№10 Задача 1 (формулировка полностью):

Найти модуль и главное значение аргумента комплексных чисел, записать это число в тригонометрической и показательной формах.

$z = 4 - 3i$.

Решение:

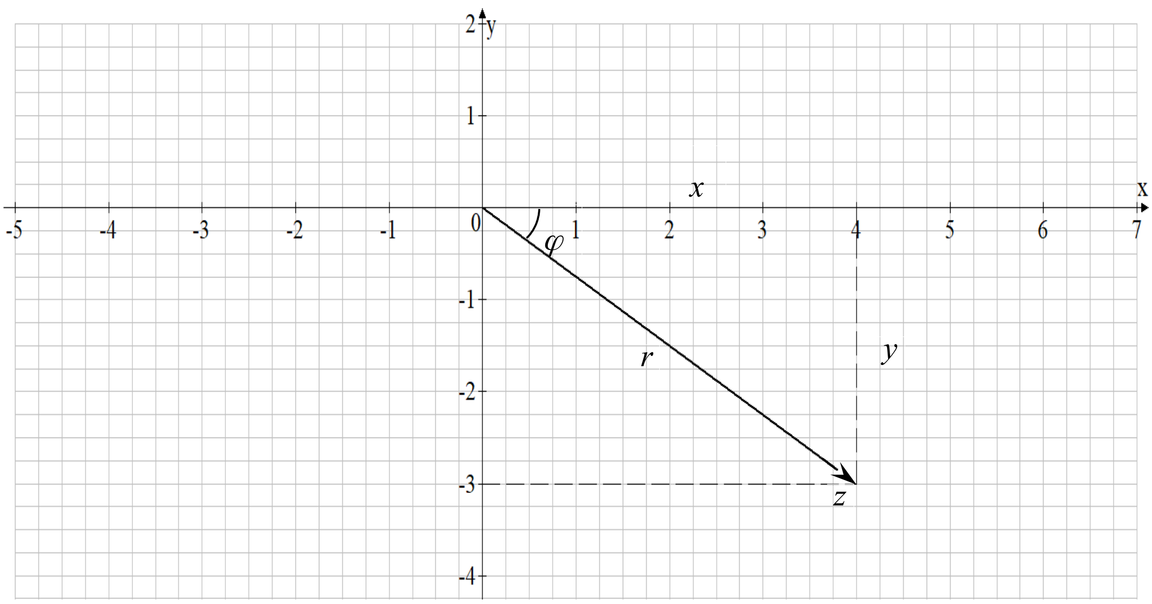
Комплексное число задано в алгебраической форме записи:

$z = x + i \cdot y = 4 - 3i$,

где $x = 4$ – действительная часть;

$y = -3$ – мнимая часть.

Изобразим это число на комплексной плоскости.



Найдём модуль комплексного числа:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

Найдём аргумент комплексного числа ($x > 0,\ y < 0$):

$\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = \operatorname{arctg} \dfrac{-3}{4} = -\operatorname{arctg} 0{,}75 \approx -0{,}64$ рад.

Запишем комплексное число в тригонометрической форме:

$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = 5 \cdot (\cos(-0{,}64) + i \cdot \sin(-0{,}64))$.

Запишем комплексное число в показательной форме:

$z = re^{i\varphi} = 5 \cdot e^{-0,64i}$.

Ответ: $r = 5$, $\varphi = -0,64$, $z = 5 \cdot (\cos(-0,64) + i \cdot \sin(-0,64)) = 5 \cdot e^{-0,64i}$.

№11 Задача 2 (формулировка полностью):

Вычислите.

а) $\left(\frac{-1+2i}{-1-2i}\right)^6$;

б) $\sqrt[3]{-1+i}\cdot\sqrt[3]{-1+i}$.

Решение:

а) $\left(\frac{-1+2i}{-1-2i}\right)^6$.

Избавимся от комплексного знаменателя в дроби:

$$z=\frac{-1+2i}{-1-2i}=\frac{(-1+2i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)}=\frac{1-4i+4i^2}{(-1)^2-(2i)^2}=\frac{1-4i+4\cdot(-1)}{1-4\cdot(-1)}=\frac{-3-4i}{5};$$

$$z=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\cdot i.$$

Найдём модуль и аргумент числа z и запишем его в тригонометрической форме:

$$x=-\frac{3}{5}<0,\ y=-\frac{4}{5}<0;$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{1}=1;$$

$$\varphi=\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\pi+\operatorname{arctg}\frac{-4/5}{-3/5}=\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\ \text{рад};$$

$$z=1\cdot\left(\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right).$$

Возведём полученное число в степень, используя формулу Муавра:

$$\left(\frac{-1+2i}{-1-2i}\right)^6=\left(1\cdot\left(\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)\right)^6=$$

$$=1^6\cdot\left(\cos\left(6\cdot\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)+i\cdot\sin\left(6\cdot\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)\right)=$$

$$=1\cdot\left(\cos\left(6\pi+6\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\cdot\sin\left(6\pi+6\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)=$$

$$=1\cdot\left(\cos\left(6\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\cdot\sin\left(6\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right).$$

Или в алгебраической форме:

$$\left(\frac{-1+2i}{-1-2i}\right)^6 \approx 1\cdot(0{,}752-i\cdot 0{,}659)=0{,}752-0{,}659\,i.$$

б) $\sqrt[3]{-1+i}\cdot\sqrt[3]{-1+i}$.

Преобразуем заданное выражение:

$$\sqrt[3]{-1+i}\cdot\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{(-1+i)^2}=\sqrt[3]{1-2i+(-1)}=\sqrt[3]{-2i}.$$

Найдём модуль и аргумент числа $z=-2i$ и запишем его в тригонометрической форме:

$$x=0,\ y=-2<0\ \Rightarrow\ r=|y|=2,\ \varphi=\frac{3\pi}{2};$$

$$z=2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Корень n-й степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме $z=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$, находится по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad \text{где } k=0,\ 1,\ldots,\ n-1.$$

Найдём заданные корни:

$$\sqrt[3]{-1+i}\cdot\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{-2i}=\sqrt[3]{2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\cdot\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}\right);$$

$$\sqrt[3]{-1+i}\cdot\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}k\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}k\right)\right);$$

при k = 0 получаем:

$$\left(\sqrt[3]{-1+i}\cdot\sqrt[3]{-1+i}\right)_0=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{2}\cdot(0+i\cdot 1)=\sqrt[3]{2}\,i;$$

при k = 1 получаем:

$$\left(\sqrt[3]{-1+i}\cdot\sqrt[3]{-1+i}\right)_1=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\ i;$$

при k = 2 получаем:

$$\left(\sqrt[3]{-1+i}\cdot\sqrt[3]{-1+i}\right)_2=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\sin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\ i.$$

Ответ:

а) $\left(\frac{-1+2i}{-1-2i}\right)^6=1\cdot\left(\cos\left(6\ \mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\cdot\sin\left(6\ \mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)=0{,}752-0{,}659\,i;$

б) $\left(\sqrt[3]{-1+i}\cdot\sqrt[3]{-1+i}\right)_0=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{2}\,i;$

$$\left(\sqrt[3]{-1+i}\cdot\sqrt[3]{-1+i}\right)_1=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\ i;$$

$$\left(\sqrt[3]{-1+i}\cdot\sqrt[3]{-1+i}\right)_2=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\ i.$$

№12 Задача 3 (формулировка полностью):

Найдите значение действительной и мнимой частей функции.

$\omega = \bar{z} - z^2$.

Решение:

Приведём функцию к виду $\omega(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ (учтём, что $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$):

$$\omega = (x - iy) - (x + iy)^2 = (x - iy) - \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot iy + (-1) \cdot y^2\right) = (x - iy) -$$
$$- \left(x^2 + i \cdot 2xy - y^2\right) = \left(x - x^2 + y^2\right) + (-iy - i \cdot 2xy) = \left(-x^2 + y^2 + x\right) + i \cdot (-2xy - y).$$

Таким образом:

$\operatorname{Re}\omega = u(x, y) = -x^2 + y^2 + x$ – действительная часть функции;

$\operatorname{Im}\omega = v(x, y) = -2xy - y$ – мнимая часть функции.

Ответ: $\operatorname{Re}\omega = -x^2 + y^2 + x$, $\operatorname{Im}\omega = -2xy - y$.

№13 Задача 4 (формулировка полностью):

Дана функция $\omega = \overline{z} \cdot z^2$. Найти значение функции при заданном значении *z*.

$z = 4 - 3i$.

Решение:

Вычислим значение функции при заданном значении z:

$z = 4 - 3i$, $\overline{z} = 4 + 3i$;

$z^2 = (4 - 3i)^2 = 16 - 24i + (-1) \cdot 9 = 7 - 24i$;

$\omega = \overline{z} \cdot z^2 = (4 + 3i) \cdot (7 - 24i) = 28 - 96i + 21i - (-1) \cdot 72 = 100 - 75i$.

Ответ: $\omega = 100 - 75i$.

№14 Задача 5 (формулировка полностью):

Найти Ln z.

$3-2i$.

Решение:

Определим модуль r и аргумент φ комплексного числа:

$$z=3-2i \quad\Rightarrow\quad x=3>0,\ y=-2<0;$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}=13^{\frac{1}{2}};$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\frac{-2}{3}=-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\ \text{рад.}$$

Запишем логарифм комплексного числа:

$$\operatorname{Ln}z=\ln r+i\cdot(\varphi+2\pi k);$$

$$\operatorname{Ln}(3-2i)=\ln 13^{\frac{1}{2}}+i\cdot\left(-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2\pi k\right)=\frac{1}{2}\ln 13+i\cdot\left(-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2\pi k\right).$$

Ответ: $\operatorname{Ln}(3-2i)=\frac{1}{2}\ln 13+i\cdot\left(-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2\pi k\right)$.

№15 Задача 6 (формулировка полностью):

Пользуясь условиями Коши – Римана, выяснить, является ли функция $\omega(z)$ дифференцируемой хотя бы в одной точке.

$\omega = \bar{z}$.

Решение:

Приведём функцию к виду $\omega(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ (учтём, что $z = x + i y$, $\bar{z} = x - i y$):

$\omega = \bar{z} = x - i y = x + i \cdot (- y)$;

$u(x, y) = x$ – действительная часть функции;

$v(x, y) = - y$ – мнимая часть функции.

Найдём частные производные от функций u(x; y) и v(x; y):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x)'_x = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (- y)'_x = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (- y)'_y = - 1.$$

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad 1 = - 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

Заметим, что первое условие не выполняется ни при каких значениях x и y. Следовательно, функция ω(z) не является дифференцируемой ни в одной из точек.

Ответ: функция ω(z) не является дифференцируемой ни в одной из точек.