P)\times P}{Q(P)},$$

где ε_{Dp} – коэффициент эластичности спроса на благо по его цене;

$Q(P)$ – первая производная функции спроса по параметру цены P;

$Q(P)$ – уравнение кривой спроса.

Находим первую производную функции спроса по P:

$$Q(P) = (a - b \times P) = -b$$

и модифицируем формулу коэффициента эластичности:

$$\varepsilon_{Dp} = \frac{-b \times P}{a - b \times P}.$$

Подставляем все известные значения в формулу расчета ценовой эластичности спроса и выражаем отношение a/b:

$$-1 = \frac{-b \times 10}{a - 10 \times b},$$

$$-1 \times (a - 10 \times b) = -b \times 10,$$

$$a - 10 \times b = b \times 10,$$

$$a = b \times 10 + 10 \times b,$$

$$a = b \times 20,$$

$$\frac{a}{b} = 20.$$

Полученное значение и есть показатель уровня цены, при котором $Q = 0$: $P(Q = 0) = a/b = 20$.

Ответ: $P(Q = 0) = 20$.

Задача 2

Функция спроса на товар $Q_D = 60 - 3 \times P$. Ответьте на вопрос: при каких значениях цены товара кривая спроса эластична? На графике покажите эластичный и неэластичные участки кривой спроса D.

Решение:

Точка, разделяющая эластичный и неэластичный участки линейной кривой спроса вида $Q_D = a - b \times P$ – это точка с единичной эластичностью спроса по цене. Тогда соответствующий уровень цены можно найти по формуле:

$$P_{\varepsilon_{Dp} = -1} = \frac{P_{max}}{2},$$

где $P_{\varepsilon_{Dp} = -1}$ – уровень цены, соответствующий точке с единичной эластичностью спроса;

P_{max} – цена, при которой объем спроса Q_D равен 0.

Определяем максимальную цену P_{max}:

$$60-3\times P_{max}=0,$$

$$60=3\times P_{max},$$

$$P_{max}=\frac{60}{3}=20.$$

Тогда уровень цены в точке с единичной эластичностью спроса:

$$P_{\varepsilon_{Dp}=-1}=\frac{20}{2}=10.$$

Покажем на графике.

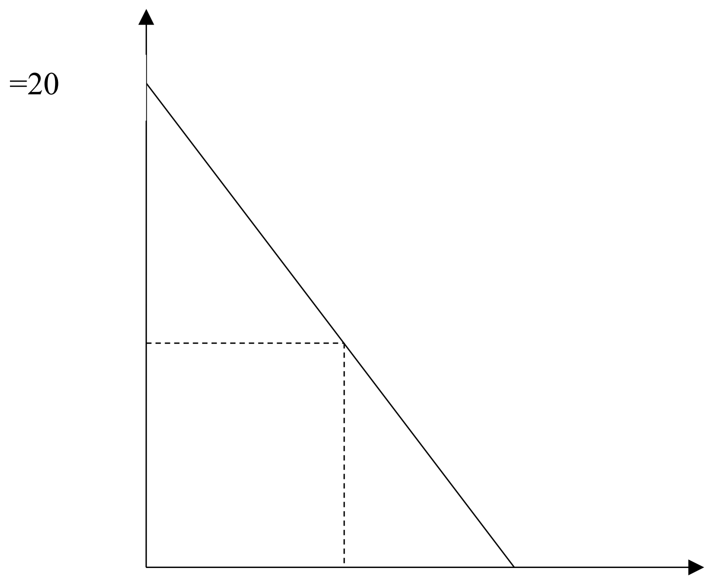

Рис. 1. Изменение ценовой эластичности спроса по линейной кривой спроса

Участок кривой спроса с эластичным спросом по цене – это отрезок AE на рисунке, который соответствует изменению цены от максимальной до цены в точке с единичной эластичностью спроса. Таким образом, эластичный спрос соответствует уровню цены, находящемуся в промежутке $P\epsilon(20;10)$.

Участок кривой спроса с неэластичным спросом по цене – это отрезок EB на рисунке, который соответствует изменению цены от цены в точке с единичной эластичностью спроса до цены, равной нулю, т.е. $P\epsilon(10;0)$.

Практическое задание 2

Задача

Предположим, что доход потребителя в месяц составляет $m=7000$ руб. на потребительский набор (x, y). Цена единицы товара x равна $p_x=70$ руб., а цена единицы товара y равна $p_y=50$ руб.

1. Запишите бюджетное ограничение (БО) потребителя и покажите на графике соответствующее бюджетное множество (БМ).

2. Изменения в экономике привели к необходимости ввести налог на цену товара x. Теперь каждая единица товара x будет обходиться всем потребителям на $\tau=10\%$ дороже. Запишите БО для этого случая и покажите на графике соответствующее БМ. Ответьте на вопрос: что произошло со множеством доступных потребителю наборов после ограничительной политики правительства?

3. В результате введения правительством налога на цену товара администрацией региона была введена потоварная субсидия на товар y, равная сумме $s=5$ руб. Запишите БО для этого случая и покажите графически БМ. Как изменилось бюджетное множество потребителя по сравнению с начальным вариантом?

4. Все правительственные программы отменены (т.е. пункты 2 и 3). Магазин, в котором потребитель совершает свои покупки, вводит в действие следующую систему скидок: при покупке товара y все приобретенные единицы продаются на $S=5$ руб. дешевле. Выпишите БО и покажите на графике соответствующее БМ.

Решение:

1. Уравнение линии бюджетного ограничения потребителя имеет вид:

$$p_x \times x + p_y \times y = m,$$

где p_x – цена единицы товара x;

x – количество товара x;

p_y – цена единицы товара y;

y – количество товара y;

m – доход потребителя.

При заданных значениях m, p_x и p_y бюджетное ограничение потребителя принимает вид:

$$70 \times x + 50 \times y = 7000.$$

Графический вид бюджетного множества (площадь заштрихованного треугольника), т.е. всего множества потребительских наборов, доступных покупателю при заданных ценах товаров p_x и p_y и его доходе m, представлен на рисунке 2.1.

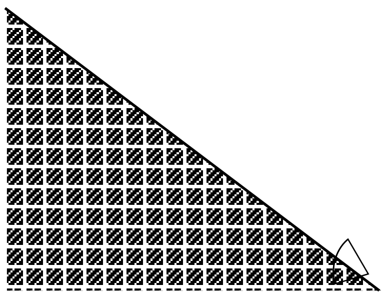

Рис. 2.1. Графический вид бюджетного множества

Рассчитаем координаты точек пересечения линии бюджетного ограничения с осями координат:

$m/p_x = \frac{7000}{70} = 100$ единиц товара x;

$m/p_y = \frac{7000}{50} = 140$ единиц товара y.

При этом угол наклона бюджетной линии равен:

$$-p_x/p_y = \frac{-70}{50} = -1,40.$$

Тогда бюджетное множество для данного потребителя принимает вид (см. рисунок 2.2):

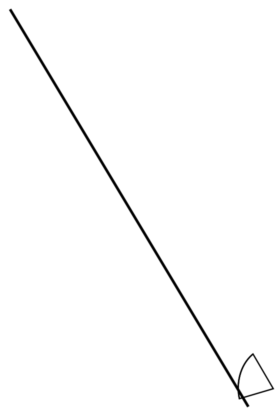

Рис. 2.2. Бюджетное множество потребителя

2. Введение налога на стоимость товара x привело к изменению цены p_x. Фактическая цена составила:

$$p_x = (1+\tau) \times p_x = (1+0,1) \times 70 = 1,1 \times 70 = 77 \text{ руб}.$$

Следовательно, бюджетное ограничение для данного потребителя принимает вид:

$$p_x \times x + p_y \times y = m;$$

$$77 \times x + 50 \times y = 7000.$$

Тогда координата точки пересечения бюджетной линии с осью абсцисс будет равняться:

$$m / p_x = \frac{7000}{77} = 91 \text{ единиц товара } x,$$

а угол ее наклона:

$$-p_x / p_y = \frac{-77}{50} = -1,54.$$

В этих условиях бюджетное множество будет отражать сокращение доступных данному покупателю товарных наборов, показанных новой линией бюджетного ограничения BL на рисунке 2.3.

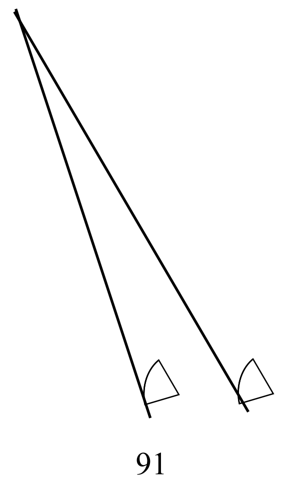

Рис. 2.3. Бюджетное множество потребителя после установления налога на товар x

Вывод: количество доступных потребителю товарных наборов уменьшилось, т.к. площадь треугольника, ограниченного бюджетной линией BL, меньше, чем площадь треугольника, ограниченного бюджетной линией BL.

3. Введение администрацией региона потоварной субсидии на товар y в размере $s=5$ руб. привело к тому, что фактическая цена товара y для потребителя стала равняться:

$$p_y = p_y - s = 50 - 5 = 45\ руб.$$

Следовательно, при сохранении налога на товар x бюджетное ограничение принимает вид:

$$p_x \times x + p_y \times y = m;$$

$$77 \times x + 45 \times y = 7000,$$

координата точки пересечения бюджетной линии с осью ординат равна:

$$m / p_y = \frac{7000}{45} = 156 \text{ единиц товара } y,$$

а угол ее наклона:

$$-p_x / p_y = \frac{-77}{45} = -1,71.$$

Соответствующее изменение положения линии бюджетного ограничения относительно первоначальной ситуации показано на рисунке 2.4.

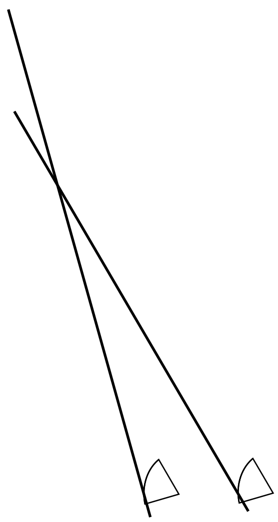

Рис. 2.4. Бюджетное множество потребителя после установления налога на товар x и субсидии на товар y

Вывод: количество доступных потребителю товарных наборов при одновременном влиянии налога и субсидии увеличилось, т.к. прирост в доступности товара y, составивший:

$$\frac{156-140}{140}\times 100=+11,4\%,$$

оказался больше, чем сокращение доступности товара x, равное:

$$\frac{91-100}{100}\times 100=-9,0\%.$$

4. Введение магазином системы скидок на приобретение товара y означает, что товар y стал для данного покупателя более доступным. Если бы предоставление скидки с цены товара y было обусловлено необходимостью приобрести его количество, превышающее некоторый минимум $\bar{y}$, то линия бюджетного ограничения потребителя имела бы вид ломаной кривой, которая математически описывалась бы следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} p_x x + p_y y = m, & y \le \bar{y}, \\ p_x x + (p_y - S)(y - \bar{y}) = m - p_y \bar{y}, & y > \bar{y}, \end{cases}$$

где $\bar{y}$ – минимальное количество покупок товара y, при превышении которого начинает действовать система скидок;

S – величина скидки за единицу товара y, руб.

Графически бюджетное ограничение было бы представлено рисунком 2.5.

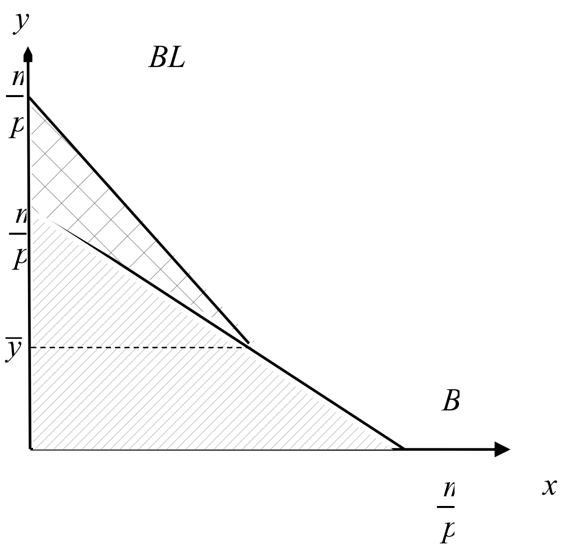

Рис. 2.5. Бюджетное множество потребителя после введения системы скидок на товар y

Однако, т.к. скидка начинает действовать при осуществлении первой же покупки (параметр $\bar{y}$ не задан), то линия бюджетного ограничения будет характеризоваться уравнением:

$$p_x \times x + p_y \times y = m;$$

$$70 \times x + 45 \times y = 7000,$$

где $p_y = p_y - S = 50 - 5 = 45$ руб.;

точкой пересечения с осью ординат:

$$m / p_y = \frac{7000}{45} = 156 \text{ единиц товара } y,$$

и углом наклона:

$$-p_x / p_y = \frac{-70}{45} = -1,56.$$

Соответствующее изменение положения линии бюджетного ограничения относительно первоначальной ситуации показано на рисунке 2.6.

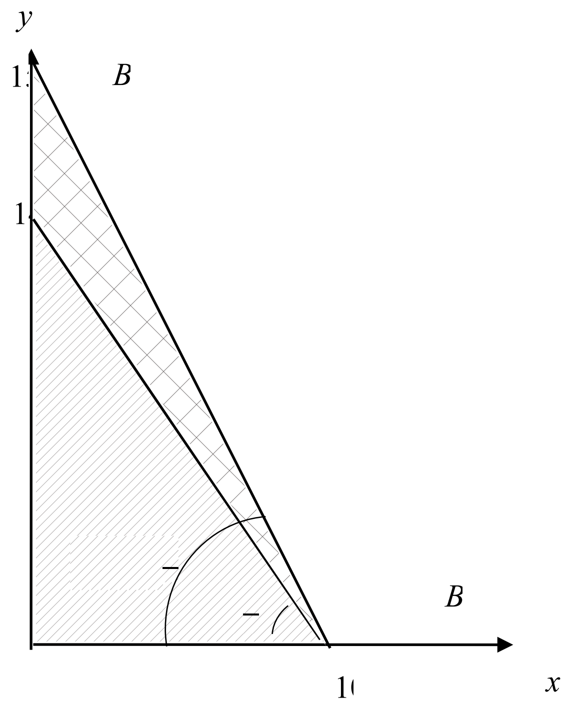

Рис. 2.6. Бюджетное множество потребителя с учетом фактического действия системы скидок на товар *y*

Вывод: количество доступных потребителю товарных наборов при введении скидки на товар *y* увеличится.

Практическое задание 3

Задача

Известно, что для потребительского набора (x, y) функция полезности потребителя задана уравнением $u(x, y) = \frac{x \times y^2}{2}$. Общий доход, которым располагает потребитель, составляет $m = 360$. Цена товара x – $p_x = 6$ ден. ед., цена товара y – $p_{y_1} = 4$ ден. ед. Предположим, что цена товара y снижается до уровня $p_{y_2} = 2$.

Осуществите следующие действия:

- выпишите уравнение бюджетной линии и постройте график бюджетного ограничения;

- определите эффект замены (по Хиксу);

- определите эффект дохода (по Хиксу);

- определите общий эффект (по Хиксу);

- охарактеризуйте данный товар (нормальный, инфериорный, товар Гиффена).

Решение:

Бюджетное ограничение по заданным значениям m, p_x и p_{y_1} принимает вид:

$$6 \times x + 4 \times y = 360.$$

Оптимальный выбор потребителя представлен на рисунке 3.1.

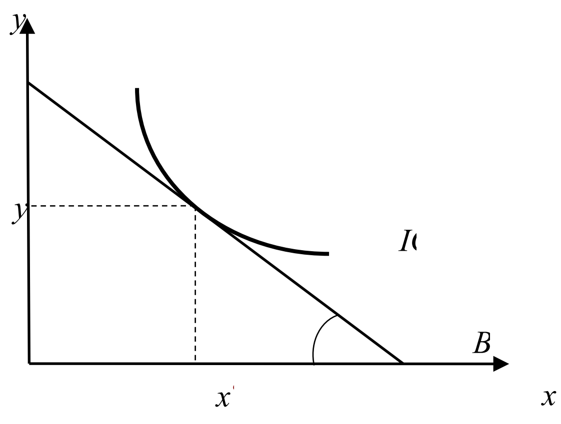

Рис. 3.1. Потребительский выбор

Для расчета величины эффектов замещения и дохода прежде всего необходимо найти параметры внутреннего равновесия потребителя до и после снижения цены товара Y.

Первоначальную оптимальную комбинацию благ E_1 можно найти из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} MU_x / MU_y = p_x / p_{y_1} \\ p_x \times x + p_{y_1} \times y = m \end{cases}$$

Первое равенство представляет собой условие максимизации полезности потребителя при равенстве угла наклона касательной к кривой безразличия в точке оптимума (показатель предельной нормы замещения товаром x товара y $MRS_{xy} = MU_x / MU_y$) углу наклона бюджетной линии $tg\,\alpha = p_x / p_{y_1}$ в этой же точке. Второе равенство – уравнение бюджетного ограничения потребителя $6 \times x + 4 \times y = 360$.

Находим функции предельных полезностей товаров x и y как условную производную функции совокупной полезности по соответствующему товару:

$$MU_x = \partial u / \partial x = (\frac{x \times y^2}{2}) = \frac{y^2}{2};$$

$$MU_y = \partial u / \partial y = (\frac{x \times y^2}{2}) = \frac{1}{2} \times x \times 2 \times y = x \times y.$$

Подставляем известные значения в систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{2 \times x \times y} = \dfrac{6}{4}; \\ 6 \times x + 4 \times y = 360. \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} 4 \times y^2 = 2 \times 6 \times x \times y; \\ 6 \times x + 4 \times y = 360; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \times y = 12 \times x; \\ 6 \times x + 4 \times y = 360; \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем:

$$y = 3 \times x$$

и подставляем во второе уравнение:

$$6 \times x + 4 \times 3 \times x = 360;$$

$$18 \times x = 360;$$

$$x_1 = \frac{360}{18} = 20\,единиц;$$

$$y_1 = 3 \times 20 = 60\,единиц.$$

После снижения цены товара y до $p_{y_2} = 2$ ден. ед. оптимум потребителя E_2 описывается системой уравнений вида:

$$\begin{cases} MU_x / MU_y = p_x / p_{y_2} \\ p_x \cdot x + p_{y_2} \cdot y = m \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{2 \times x \times y} = \dfrac{6}{2}; \\ 6 \times x + 2 \times y = 360. \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} 2 \times y^2 = 6 \times 2 \times x \times y; \\ 6 \times x + 2 \times y = 360. \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем:

$$y = 6 \times x$$

и подставляем во второе уравнение:

$$6 \times x + 2 \times 6 \times x = 360;$$

$$18 \times x = 360;$$

$$x_2 = \frac{360}{18} = 20\,единиц;$$

$$y_2 = 6 \times 20 = 120\,единицы.$$

Т.к. функция полезности в данном случае является функцией Кобба-Дугласа $u = x^{\alpha} \times y^{\beta}$, то данные вычисления можно было значительно упростить, воспользовавшись «правилом долей»:

$$x = \alpha / (\alpha + \beta) \times m / p_x,$$

$$y = \beta / (\alpha + \beta) \times m / P_y,$$

где α и β – коэффициенты эластичности полезности по потреблению товаров x и y, соответственно;

m – бюджет покупателя;

p_x – цена товара x;

P_y – цена товара y.

Для первоначального равновесия:

$$x_1 = \frac{1}{1+2} \times \frac{360}{6} = 20\,ед.; \qquad y_1 = \frac{1}{1+2} \times \frac{360}{4} = 30\,ед.$$

Для последующего равновесия:

$$x_2 = \frac{1}{1+2} \times \frac{360}{6} = 20\,ед.; \qquad y_2 = \frac{1}{1+2} \times \frac{360}{2} = 60\,ед.$$

Покажем оптимальные потребительские наборы товаров x и y до и после снижения цены товара y до p_{y_2} на рисунке 3.2.

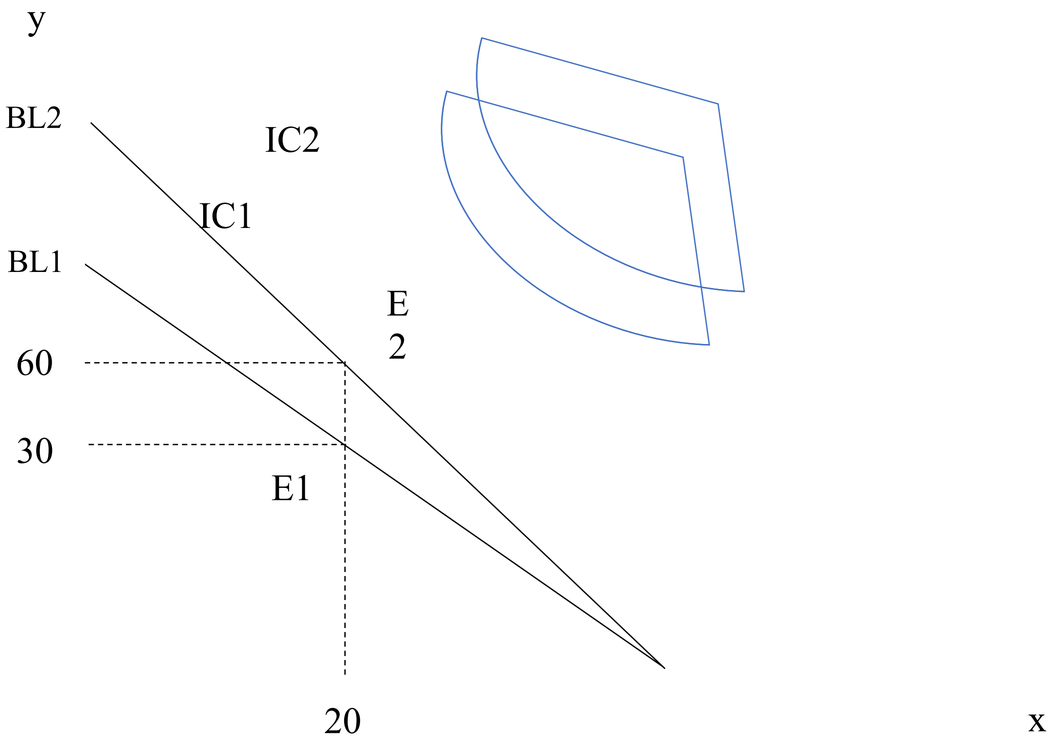

Рис. 3.2. Оптимальный выбор потребителя до и после повышения цены товара *y*

На графике точка E_1 – первоначальный оптимальный набор товаров x и y, точка E_2 – оптимальный товарный набор после снижения цены товара y и поворота бюджетной линии в положение BL_2.

Изменение цены одного из товаров, входящих в потребительский набор, вызывает появление общего эффекта от этого изменения, который может быть разложен на эффект замены (замещения) и эффект дохода.

Эффект замены (замещения) – это часть общего эффекта изменения цены товара, вызванная изменением относительной привлекательности других товаров.

Эффект дохода – это часть общего эффекта изменения цены товара, вызванная изменением реальной покупательной способности дохода потребителя.

Общий эффект – сумма эффектов дохода и замещения.

Определим указанные эффекты по методу Хикса.

Согласно подходу Хикса, после изменения цены товара получаемая потребителем полезность не изменится, если при новых ценах он может себе позволить приобрести товарный набор с тем же уровнем полезности, что и первоначальный потребительский набор:

$$u(x_H; y_H) = u(x_1; y_1),$$

где x_H, y_H – это оптимальные количества товаров x и y во вспомогательной точке равновесия потребителя (точке Хикса) E_H.

Следовательно, вспомогательная бюджетная линия (линия Хикса) должна иметь тот же угол наклона, что и бюджетная линия BL_2 (описывающаяся уравнением $6 \times x + 4 \times y = 360$), но являться касательной к первоначальной кривой безразличия потребителя IC_1. Тогда система уравнений, из решения которой можно определить вспомогательный товарный набор E_H выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} MU_x / MU_y = p_x / p_{y_2} \\ u(x_H; y_H) = u(x_1; y_1) \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{2 \times x \times y} = \dfrac{6}{2}; \\ \dfrac{x \times y^2}{2} = \dfrac{x_1 \times y_1^2}{2}. \end{cases}$$

Первое равенство преобразуется в:

$$y = 6 \times x.$$

Подставляем полученное выражение и известные значения x_1 и y_1 во второе выражение:

$$x \times 6^2 \times x^2 = 20 \times 30^2;$$

$$2 \times x \times 1,6^2 \times x^2 = 2 \times 20 \times 16^2;$$

$$x^3 = 500;$$

$$x_H = 7,94\, ед.;$$

$$y_H = 6 \times x_H = 6 \times 7,94 = 47,62\, ед.$$

Вспомогательный оптимальный набор и направления действия эффектов замены и дохода при повышении цены товара *y* показаны на рисунке 3.3.

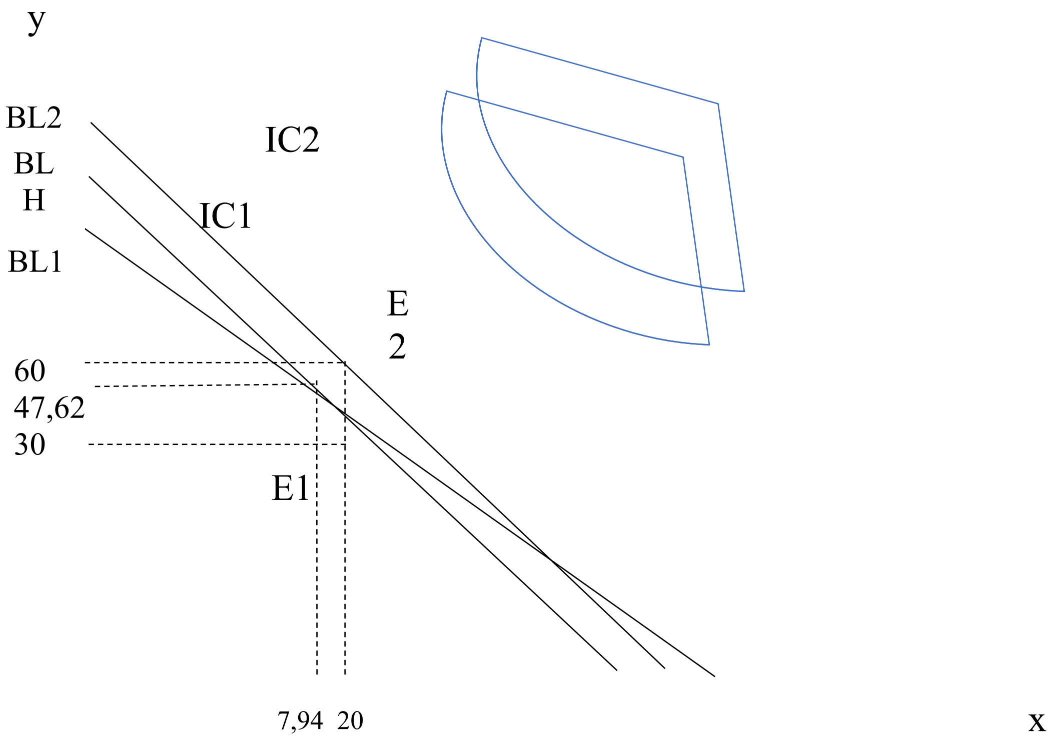

Рис. 3.3. Эффекты дохода и замены при изменении цены товара *y*

Следовательно, эффект замены SE по Хиксу составляет:

$SE_x = \Delta x = x_H - x_1 = 7,94 - 20,00 = -12,06$;

$SE_y = \Delta y = y_H - y_1 = 47,62 - 30,00 = +17,62$.

Эффект дохода IE по Хиксу равен:

$IE_x = \Delta x = x_2 - x_H = 20,00 - 7,94 = +12,06$;

$IE_y = \Delta y = y_2 - y_H = 60,00 - 47,62 = +12,38$.

Общий эффект TE, рассчитанный по изменениям количеств товаров x и y:

$$TE_x = \Delta x = x_2 - x_1 = 20{,}00 - 20{,}00 = 0{,}0;$$

$$TE_y = \Delta y = y_2 - y_1 = 60{,}00 - 30{,}00 = +30{,}00.$$

Проверяем, определяя общий эффект TE, как сумму эффектов дохода и замещения:

$$TE_x = SE_x + IE_x = -12{,}06 + 12{,}06 = 0{,}00;$$

$$TE_y = SE_y + IE_y = 17{,}62 + 12{,}38 = +30{,}00.$$

Вывод: поскольку падение цены товара y вызвало увеличение его потребления по эффекту дохода (или, что то же самое, т.к. направления действия эффектов замены и дохода совпадают и противоположны направлению изменения цены товара y), то данный товар является нормальным (товаром высокого качества).

Практическое задание 4

Задача

Технологическая норма замещения факторов L и K равна $MRS = -1$. Предположим, что фирма готова произвести тот же самый объем выпуска, но сократить использование фактора K на $n = 1$ единиц. Сколько дополнительных единиц фактора L потребуется фирме?

Решение:

Формула расчета технологической нормы замещения факторов L и K имеет вид:

$$MRS = \Delta K / \Delta L,$$

где MRS – технологическая норма замещения факторов L и K;

ΔK – изменение количества применяемого в производственном процессе фактора K; ΔL – изменение количества применяемого в производственном процессе фактора L.

Выражаем из этой формулы изменение количества фактора L:

$$\Delta L = \Delta K / MRS;$$

$$\Delta L = \frac{-1}{-1} = 1.$$

$\Delta L = 1$ единица фактора L.

Графическое решение представлено на рисунке.

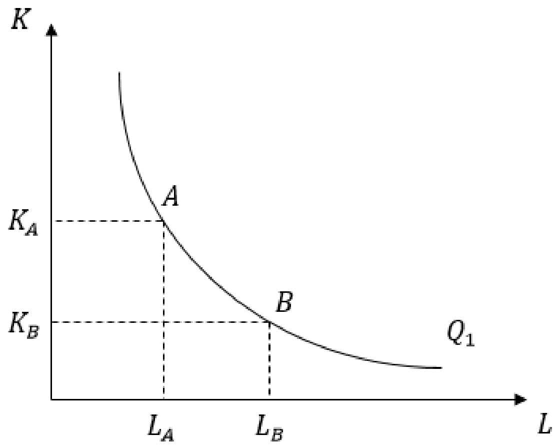

Рис. 4.1 – Изменение количества фактора L при сокращении использования фактора K

Из рисунка следует, что если фирма желает остаться на прежней изокванте (линии равного выпуска) Q_1, то при сокращении использования фактора K (смещении из точки A в точку B) она должна вовлечь в производство дополнительное количество фактора L.

Вывод: расчеты показывают, что количество использования фактора L необходимо увеличить на 0,4 единицы.

Практическое задание 5

Задача 1

1. Предположим, что на рынке действуют две фирмы, функции общих издержек TC заданы уравнениями: $c_1(q_1)=20+q_1^2$ и $c_2(q_2)=20+\frac{1}{4}q_2^2$. Рыночный спрос описывается функцией:

$P(Q)=1000-\frac{1}{4}Q,$

где $Q=q_1+q_2$.

Определите объем продаж, который будет у каждой фирмы, и цену, которая установится на рынке, если:

- фирмы конкурируют по Курно;
- фирмы конкурируют по Бертрану;
- фирмы конкурируют по сценарию Штакельберга.

Изобразите решение на графике.

Решение:

В модели некооперированной дуополии Курно каждый дуополист исходит из предположения, что его соперник не изменит своего выпуска в ответ на его собственное решение. Это значит, что, принимая его, дуополист руководствуется стремлением к максимизации своей прибыли, полагая выпуск другого дуополиста заданным.

В данной модели состояние устойчивого равновесия в отрасли достигается в точке пересечения кривых реагирования дуополистов – точке равновесия Курно-Нэша. Кривые реагирования (кривые наилучшего ответа) – это множества точек наивысшей прибыли, которую может получить один из дуополистов при данной величине выпуска другого.

Представим функцию рыночного спроса в виде:

$$P=1000-0,25\times(q_1+q_2).$$

Выразим функции прибыли каждого из дуополистов:

$\pi_1=TR_1-TC_1=P\times q_1-(20+q_1^2)=q_1\times(1000-0,25\times(q_1+q_2))-20-q_1^2=1000\times q_1-0,25\times q_1^2-0,$

;

$$\pi_2 = TR_2 - TC_2 = P \times q_2 - \left(20 + 0,25 \times q_2^2\right) = q_2 \times \left(1000 - 0,25 \times \left(q_1 + q_2\right)\right) - 20 - 0,25 \times q_2^2 = 1000 \times q_2 -$$

.

Определим максимум полученных функций, найдя их первую производную и приравняв ее к 0:

$$\partial \pi_1 / \partial q_1 = \left(1000 \times q_1 - 1,25 \times q_1^2 - 0,25 \times q_1 \times q_2 - 20\right) = 1000 - 2,5 \times q_1 - 0,25 \times q_2 = 0;$$

$$\partial \pi_2 / \partial q_2 = \left(1000 \times q_2 - 0,5 \times q_2^2 - 0,25 \times q_1 \times q_2 - 20\right) = 1000 - q_2 - 0,25 \times q_1 = 0.$$

Запишем уравнения кривых реагирования каждого из дуополистов, представив выпуск одного через выпуск другого.

Кривая реагирования дуополиста 1 $R_1(q_2)$ имеет вид:

$$1000 - 2,5 \times q_1 - 0,25 \times q_2 = 0;$$

$$-2,5 \times q_1 = -1000 + 0,25 \times q_2;$$

$$q_1 = 400 - 0,1 \times q_2.$$

Кривая реагирования дуополиста 2 $R_2(q_1)$ представлена функцией:

$$1000 - q_2 - 0,25 \times q_1 = 0;$$

$$-q_2 = -1000 + 0,25 \times q_1;$$

$$q_2 = 1000 - 0,25 \times q_1.$$

Оптимальные значения выпуска дуополистов в точке равновесия Курно-Нэша определяются точкой пересечения их кривых реагирования. Для нахождения оптимальных значений выпуска составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} q_1 = 400 - 0,1 \times q_2 \\ q_2 = 1000 - 0,25 \times q_1 \end{cases}$$

Подставляем q_2 в функцию для q_1:

$$q_1 = 400 - 0,1 \times \left(1000 - 0,25 \times q_1\right);$$

$$q_1 = 400 - 100 + 0,025 \times q_1;$$

$$0,975 \times q_1 = 300;$$

$$q_1^{¿} = 308.$$

Тогда оптимальный выпуск дуополиста 2 составляет:

$$q_2 = 1000 - 0,25 \times 308;$$

$$q_2^{¿} = 923.$$

Следовательно, отраслевой выпуск равен:

$$Q^{¿}=q_1^{¿}+q_2^{¿}=308+923=1231.$$

При оптимальных значениях выпуска дуополистов рыночная цена установится на уровне:

$$P=1000-0,25\times 1231;$$

$$P^{¿}=692.$$

Графическая иллюстрация установления равновесия Курно-Нэша приведена на рисунке 5.1.

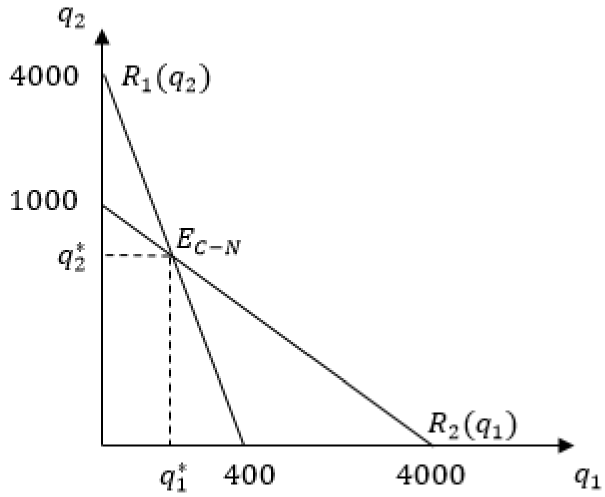

Рис. 5.1. Отраслевое равновесие в модели Курно

На рисунке 5.1 кривые $R_1(q_2)$ и $R_2(q_1)$ – кривые реагирования дуополистов 1 и 2, соответственно; точка E_{C-N} – точка равновесия Курно-Нэша; $q_1^{¿}$ и $q_2^{¿}$ – оптимальные объемы выпуска дуополистов 1 и 2, соответственно.

Модель дуополии Бертрана представляет собой модель ценовой, а не количественной дуополии. Для фирмы в дуополии Бертрана постоянным является не объем выпуска фирмы-конкурента, а назначаемая конкурентом цена. Анализ модели показывает, что в долгосрочном периоде дуополисты, конкурирующие по Бертрану, склонны вступать в состояние «ценовой войны», понижающее назначаемые ими цены до уровня их предельных издержек MC, т.е. привило максимизации прибыли для каждого дуополиста принимает вид $P=MC$.

Определим MC как первую производную функции TC для каждого из дуополистов:

$$MC_1 = (TC_1) = ¿$$

$$MC_2 = (TC_2) = ¿$$

Приравняем к $P = 1000 - 0,25 \times (q_1 + q_2)$, получая следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2q_1 = 1000 - 0,25 \times (q_1 + q_2); \\ 0,5q_2 = 1000 - 0,25 \times (q_1 + q_2). \end{cases}$$

Выразим q_1 из первого уравнения:

$$2q_1 = 1000 - 0,25 \times q_1 - 0{,}252 \times q_2;$$

$$2,25 \times q_1 = 1000 - 0,25 \times q_2;$$

$$q_1 = 444 - 0,11 \times q_2.$$

Подставляем q_1 во второе уравнение и находим оптимальный выпуск дуополиста 2:

$$0,5 \times q_2 = 1000 - 0,25 \times (444 - 0,11 \times q_2);$$

$$0,5 \times q_2 = 1000 - 111 - 0{,}0275 \times q_2;$$

$$0{,}5275 \times q_2 = 889;$$

$$q_2^{¿} = 1685.$$

Тогда оптимальный выпуск дуополиста 1 составляет:

$$q_1 = 444 - 0,11 \times q_2 = 444 - 0,11 \times 1685;$$

$$q_1 = 444 - 185;$$

$$q_1^{¿} = 259.$$

Следовательно, отраслевой выпуск равен:

$$Q^{¿} = q_1^{¿} + q_2^{¿} = 259 + 1685 = 1944.$$

При оптимальных значениях выпуска дуополистов рыночная цена установится на уровне:

$$P = 1000 - 0,25 \times 1944;$$

$$P^{¿} = 514.$$

Графическая иллюстрация установления равновесия Бертрана-Нэша приведена на рисунке 5.2.

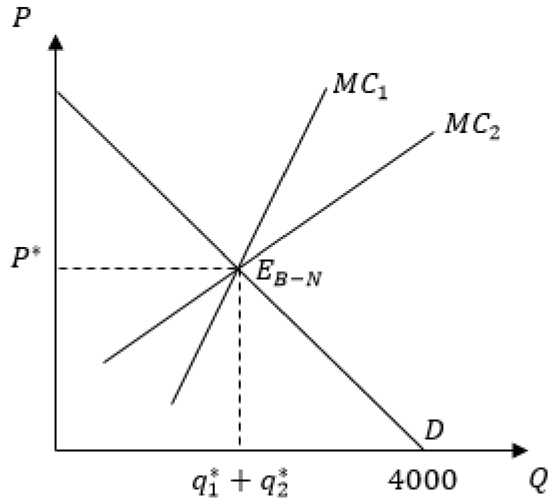

Рис. 5.2. Отраслевое равновесие в модели Бертрана

На рисунке 5.2 кривые MC_1 и MC_2 – кривые предельных издержек дуополистов 1 и 2, соответственно; точка E_{B-N} – точка равновесия Бертрана-Нэша; $q_1^{¿}$ и $q_2^{¿}$ – оптимальные объемы выпуска дуополистов 1 и 2, соответственно.

Модель асимметричной дуополии Штакельберга предполагает, что каждый из дуополистов может придерживаться двух разных типов поведения: а) стремиться стать лидером или б) оставаться последователем. Фирма-последователь в данной модели придерживается предположений модели Курно – следует своей кривой реагирования и принимает решение о выпуске, полагая выпуск своего конкурента заданным. Фирма-лидер, напротив, знает функцию реагирования последователя и учитывает ее при выработке своей стратегии рыночного поведения, действуя при этом подобно монополисту.

Предположим, что фирмой-лидером является дуополист 1.

Выпишем функцию прибыли лидера:

$$\pi_1 = TR_1 - TC_1 = P \times q_1 - \left(20 + q_1^2\right) = q_1 \times \left(1000 - 0,25 \times \left(q_1 + q_2\right)\right) - 20 - q_1^2 = 1000 \times q_1 - 0,25 \times q_1^2 - 0,$$

.

Подставим вместо q_2 в данное выражение полученную ранее функцию реагирования фирмы-последователя (дуополиста 2) $R_2(q_1) = 1000 - 0,25 \times q_1$ и осуществим возможные преобразования:

$$\pi_1 = 1000 \times q_1 - 1,25 \times q_1^2 - 0,25 q_1 \times (1000 - 0,25 \times q_1) - 20 = 1000 \times q_1 - 1,25 \times q_1^2 - 250 \times q_1 + 0,06$$

.

Определяем максимум данной функции, находя ее первую производную и приравнивая ее к 0:

$$(\pi_1) = (750 \times q_1 - 1,2 \times q_1^2 - 20) = 750 - 2,4 \times q_1 = 0;$$

$$2,4 q_1 = 750.$$

Отсюда оптимальный выпуск лидера равен:

$$q_1^{¿} = 750/2,4 = 312,5.$$

Оптимальный выпуск последователя можно получить, подставив полученный выпуск лидера в функцию реагирования последователя:

$$q_2^{¿} = R_2(q_1) = 1000 - 0,25 \times q_1 = 1000 - 0,25 \times 312,5 = 922.$$

Следовательно, отраслевой выпуск равен:

$$Q^{¿} = q_1^{¿} + q_2^{¿} = 312,5 + 922 = 1234,5.$$

При оптимальных значениях выпуска дуополистов по Штакельбергу рыночная цена установится на уровне:

$$P = 1000 - 0,25 \times 1234,5;$$

$$P^{¿} = 691.$$

Рассуждая подобным же образом, находим оптимальный выпуск фирмы-лидера, если им является дуополист 2. Его функция прибыли:

$$\pi_2 = TR_2 - TC_2 = P \times q_2 - (20 + 0,25 \times q_2^2) = q_2 \times (1000 - 0,25 \times (q_1 + q_2)) - 20 - 0,25 \times q_2^2 = 1000 \times q_2 -$$

.

Подставляем вместо q_1 в данное выражение полученную ранее функцию реагирования фирмы-последователя (дуополиста 1) $R_1(q_2) = 400 - 0,1 \times q_2$ и преобразуем его:

$$\pi_2 = 1000 \times q_2 - 0,5 \times q_2^2 - 0,25 \times q_2 \times (400 - 0,1 \times q_2) - 20 = 1000 \times q_2 - 0,5 \times q_2^2 - 100 \times q_2 + 0,025$$

.

Определяем максимум данной функции, находя ее первую производную и приравнивая ее к 0:

$$(\pi_2) = (900 \times q_2 - 0,475 \times q_2^2 - 20) = 900 - 0,95 \times q_2 = 0;$$

$$0,95 \times q_2 = 900.$$

Отсюда оптимальный выпуск лидера равен:

$$q_2^{*}=900/0,95=947.$$

Оптимальный выпуск последователя получаем, подставляя рассчитанный выпуск лидера в функцию реагирования последователя:

$$q_1^{*}=R_1(q_2)=400-0,1\times q_2=400-0,1\times 947=305.$$

Следовательно, отраслевой выпуск равен:

$$Q^{*}=q_1^{*}+q_2^{*}=305+947=1252.$$

При оптимальных значениях выпуска дуополистов по Штакельбергу рыночная цена установится на уровне:

$$P=1000-0,25\times 1252;$$

$$P^{*}=687.$$

Графическая иллюстрация установления равновесия Штакельберга-Нэша приведена на рисунке 5.3.

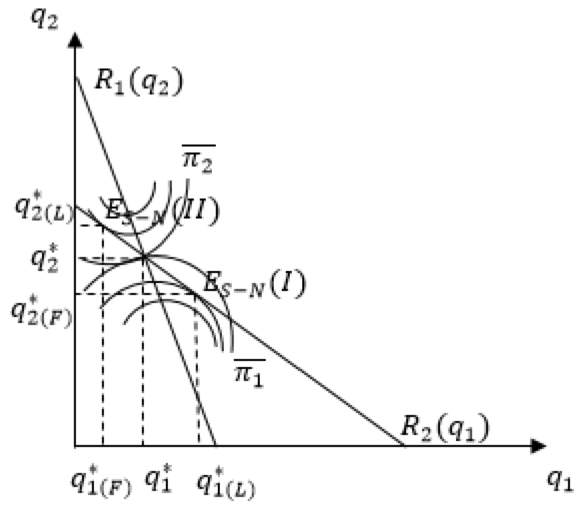

Рис. 5.3 – Отраслевое равновесие в модели Штакельберга

На рисунке 5.3 точка $E_{S-N}(I)$ – точка равновесия в модели Штакельберга для случая, когда лидером является дуополист 1; точка $E_{S-N}(II)$ – точка равновесия в модели Штакельберга для случая, когда лидером является дуополист 2; $q^{*}_{1(L)}$ и $q^{*}_{2(F)}$ – оптимальные выпуски в модели Штакельберга для случая, когда лидером является дуополист 1, а последователем – дуополист 2; $q^{*}_{1(F)}$ и $q^{*}_{2(L)}$ – оптимальные выпуски в модели Штакельберга для случая, когда лидером является дуополист 2, а последователем – дуополист 1; кривые $\overline{\pi_1}$ и $\overline{\pi_2}$ – изопрофиты (линии равной прибыли) дуополистов 1 и 2, позволяющие найти точки равновесия Штакельберга-Нэша как точки, в которых кривые реагирования являются касательными к соответствующим кривым реагирования фирм.

Вывод: Отраслевой выпуск в случае конкуренции дуополистов по модели Курно ниже, а рыночная цена – выше, чем когда дуополисты конкурируют по Бертрану. Результаты конкуренции по модели Штакельберга подобны таковым в модели Курно, однако фирма-лидер в этой модели получает возможность захватить большую часть рынка за счет части рыночного спроса на продукцию своего конкурента.

Задача 2

График предельных издержек фирмы-монополиста задан условием $MC=2Q$. Функция предельного дохода принимает вид: $MC=60-2P$. Определите эластичность рыночного спроса ε_{Dp} при оптимальном выпуске фирмы-монополиста.

Решение:

Условие максимизации прибыли фирмой-монополистом имеет вид $MR=MC$:

$$60-2Q=2Q;$$

$$4Q=60;$$

$$Q_m=15.$$

Для линейной кривой спроса вида $P_d=a-bQ$ функция предельного дохода имеет вид:

$$MR=a-2bQ,$$

где a – свободный член уравнения; b – коэффициент угла наклона функции спроса.

Следовательно, функция спроса на продукцию монополиста может быть представлена уравнением:

$$P=60-2/2Q;$$

$$P_d=60-Q.$$

Определяем цену, которую назначит монополист на свою продукцию, подставляя в полученную функцию спроса величину оптимального выпуска:

$$P_m = 60 - 15 = 45.$$

Эластичность в точке оптимума монополиста рассчитаем по формуле точечной эластичности спроса по цене:

$$\varepsilon_{Dp} = Q(P) \times P / Q(P),$$

где ε_{Dp} – коэффициент эластичности спроса на благо по его цене;

$Q(P)$ – первая производная функции спроса по параметру цены P; $Q(P)$ – уравнение кривой спроса.

Представим функцию спроса в виде прямой:

$$Q_d = 60 - P.$$

Находим производную функции спроса по P:

$$Q(P) = (60 - P) = -1.$$

Тогда эластичность спроса по цене в точке максимизации монополистом своей прибыли равна:

$$\varepsilon_{Dp} = -1 \times 45 / 15 = -3.$$

Практическое задание 6

Задача

Предположим, что издержки по вывозу мусора с территории двух районов составляют $TC(x)=x^2$, где x – площадь территории. Проведенные исследования выявили, что предпочтения всех жителей 1-го района принимают вид функции полезности $u_1(x,m_1)=5\sqrt{x}+m_1$, а предпочтения всех жителей 2-го района – $u_2(x,m_2)=2\sqrt{x}+m_2$, где m_1 и m_2 – потребление агрегированного блага (вывоз мусора) всеми жителями соответствующих районов.

Найдите Парето-эффективное значение вывоза мусора с районов. Изобразите решение задачи на графике.

Решение:

Поскольку функции полезности потребителей заданы как квазилинейные, то условие определения Парето-оптимального значения производства общественного блага принимает вид:

$$MU_x^1+MU_x^2=MC(x),$$

где MU_x^1 – предельная полезность общественного блага для первой группы потребителей; MU_x^2 – предельная полезность общественного блага для второй группы потребителей; $MC(x)$ – предельные издержки производства общественного блага.

Находим предельные полезности:

$$MU_x^1=\partial u_1/\partial x=(5\sqrt{x}+m_1)=\frac{5}{2\times\sqrt{x}};$$

$$MU_x^2=\partial u_2/\partial x=(2\sqrt{x}+m_2)=\frac{2}{2\times\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Определяем функцию предельных затрат:

$$MC(x)=(x^2)=2\times x.$$

Подставляем найденные выражения в условие Парето-оптимальности:

$$\frac{5}{2\times\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2\times x,$$

$$\frac{25}{4\times x}+\frac{1}{x}=4\times x^2,$$

$$4 \times 4 \times x^3 = 25 + 4,$$

$$x^3 = \frac{29}{16},$$

$$x = 1,22.$$

Таким образом, Парето-эффективное значение вывоза мусора с районов составляет $x^{¿} = 1,22$.

Представим решение графически (см. рисунок 6).

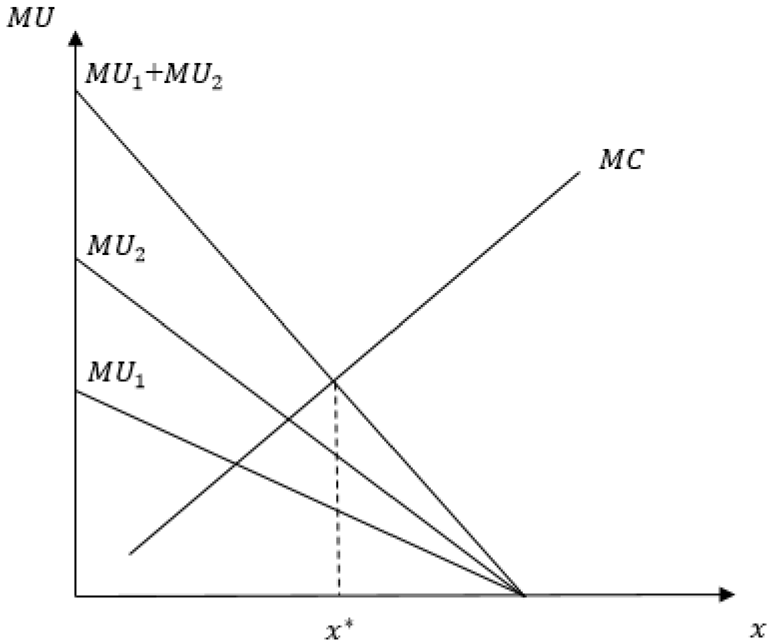

Рис. 6 – Определение Парето-эффективного значения производства общественного блага