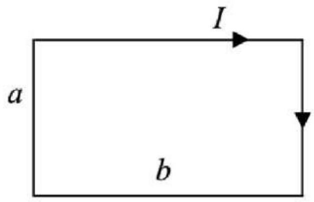
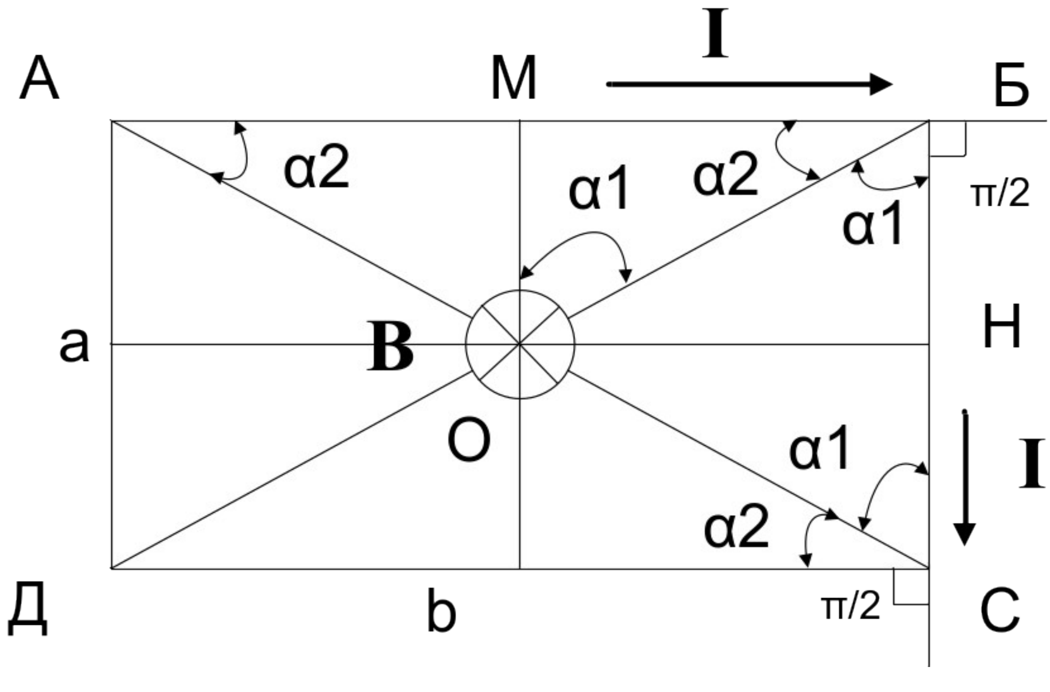
Задача №1 (Вариант 12)



Найти индукцию магнитного поля в центре прямоугольного проводящего контура со сторонами *a* и b, по которому течет ток силой *I*.

Дано:
I=5 А,
a=12 см=0,12 м
b=6 см=0,06 м
Найти:
B=?
Решение:

Для решения задачи необходимо использовать: $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.



Рассмотрим четыре участка, АБ, БС, СД, ДА.

Направление вектора магнитной индукции на каждом участке определим по правилу буравчика. В точке О результирующий вектор магнитной индукции направлен от нас. Применим принцип суперпозиции.

$$\vec{B} = \vec{B}_{АБ} + \vec{B}_{БС} + \vec{B}_{СД} + \vec{B}_{ДА} \qquad (1)$$

или в проекции на ось вектора $\vec{B}$

$$B = B_{АБ} + B_{БС} + B_{СД} + B_{ДА} \qquad (2)$$

Определим модуль вектора магнитной индукции на участке АБ.

Индукция магнитного поля в произвольной точке О, созданного отрезком проводника с током конечной длины, определим используя закон Био - Савара - Лапласа.

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OM}}\sin\alpha d\alpha, \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OM}}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1+\frac{\pi}{2}}\sin\alpha d\alpha, \qquad (3)$$

Где: $R_{ом}$ - расстояние от точки О до проводника АБ; $-\alpha_2$ и $\alpha_1+\pi/2$ углы, образованные радиус-вектором, проведенном в т. О соответственно из начала и конца проводника, с направлением тока.

Определим модуль вектора магнитной индукции на каждом участке.

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OM}}\sin\alpha d\alpha, \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OM}}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1+\frac{\pi}{2}}\sin\alpha d\alpha, \qquad (4)$$

$$B_{АБ} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OM}}\left(\cos\alpha_2 - \cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right), \qquad (5)$$

Определим модуль вектора магнитной индукции на участке БС.

Индукция магнитного поля в произвольной точке О, созданного отрезком проводника с током конечной длины, определим используя закон Био - Савара - Лапласа.

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OH}}\sin\alpha d\alpha, \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OH}}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2+\frac{\pi}{2}}\sin\alpha d\alpha, \qquad (6)$$

Где: $R_{он}$ - расстояние от точки О до проводника БС; $-\alpha_1$ и $\alpha_2+\pi/2$ углы, образованные радиус-вектором, проведенном в т. О соответственно из начала и конца проводника, с направлением тока.

Определим модуль вектора магнитной индукции на каждом участке.

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OH}} \sin\alpha d\alpha, \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OH}} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2 + \frac{\pi}{2}} \sin\alpha d\alpha \quad , \qquad (7)$$

$$B_{БС} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OH}} \left(\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2 + \frac{\pi}{2}) \right), \qquad (8)$$

Теперь для упрощения расчетов синусов и косинусов углов найдем гипотенузы прямоугольных треугольников

$$AO = БO = CO = ДO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

и расстояния $R_{OM} = OM = \frac{AД}{2} = \frac{a}{2}, \quad R_{OH} = OH = \frac{AБ}{2} = \frac{b}{2}$

Тогда формулы (5) и (8) упростим следующим образом

$$B_{AБ} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OM}} \left(\frac{AM}{AO} + \sin(\alpha_1) \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OM}} \left(\frac{b/2}{\sqrt{a^2 + b^2}/2} + \frac{MБ}{БO} \right) =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi (a/2)} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b/2}{\sqrt{a^2 + b^2}/2} \right) = \frac{2\mu_0 I * 2b}{4\pi a * \sqrt{a^2 + b^2}} =$$
$$= \frac{\mu_0 I b}{\pi a \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (9)$$

$$B_{БС} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OH}} \left(\frac{OM}{БO} + \sin(\alpha_2) \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_{OH}} \left(\frac{a/2}{\sqrt{a^2 + b^2}/2} + \frac{OM}{AO} \right) =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi (b/2)} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a/2}{\sqrt{a^2 + b^2}/2} \right) = \frac{2\mu_0 I * 2a}{4\pi b * \sqrt{a^2 + b^2}} =$$
$$= \frac{\mu_0 I a}{\pi b \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (10)$$

Далее учитывая равенство отрезков прямоугольника $AБ = СД, \quad БС = ДА$ преобразуем формулу (2)

$$B = B_{AБ} + B_{БС} + B_{СД} + B_{ДА} = 2B_{AБ} + 2B_{БС} \qquad (11)$$

Подставляя формулы (9) и (10) в формулу (11) получим итоговое выражения для вычисления индукцию магнитного поля в точке О

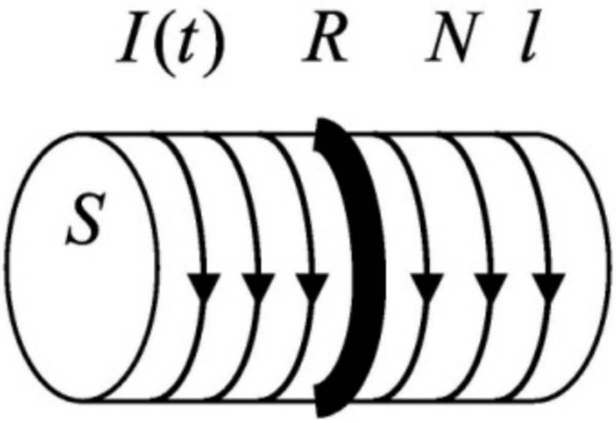
$$B = 2*\frac{\mu_0 I b}{\pi a\sqrt{a^2+b^2}} + 2*\frac{\mu_0 I a}{\pi b\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) =$$

$$\frac{2\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b^2+a^2}{ab}\right) = \frac{2\mu_0 I\sqrt{a^2+b^2}}{\pi ab} \qquad (12)$$

$$B = \frac{2*4*3{,}14*10^{-7}*5*\sqrt{0{,}12^2+0{,}06^2}}{3{,}14*0{,}12*0{,}06} \approx 7{,}45*10^{-5}$$

Ответ: $B = 7{,}45*10^{-5}$ Тл.

Задача №2 (Вариант 12)



На соленоид длиной l=10 см и площадью поперечного сечения S=5 кв. см надет проволочный виток сопротивлением R = 1 Ом. Обмотка соленоида имеет N=500 витков, и по нему идет ток, сила которого меняется со временем по заданному закону $I(t) = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. Найти зависимость от времени силы тока $I_1(t)$ в проволочном витке и построить график этой зависимости в времени от 0до t.

Дано:
l=10 см=0,1 м

$S = 5 \ см^2 = 5*10^{-4} \ м^2$

R=1 Ом
N=500
N_1=1
I_0=2 А
τ=1 с
t=1 с

Найти:

$I_1(t)$=?

Решение:

Для решения задачи необходимо использовать: $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная и т.к. в задаче не оговаривается среда в которой все происходит, то примем, что μ=1 – магнитная проницаемость для воздушной среды.

ЭДС индукции в соленоиде находим по формуле

$$\varepsilon = L\frac{dI}{dt}, \tag{1}$$

Где $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l}$ - индуктивность соленоида с N витками, длиной l и площадью S.

ЭДС индукции, наводимая в проволочном витке, при изменении тока в соленоиде равна

$$|\varepsilon_1| = \frac{\varepsilon}{N} = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{Nl}\frac{dI}{dt} = \frac{\mu\mu_0 NS}{l}\frac{dI}{dt} \tag{2}$$

Тогда ток, проходящий через виток по закону Ома равен

$$I_1 = \frac{|\varepsilon_1|}{R} = \frac{\mu\mu_0 NS}{Rl}\frac{dI}{dt} \tag{3}$$

Исходя из известных значений I_0 и τ найдем закон изменения тока в соленоиде в зависимости от времени

$$I(t) = 2\left(1 - e^{-t}\right) \tag{4}$$

Теперь продифференцируем полученное выражение

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d\left[2\left(1 - e^{-t}\right)\right]}{dt} = 2e^{-t} \tag{5}$$

Подставляя формулу (5) в формулу (3) получим итоговую формулу

$$I_1(t) = \frac{\mu\mu_0 NS}{Rl} * 2e^{-t} = \frac{2\mu\mu_0 NS}{Rl} * e^{-t} \tag{6}$$

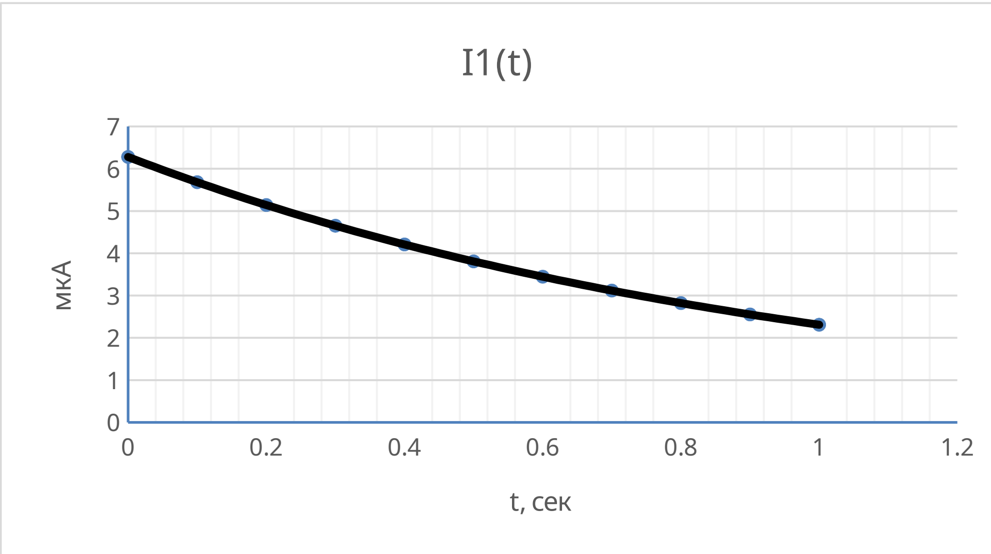
Подставляя все известные значения, в итоге получим

$$I_1(t) = \frac{2*1*4*3{,}14*10^{-7}*500*5*10^{-4}}{1*0{,}1} * e^{-t} = \left(6{,}28*10^{-6}\right)e^{-t}$$ А

или

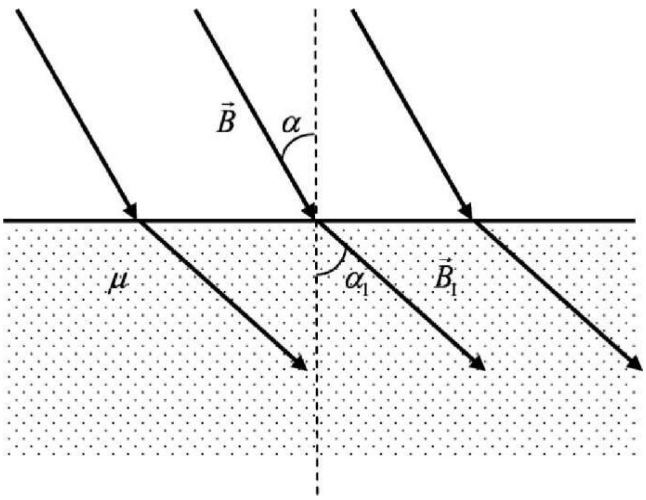
$I_1(t) = 6{,}28*e^{-t}$ мкА

Постоим график данной функции в интервале $t \subset [0,1]$ сек.



Ответ: $I_1(t) = 6{,}28*e^{-t}$ мкА.

Задача №3 (Вариант 12)



Полупространство, заполненное веществом с магнитной проницаемостью μ, отделено от вакуума бесконечной плоскостью. В вакууме имеется однородное магнитное поле с индукцией B, направление которого составляет угол α с нормалью к поверхности раздела. Найти модуль индукции B_1 магнитного поля в веществе и угол α_1 между вектором индукции магнитного поля в веществе и нормалью к поверхности раздела.

Дано:

$B = 1 \quad мТл = 10^{-3} \quad Тл$

$\alpha = 15^{o} = \frac{\pi}{12}$

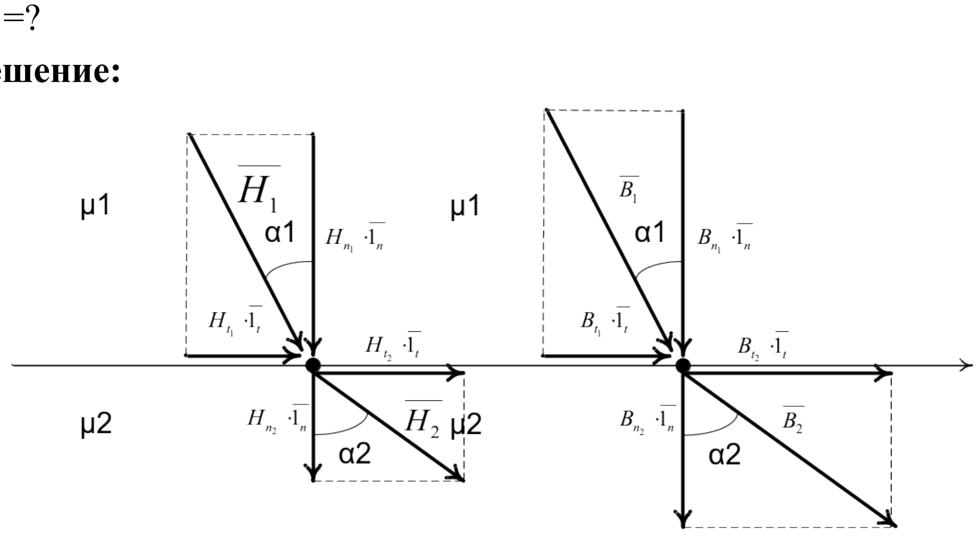
$\mu = 15$

Найти:

$B_1 = ?$

$\alpha_1 = ?$

Решение:



Т.к. в точке на границе 2-х сред нету тока, то касательные составляющие вектора напряженности магнитного поля (следствие первого уравнения Максвелла) в веществе 1 и веществе 2 равны

$$H_{t_1} = H_{t_2}, \qquad (1)$$

Т.к. $B = \mu_0 H$, где $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$ Гн/м − магнитная постоянная то формулу (1) запишем как

$$\frac{B_{t_1}}{\mu_1 \mu_0} = \frac{B_{t_2}}{\mu_2 \mu_0}, \quad \frac{B_1 \sin\alpha_1}{\mu_1 \mu_0} = \frac{B_2 \sin\alpha_2}{\mu_2 \mu_0} \qquad (2)$$

Т.к. необходимо найти 2 неизвестных воспользуемся еще законом преломления магнитных полей на границе 2-х сред

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad (3)$$

Теперь преобразуем формулы (2) и (3) для наших исходных данных, т.е. $B_1 \to B$, $B_2 \to B_1$, $\alpha_1 \to \alpha$, $\alpha_2 \to \alpha_1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 \to \mu$

$$\frac{B \sin\alpha}{\mu_0} = \frac{B_1 \sin\alpha_1}{\mu \mu_0} \qquad (4)$$

$$\frac{tg\alpha}{tg\alpha_1} = \frac{1}{\mu} \qquad (5)$$

В начале из формулы (5) найдем угол α_1

$$tg\alpha_1 = \mu * tg\alpha, \quad \alpha_1 = arctg(\mu * tg\alpha) \qquad (6)$$

Получаем

$$\alpha_1 = arctg\left(15 * tg\frac{\pi}{12}\right) \approx 76^0$$

Теперь из формулы (4) выразим B_1

$$B_1 = \mu B \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$$

В итоге найдем

$$B_1 = 15 * 10^{-3} \frac{\sin 15^0}{\sin 76^0} \approx 0,004$$ Тл

Ответ: $B_1 = 4$ мТл, $\alpha_1 = 76^0$.