**Пример 1:** Найти графически корни уравнения: $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{ax}+\frac{x}{a^2+x^2}=0$, где $a=0{,}8475; e=2{,}71828...$

Решение:

Первый способ: так как $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{ax}$ всегда положительно, а $\frac{x}{a^2+x^2}$ тоже положительно при x>0, то данное уравнение не имеет положительных корней.

Вычислим значение функции $f(x)\approx 1{,}25 * 2{,}72^{0{,}85x}+\frac{x}{0{,}717+x^2}$ для нескольких отрицательных значений x:

$x_1=0$ $\quad f(x_1)=1{,}25$

$x_2=-\frac{1}{0{,}85}\approx -1{,}18$ $\quad f(x_2)=-1{,}10$

$x_3=-\frac{2}{0{,}85}\approx -2{,}36$ $\quad f(x_3)=-0{,}21$

$x_4=-\frac{3}{0{,}85}\approx -3{,}54$ $\quad f(x_4)=-0{,}21$

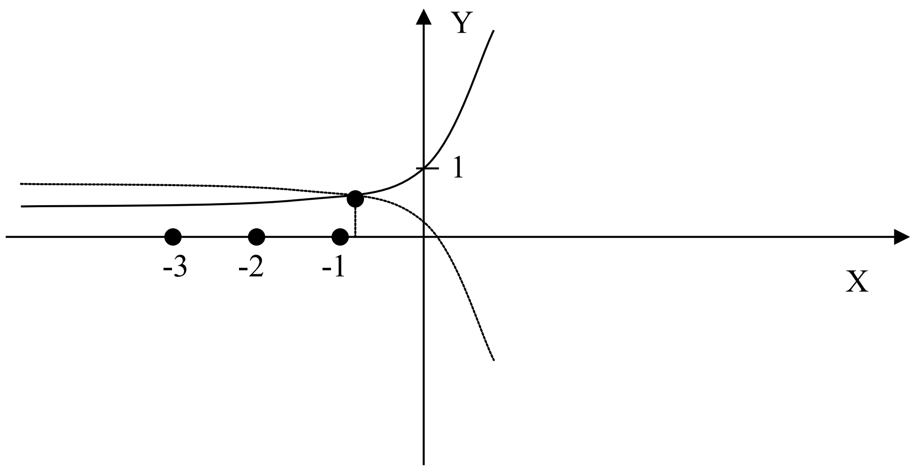
То есть при $x<x_4$ разность остается отрицательной, следовательно, ось OX мы не пересекаем, и наш искомый корень принадлежит интервалу (0;-1,18), так как в этом интервале функция меняет знак.

$x_5=\frac{0{,}5}{0{,}85}\approx -0{,}59$ $\quad f(x_5)=0{,}21$

Точка пересечения графика с осью абсцисс определяет приближенное значение корня

$x\approx -0{,}85$

Второй способ: уравнение записываем в виде $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{ax}=-\frac{x}{a^2+x^2}$. Как и ранее, графики функций в левой и правой части строим по точкам. Построение следует вести более точно около точки пересечения:



**Пример 2:** Вычислить с точностью до 0,01 корень уравнения $f(x)=x^3-2x^2-4x-7=0$ на промежутке (3,4)

Решение:

1)Используем метод касательных:

Так как $f(3)=$ -10 , $f(4)=$ 9 (то есть знаки на концах промежутка различные), то на этом промежутке наша функция пересекает ось ОХ.

Вычислим первую и вторую производные функции:

$f'(x)=3x^2-4x-4$; $f''(x)=6x-4$,

так как значение обеих производных на (3,4) положительно, то касательную проводим в точке b=4.

Так как $f(4)>0$, то $x_1=4-\dfrac{f(4)}{f'(4)}=4\dfrac{9}{28}\approx 3,68$.

$f(3,68)=1,03$; $f'(3,68)=21,9$;

$x_2=3,68-\dfrac{f(3,68)}{f'(3,68)}=3,68-0,047=3,633.$

Очевидно, что дальнейшие вычисления не повлияют на цифру сотен: $f(3,633)=0,020; f(3,630)=-0,042.$

Итак, с точностью большей заданной, x=3,63.

2) Используем метод хорд:

Так как $f(3)=$ -10 , $f(4)=$ 9 (то есть знаки на концах промежутка различные), то на этом промежутке наша функция пересекает ось ОХ.

$f'(x)>0$ на (3,4), следовательно: $x_1=3+\dfrac{10}{19}\approx 3,53$;

$f(3,53)\approx -2,05.$ Следовательно, $x_2\in(3,53;4)$

$x_2=3,53+\dfrac{0,47f(3,53)}{f(4)-f(3,53)}=3,62; f(3,62)=-0,24<0$

$x_3\in(3,62;4)$

$x_3=3,62+\dfrac{0,380,24}{9,24}=3,63; f(3,63)=-0,04$.

Так как $x_4$ отличается от $x_3$ меньше чем на 0,01, значит $x_3$ и есть искомое приближение.

Для проверки: $f(3,64)=0,17>0$ $f(3,63)=-0,04<0$.

## Задачи

Пользуясь любым из известных методов, определить с точностью до 0,001 корни следующих уравнений:

1. $x^3 - 6x + 2 = 0$
2. $x^4 - x - 1 = 0$
3. $x^3 - x - 1 = 0$
4. $\cos x = x^2$
5. $x - 0{,}1\sin x = 2$
6. $\cos x - x = 0$
7. $x^3 + 2x - 8 = 0$
8. $3x^5 - 25x^3 + 60x - 1 = 0$
9. $2 - x = \ln x$
10. $\sin x = x^2$

## Приложения теории рядов.

Понятие о целях представления сложных для вычислений функций, о точном вычислении «неберущихся» интегралов, о раскрытии неопределенностей, о вычислениях высокоточных значений сложных функций с помощью «карандаша, бумаги и головы», о составлении высокоточных таблиц логарифмов и тригонометрических функций.

**Пример:** Разложить в ряд Маклорена функцию $(1+x)^m$.

Решение: Для нахождения ряда Маклорена вычисляем значения функции $f(x) = (1+x)^m$ $(m \neq 0, m \neq n$, где n-натуральное число) и ее производные при x=0:

$f(x) = (1+x)^m$, $f(0) = 1$

$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$, $f'(0) = m$

$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$, $f''(x) = m(m-1)$

$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$, $f'''(0) = m(m-1)(m-2)$

Отсюда видно, что:

$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots[m-(n-1)](1+x)^{m-n}$

$f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots[m-(n-1)], (n = 1,2,3\ldots)$

Подставляем эти значения в ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{x!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Получаем: $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$

Найдем радиус сходимости этого ряда:

$$|a_n| = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!};\ |a_{n+1}| = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}$$

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$. Следовательно, ряд сходится в интервале (-1,1).

**Пример 2:** Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,01.

Решение: Данный интеграл не выражается в конечном виде через элементарные функции. Разложим его подинтегральную функцию в степенной ряд по формуле: $e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+...+\frac{x^{n}}{n!}+...$

Заменим х на $(-x)^2$:

$e^{-x^{2}}=1-\frac{x^{2}}{1!}+...+\frac{x^{4}}{2!}-...+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{n!}+...$

Отсюда: $\int\limits_{0}^{1}(1-\frac{x^{2}}{1!}+\frac{x^{4}}{2!}-\frac{x^{6}}{3!}+\frac{x^{8}}{4!}-\frac{x^{10}}{5!}+...)dx=(x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{2!5}-\frac{x^{7}}{3!7}+...)\Big|_{0}^{1}=$

$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!5}-\frac{1}{3!7}+\frac{1}{4!9}-\frac{1}{5!11}+...$

Вычисляя члены этого ряда с точностью до 0,001, замечаем, что уже шестой член по абсолютной величине <0,001, значит, надо взять сумму первых пяти членов, что обеспечивает требуемую точность: $\int\limits_{0}^{1}e^{-x^{2}}dx\approx 0,747.$

## Задачи

1. Разложить в ряд Маклорена $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

2. Почленным интегрированием ряда функции $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ написать ряд Маклорена для $\arcsin x$

3. Вычислить $\sqrt[5]{1,25}$ с точностью до 0,001

4. Вычислить $\ln 1,02$ с точностью до 0,0001

5. Пользуясь рядами, вычислить с точностью до 0,0001 интеграл:

$\int\limits_{0}^{0,5}xe^{-x}dx$

6. Пользуясь рядами, вычислить с точностью до 0,001 интеграл:

$\int\limits_{0}^{0,2}\frac{dx}{\sqrt{x^{2}+1}}$

7. Вычислить sin $10^{o}$ с точностью до 0,0001

8. Пользуясь рядами, вычислить с точностью до 0,01 интеграл:

$\int\limits_{0}^{0,25}\sqrt{x^{3}+1}dx$

Найти разложения в ряд Маклорена следующих основных элементарных функций

9. $\cos x$

10. $\ln(x+1)$

**Приближенное вычисление интегралов.** 4 часа

Раздел «приближенное вычисление интегралов», а многие студенты, особенно заочного отделения, лишены возможности закрепить полученный ранее на занятиях материал, следует начинать с полуочевидных и легко запоминающихся формул прямоугольников, трапеции, формул Симпсона, затем перейти к интерполяционным полиномам. Заканчивать занятие желательно примерами вычисления центров тяжести или моментов инерции плоских конструкций усложненной геометрии.

**Пример 1:** по формулам Симпсона и трапеций вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ и сравнить результаты с точным значением (0,785398).

Решение: Разбиваем сегмент [a,b] на 10 равных частей:

$x_0 = 0,0$ $y_0=1,0000$
$x_1 = 0,1$ $y_1=0,9901$
$x_2 = 0,2$ $y_2=0,9615$
$x_3 = 0,3$ $y_3=0,9174$
$x_4 = 0,4$ $y_4=0,8621$
$x_5 = 0,5$ $y_5=0,8000$
$x_6 = 0,6$ $y_6=0,7353$
$x_7 = 0,7$ $y_7=0,6711$
$x_8 = 0,8$ $y_8=0,6098$
$x_9 = 0,9$ $y_9=0,5525$
$x_{10} = 1,0$ $y_{10}=0,5000$

По формуле трапеций: $\mathrm{Y} = \frac{1}{10}(\frac{1,500}{2} + 7,0.398) + R_n = 0,78498 + R_n, R_n = 0,0004$

По формуле Симпсона: берем 5 ординат: n=2, $\frac{b-a}{3n} = \frac{1}{6}$

$x_0 = 0,00$ $\frac{1}{2}y_0 = 0,5$

$x_{1/2} = 0,25$ $2y_{1/2} = 1,88235$

$x_1 = 0,5$ $y_1 = 0,8000$

$x_{3/2} = 0,75$ $2y_{3/2} = 1,28000$

$x_2 = 1,00$ $\frac{1}{2}y_2 = 0,25000$

$\frac{1}{2}y_0 + 2y_{1/2} + y_1 + 2y_{3/2} + \frac{1}{2}y_2 = 4,71235$

$\mathrm{Y} = \frac{1}{6}4,71235 + R_{n1} = 0,78539 + R_{n1}, R_{n1} = 0,00001$, т.е. $R_{n1}$ в 40 раз меньше, чем $R_n$, полученное по формуле трапеций.

## Задачи

Вычислить интегралы по формуле Ньютона-Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников и трапеций и сравнить результаты, если:

1. $\int_1^5 (x^2 - 2)dx$, при n=6
2. $\int_0^4 \sqrt{x}dx$, при n=8
3. $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$, при n=8
4. $\int^9 \sqrt{x}dx$, при n=4

5. Выписать формулы для интерполяционного многочлена первой степени.

С помощью формулы Симпсона вычислить следующие интегралы:

6. $\int^9 \sqrt{x}dx$, при n=4
7. $\int_0^\pi \sqrt{3+\cos x}dx$, при n=6
8. $\int_1^5 (x - 2)dx$, при n=6
9. $\int_0^4 \sqrt{x}dx$, при n=8
10. $\int_1^5 (x - 4)dx$, при n=4

## Численное дифференцирование.

В теме «численное интегрирование» желательно выделить приложения к «грубым» оценкам, которые необходимы при приближенных инженерных оценках или вычислениях на стадии эскизного проектирования.

**Пример 1:** Вычислить приближенно $\sqrt[3]{26}$ при помощи формул численного дифференцирования.

Решение: Воспользуемся формулой $f(x_0+h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h$.

Получим: $\sqrt[3]{x_0+h} \approx \sqrt[3]{x_0} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}h$.

Пусть $x_0 = 27$, тогда h = -1:

$$\sqrt[3]{26} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27}}(-1) = 3 - \frac{1}{27} \approx 2{,}96$$

**Пример 2:** Вычислить ln1,05

Решение: возьмем $x_0 = 1$, h=0,05, тогда:

$$\ln(x_0+h) \approx \ln(x_0) + \frac{1}{x_0}h$$

$$\ln 1{,}05 \approx \ln 1 + 1 * 0{,}05 = 0{,}05.$$

## Задачи

Вычислить при помощи формул численного дифференцирования приближенное значение:

1. $\sqrt[3]{124}$
2. $\sqrt[4]{82}$
3. $tg 44$
4. $\ln 0{,}97$
5. $\ln(e + 0{,}1)$
6. $\cos 60^\circ 6'$
7. $\sqrt[4]{80008}$
8. $\ln(e + 0{,}2)$
9. $\sqrt{404}$
10. $\cos 59^\circ 6'$.