Министерство образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра автоматизации обработки информации (АОИ)

З.А. Смыслова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

2000

Смыслова З.А.
Дискретная математика: Учебное пособие. - Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2000. - 116 с.

Данное учебное пособие содержит теоретический материал по теории множеств и комбинаторике, математической логике, основам теории графов, а также варианты двух контрольных работ для студентов специальности 061000 "Государственное и муниципальное управление", обучающихся по дистанционной форме. Приведены примеры решения задач контрольных работ.

Пособие может быть использовано для студентов заочной и дневной форм обучения.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1 Множества и операции над ними

1.1.1. Понятие множества

Теория множеств опирается на три первичных понятия:

1) множество;
2) элемент;
3) принадлежность.

Строгого определения этим понятиям не дается, описывается только их применение.

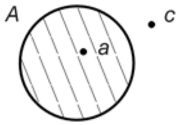


Рис. 1.1.

На рисунке 1.1 буквой A обозначено множество, элементами которого являются точки заштрихованной части плоскости, при этом точка a принадлежит множеству A ($a \in A$), точка c не принадлежит множеству A ($c \in A$).

1.1.2. Способы задания множеств

Множество можно задать, перечислив все его элементы: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{-1,3,6,8\}$. Порядок записи элементов множества произволен. Часто задают множество, указав его характеристическое свойство, которое для каждого элемента позволяет выяснить, принадлежит он множеству или нет.

Например,

$$B = \{\, x \mid x \text{ – целый корень уравнения } 2x^3 - x^2 + 1 = 0\},$$

$$\mathrm{C} = \{\mathrm{x} \mid -1 \le \mathrm{x} \le 7, \mathrm{x} \text{ – целое }\}.$$

В дальнейшем для известных числовых множеств будут использоваться обозначения:

N = { 1,2,3,…} – множество натуральных чисел;

Z = { …, -2,-1,0,1,2,…} – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

1.1.3. Основные определения

Пустым множеством называется множество $\varnothing$, не содержащее ни одного элемента, т.е. для любого элемента *x* выполняется $x \notin \varnothing$.

Универсальным называется множество **U** всех элементов, рассматриваемых в данной задаче.

Пример. Пусть **U** = **Z** и требуется найти все решения уравнения $x^2 = 2$. Множество **M** решений этой задачи есть пустое множество: **M** = $\varnothing$.

Пусть теперь **U** = **R**. Тогда множество **M** решений уравнения $x^2 = 2$ не пусто: **M** = $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Будем говорить, что множество A ***включается*** во множество B $(A \subseteq B)$, если каждый элемент множества A является элементом множества B (говорят также, что A является подмножеством множества B). Из определения включения следуют свойства:

1) $A \subseteq A$ для любого множества A;
2) Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
3) $\varnothing \subseteq A$ для любого множества A;
4) $A \subseteq \mathbf{U}$ для любого множества A.

Определим понятие ***равенства*** множеств: A=B тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два включения $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.е. каждый элемент множества A является элементом множества B и каждый элемент множества B является элементом множества A.

1.1.4. Диаграммы Эйлера – Венна

Эти диаграммы применяются для наглядного изображения множеств и их взаимного расположения.

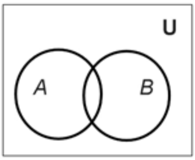


Рис. 1.2. Диаграмма Эйлера-Венна

Универсальное множество **U** изображается в виде прямоугольника, а произвольные множества – подмножест-ва универсального – в виде кругов (рис. 1.2).

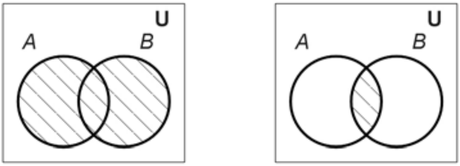
1.1.5. Операции над множествами

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (рис. 1.3, *а*).

Пример. Если $A = \{0,1,2\}, B = \{-1,2,3\}$, то $A \cup B = \{-1,0,1,2,3\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству A, и множеству B (рис. 1.3, *б*).

Пример. Если $A=\{0,1,2\}, B=\{-1,2,3\}$, то $A\cap B=\{2\}$.



а *б*

Рис. 1.3. Операции над множествами:
а) объединение множеств *A* и *B;*
б) пересечение множеств *A* и *B*

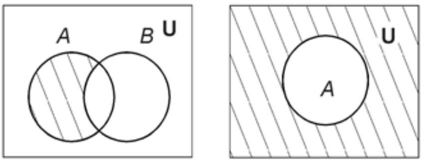
Разностью множеств A и B называется множество $A\setminus B$ тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B (рис. 1.4, *а*).

Пример. $A\setminus B=\{0,1,2\}\setminus\{-1,2,3\}=\{0,1\}$;

$$B\setminus A=\{-1,2,3\}\setminus\{0,1,2\}=\{-1,3\}.$$

Дополнением множества A до универсального **U** называется множество $\overline{A}=\mathbf{U}\setminus A$ (рис. 1.4, *б*).

Пример. Если $A=\{0,1,2\}$, $\mathbf{U}=\{0,1,2,3,4,5\}$, то $\overline{A}=\mathbf{U}\setminus A=\{3,4,5\}$.



а *б*

Рис. 1.4. Операции над множествами:
а) разность множеств *A* и *B;*
б) дополнение множества *A*

1.1.6. Системы множеств

Элементы множества сами могут быть множествами: $A=\{\{1\},\{2,3\},\{1,2\}\}$; в таком случае удобно говорить о системе множеств. Рассмотрим такие системы множеств, как булеан и разбиение множеств.

Булеаном B***(X)*** множества X называется множество всех подмножеств множества X. Например, для множества $X=\{0,1\}$ булеаном является множество $\mathrm{B}(X)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$.

Разбиением R***(X)*** множества X называется система его непустых непересекающихся подмножеств, в объединении дающая множество X (рис. 1.5).

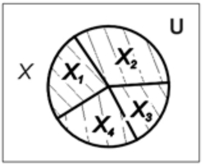


Рис. 1.5. Разбиение множества $R(X)=\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

Например, для множества $X=\{1,2,3,4,5\}$ можно построить разбиение $\mathrm{R}_1(X)=\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$, состоящее из двух элементов (они называются блоками разбиения), или разбиение $\mathrm{R}_2(X)=\{\{1\},\{2,5\},\{3\},\{4\}\}$ – из четырех блоков; возможны и другие разбиения этого множества X.

1.1.7. Законы алгебры множеств

Так же, как операции обычной алгебры, операции над множествами выполняются по законам (табл. 1.1), которые доказываются на основе введенных выше определений. Особенностью алгебры множеств является закон идемпотентности, благодаря которому в алгебре множеств нет числовых коэффициентов и степеней.

Таблица 1.1

Законы алгебры множеств

№	Формулы	Название
1	$A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cup\varnothing=A$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$	Свойства пустого множества
2	$A\cup U=U$; $A\cap U=A$; $A\cup\bar{A}=U$	Свойства универсального множества
3	$A\cap B=B\cap A$; $A\cup B=B\cup A$	Закон коммутативности
4	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$; $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	Закон ассоциативности
5	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	Закон дистрибутивности
6	$\overline{\overline{A}}=A$	Закон двойного дополнения
7	$A\cap A=A$; $A\cup A=A$	Законы идемпотентности
8	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;	Законы де Моргана
9	$A\cup(A\cap B)=A$; $A\cap(A\cup B)=A$	Законы поглощения

1.1.8. Решение задач 1-3 контрольной работы № 1

*Задача 1***.** Решить задачу, пользуясь диаграммой Эйлера-Венна.

Группа туристов из 100 человек пробыла в городе N три дня. За это время драматический театр посетили 28 туристов, оперный – 42, кукольный – 30. И в драматическом, и в оперном побывало 10 человек; в драматическом и кукольном – 8; в оперном и кукольном – 5. Все три театра посетили три человека. Сколько туристов не были ни в одном театре?

Решение. В задаче идет речь о трех множествах *Д, О, К* – зрителей драмы, оперы и кукольного спектакля соответственно. Универсальное множество **U** – это множество туристов группы. Используя обозначение $n(X)$ – количество элементов множества *X*, запишем кратко условие задачи:

$$n(\mathbf{U}) = 100;$$

$$n(Д) = 28; n(O) = 42; n(К) = 30;$$

$$n(Д \cap O) = 10;\ n(Д \cap К) = 8;\ n(O \cap К) = 5;$$

$$n(Д \cap К \cap O) = 3.$$

В задаче требуется найти $n(\overline{Д \cup O \cup К}) = n(U \setminus (Д \cap O \cap К))$.

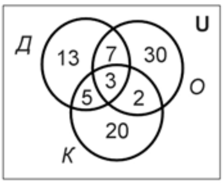


Рис. 1.6. Диаграмма к задаче 1

Перенесем эти данные на диаграмму Эйлера-Венна. Разметку диаграммы начинаем с множества $Д \cap O \cap К$ – здесь три элемента. В множестве $Д \cap O$ - 10 элементов, но три из них уже учтены. Оставшиеся 7 элементов проставляем на диаграмме и т.д.

Теперь на диаграмме (рис. 1.6) все элементы учтены ровно по одному разу, следовательно, количество туристов, которые побывали хотя бы в одном театре, равно

$$n(Д \cup O \cup К) = 13 + 7 + 30 + 5 + 3 + 2 + 20 = 80.$$

Количество туристов, не побывавших ни в одном театре

$$n(\mathbf{U} \setminus (Д \cup O \cup К)) = 100 - 80 = 20.$$

Ответ: не были ни в одном театре 20 человек.

<u>*Задача 2*</u>**.** Задано универсальное множество $\mathbf{U} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и множества $X = \{2,4,7\}, Y\{1,3,5,\}, Z = \{2,3,5,6\}$. Перечислить элементы множества $W = (\overline{Z} \cap Y) \cup X$. Записать булеан множества X и какое-либо разбиение множества *Y*.

Решение. Для нахождения множества *W* выполним операции над множествами в следующем порядке:

1) $\overline{Z} = U \setminus Z = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{2,3,5,6\} = \{1,4,7\}$ - по определению операции дополнения;

2) $\overline{Z} \cap Y = \{1,4,7\} \cap \{1,3,5,7\} = \{1,7\}$ - по определению операции пересечения множеств;

3) $W = (\overline{Z} \cap Y) \cup X = \{1,7\} \cup \{2,4,7\} = \{1,2,4,7\}$.

Итак, $W = \{1,2,4,7\}$.

В булеан множества *X* включаем пустое множество, само множество *X* (см. свойства включения в 1.1.3), все одноэлементные подмножества, все двухэлементные подмножества множества *X*:

$$\mathrm{B}(X) = \{\ \varnothing, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2,7\}, \{2,4\}, \{4,7\}, \{2,4,7\}\ \}.$$

Для множества Y построим разбиение, состоящее из трех блоков $\mathrm{R}(Y) = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$, например, таким образом:

$$Y_1 = \{1,7\}, Y_2 = \{3\}, Y_3 = \{5\}.$$

Определение разбиения выполняется: множества Y_1, Y_2, Y_3 не пусты, не пересекаются ($Y_1 \cap Y_2 = \varnothing,\ Y_2 \cap Y_3 = \varnothing,\ Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$), их объединение равно множеству *Y*:

$$Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 = (Y_1 \cup Y_2) \cup Y_3 = (\{1,7\} \cup \{3\}) \cup \{5\} = \{1,3,7\} \cup \{5\} =$$
$$= \{1,3,5,7\}.$$

<u>*Задача 3*</u>. Упростить выражение, пользуясь законами алгебры множеств:

$$A \cap (\overline{A} \cup B) \cup (B \cup C) \cup B.$$

Решение. Договоримся считать, что операция пересечения множеств имеет более высокий приоритет, чем объединение множеств, т.е., если нет скобок, изменяющих приоритет, вначале выполняется пересечение, а затем объединение. Пользуясь этим правилом и законом ассоциативности, определим порядок действий:

$$(A \overset{1}{\cap} (\overline{A} \cup B)) \overset{3}{\cup} ((B \cup C) \overset{2}{\cup} B).$$

Выполним преобразования, указывая номер закона (табл. 1.1) над знаком равенства:

1) $A \cap (\overline{A} \cup B) \overset{5}{=} (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \overset{1}{=} \varnothing \cup (A \cap B) \overset{1}{=} A \cap B$;

2) $(B\cup C)\cup B\overset{3}{=}(C\cup B)\cup B\overset{4}{=}C\cup(B\cup B)\overset{7}{=}C\cup B$;

3) $(A\cap B)\cup(C\cup B)\overset{3}{=}(A\cap B)\cup(B\cup C)\overset{4}{=}((A\cap B)\cup B)\cup C\overset{3}{=}$

$=(B\cup(A\cap B))\cup C\overset{9}{=}B\cup C$.

Ответ: $B\cup C$.

1.1.9. Контрольные вопросы и упражнения

1. Вставьте обозначения числовых множеств:

- множество натуральных чисел;

- множество целых чисел;

- множество рациональных чисел;

- множество действительных чисел.

2. Вставьте пропущенный знак $\in$ или $\notin$:

117 ____ **N**; 22,4 ____ **Z**; 4/3 ____ **Q**;

$\sqrt{2}$ ____ **Q**; $\sqrt{75}$ ____**R**; π ____ Z.

3. Принадлежит ли множеству корней уравнения $x^2-5x+6=0$ число $x=-3$?

4. Какими способами можно задать множество?

5. Запишите множество действительных корней уравнения $3x+4=0$. Как записать ответ, если требуется найти множество целых корней этого уравнения?

6. Что такое подмножество данного множества? Какой символ используется для записи “множество A является подмножеством множества B”? Запишите его: A _____ B.

7. Вставьте пропущенный символ $\in$ или $\subseteq$:

1 ____ {1,2,3}; {1}____ {1,2,3};

$\varnothing$ ____ {1,2,3}; {2,3}____ {1,2,3}.

8. Обведите кружком номер правильного ответа:

Множество всех элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B, называется:

1) объединением множеств A и B;
2) пересечением множеств A и B;
3) разностью множеств A и B.

9. Вставьте пропущенные знаки операций над множествами:

$\{a,b,c\}$ ___ $\{d,b,e\}=\{b\}$;

$\{a,b,c\}$ ___ $\{c,d\}=\{a,b,c,d\}$;

$\{a,b,c\}$ ___ $\{a,d\}=\{b,c\}$.

10. Что такое булеан множества X?

11. Является ли булеаном множества $\{a,b,c\}$ система подмножеств $\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$?

12. Является ли разбиением множества $\{a,b,c\}$ система подмножеств $\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$?

13. Нарисуйте диаграмму Эйлера – Венна для множества $A\cap(B\cup C)$. Нарисуйте диаграмму для $(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Сравните заштрихованную часть на обеих диаграммах. Как называется закон, который Вы проиллюстрировали?

14. Нарисуйте диаграммы Эйлера – Венна для левой и правой частей закона де Моргана. Сравните их.

15. Запишите законы алгебры множеств. Запомните их названия.

1.2. Бинарные отношения

1.2.1. Декартово произведение множеств

Декартовым произведением $X\times Y$ двух множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x,y) таких, что $x\in X$, а $y\in Y$.

Пример 1. Пусть $X=\{1,2\}, Y=\{-1,0,1\}$. Тогда

$$X\times Y=\{(1,-1),(1,0),(1,1)\,(2,-1),(2,0),(2,1)\},$$

$$Y\times X=\{(-1,1),(-1,2),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}.$$

Очевидно, что $X\times Y\neq Y\times X$, т.е. для операции декартова произведения множеств закон коммутативности не выполняется.

Наглядно декартово произведение множеств можно представить в виде графика. На рис. 1.7 звездочками отмечены элементы множества $X\times Y=\{1,2,3\}\times\{2,4\}$.

Декартовым произведением множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ будем называть множество $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что $x_i\in X_i$, $i=1,2,\ldots,n$.

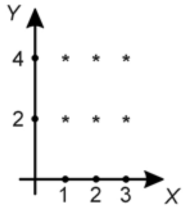


Рис. 1.7. График декартова произведения X x Y

1.2.2. Определение бинарного отношения

Пусть среди трех людей (назовем их Андрей, Василий и Сергей) двое знакомы друг с другом (Андрей и Василий) и знают третьего (Сергея), но тот их не знает. Как описать отношения между этими людьми? Имеем множество $X=\{A.B,C\}$, из элементов которого составлены упорядоченные пары: (A,B), (B,A), (A,C), (B,C), т.е. выделено некоторое подмножество декартова произведения $X \times X$. Это подмножество и описывает связи между элементами множества X.

<u>*Определение*</u>. Говорят, что на множестве X задано бинарное отношение R, если задано подмножество декартова произведения $X \times X$ (т.е. $R \subseteq X \times X$).

Пример 2. Пусть $X = \{1,2,3,4\}$. Зададим на X следующие отношения:

$T = \{(x, y)|\ x, y \in X, x = y\}$ – отношение равенства;

$P = \{(x, y)|\ x, y \in X, x = y - 1\}$ – отношение предшествования;

$Q = \{(x, y)|\ x, y \in X, x$ делится на $y\}$ – отношение делимости.

Все эти отношения заданы с помощью характеристического свойства. Ниже перечислены элементы этих отношений:

$T = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$;

$P = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$;

$Q = \{(4,4),(4,2),(4,1),(3,3),(3,1),(2,2),(2,1),(1,1)\}$.

Тот факт, что пара (x, y) принадлежит данному отношению R, будем записывать: $(x, y) \in R$ или xRy. Например, для отношения Q запись $4Q2$ означает, что 4 делится на 2 нацело, т.е. $(4,2) \in Q$.

Областью определения D_R бинарного отношения R называется множество $D_R = \{x|\ (x, y) \in R\}$.

Областью значений E_R называется множество $E_R = \{y|\ (x, y) \in R\}$.

Так, для отношения P из примера 2 областью определения является множество $D_P = \{1,2,3\}$, а областью значений – $E_P = \{2,3,4\}$.

1.2.3. Способы задания бинарного отношения

Бинарное отношение можно задать, указав характеристическое свойство или перечислив все его элементы. Существуют и более наглядные способы задания бинарного отношения: график отношения, схема отношения, граф отношения, матрица отношения.

График отношения изображается в декартовой системе координат; на горизонтальной оси отмечается область определения, на вертикальной – область значений отношения; элементу отношения (x,y) соответствует точка плоскости с этими координатами. На рис. 1.8, *а* приведен график отношения Q примера 2.

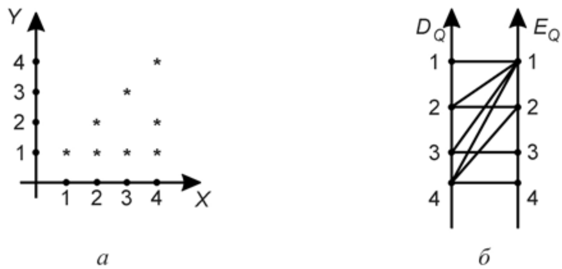


Рис. 1.8. График отношения Q (*а*) и схема отношения Q (*б*)

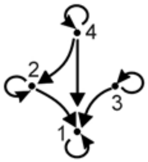
Схема отношения изображается с помощью двух вертикальных прямых, левая из которых соответствует области определения отношения, а правая – множеству значений отношения. Если элемент (x,y) принадлежит отношению R, то соответствующие точки из D_R и E_R соединяются прямой. На рис. 1.8, *б* приведена схема отношения Q из примера 2.

Граф отношения $R \subseteq X \times X$ строится следующим образом. На плоскости в произвольном порядке изображаются точки – элементы множества X. Пара точек x и y соединяется дугой (линией со стрелкой) тогда и только тогда, когда пара (x,y) принадлежит отношению R. На рис. 1.9, *а* приведен граф отношения Q примера 2.

Матрица отношения $R \subseteq X \times X$ – это квадратная таблица, каждая строка и столбец которой соответствует некоторому элементу множества X. На пересечении строки x и столбца y ставится 1, если пара $(x, y) \in R$; все остальные элементы матрицы заполняются нулями. Элементы матрицы нумеруются двумя индексами, первый равен номеру строки, второй - номеру столбца. Пусть $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Тогда матрица отношения $R \subseteq X \times X$ имеет n строк и n столбцов, а ее элемент r_{ij} определяется по правилу:

$$r_{i\,j}=\begin{cases}1, & \textit{если}\ (x_i, y_j)\in R,\\ 0, & \textit{если}\ (x_i, y_j)\notin R, \quad i, j=1,2,...,n.\end{cases}$$

На рис.1.9, *б* приведена матрица отношения Q примера 2.



а

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

б

Рис. 1.9. Граф отношения Q (*а*) и матрица отношения Q (*б*)

1.2.4. Свойства бинарных отношений

Бинарные отношения делятся на типы в зависимости от свойств, которыми они обладают. Рассмотрим следующие отношения на множестве $X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$:

$G=\{(x,y)|\ x,y\in X, x>y\}$;

$L=\{(x,y)|\ x,y\in X, x\le y\}$;

$M=\{(x,y)|\ x,y\in X, (x-y)$ делится на $3\}$;

$K=\{(x,y)|\ x,y\in X, x^2+y^2\le 20\}$.

Отношение R на множестве X называется ***рефлексивным,*** если для всех $x\in X$ выполняется условие $(x,x)\in R$. Среди приведенных выше отношений рефлексивными являются отношение L (т.к. неравенство $x\le x$ справедливо при всех $x\in X$) и отношение M (т.к. разность $x-x=0$ делится на 3, значит, пара (x,x) принадлежит отношению M при всех $x\in X$).

Отношение R на множестве X называется ***антирефлексивным***, если условие $(x,x)\in R$ не выполняется ни при одном $x\in X$. Примером антирефлексивного отношения является отношение G (неравенство $x>x$ не выполняется ни при каких значениях x, следовательно, ни одна пара (x,x) не принадлежит отношению G). Отметим, что отношение K не является рефлексивным $(5^2+5^2>20 \Rightarrow (5{,}5) \notin K)$ и не является антирефлексивным $(1^2+1^2 \le 20 \Rightarrow (1{,}1) \in K)$.

Отношение R на множестве X называется ***симметричным***, если из условия $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \in R$. Симметричными являются отношения M (если $x - y$ делится на 3, то и $y - x$ делится на 3) и K (если $x^2 + y^2 \le 20$, то и $y^2 + x^2 \le 20$).

Отношение R на множестве X называется ***несимметричным***, если для любых $x, y \in X$ из условия $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \notin R$. Несимметричным является отношение G, т.к. условия $x < y$ и $y < x$ не могут выполняться одновременно (только одна из пар (x, y) или (y, x) принадлежит отношению G).

Отношение R на множестве X называется ***антисимметричным***, если для любых $x, y \in X$ из условия $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$ следует $x = y$. Антисимметричным является отношение L, т.к. из одновременного выполнения $x \le y$ и $y \le x$ следует $x = y$.

Отношение R на множестве X называется ***транзитивным***, если для любых $x, y, z \in R$ из одновременного выполнения условий $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следует $(x, z) \in R$. Отношения G, L, M являются транзитивными, а отношение K нетранзитивно: если $x = 3, y = 2, z = 4,$ то $3^2 + 2^2 \le 20$ и $2^2 + 4^2 \le 20$, но $3^2 + 4^2 \ge 20$, то есть выполняются условия $(x, y) \in K$ и $(y, z) \in K$, но $(x, z) \notin K$.

1.2.5. Отношения эквивалентности

Рассмотрим три отношения: M, S, H. Отношение M описано в 1.2.4. Отношение S введем на множестве X всех треугольников следующим образом: этому отношению принадлежат пары треугольников такие, что площадь треугольника x равна площади треугольника y.

Отношение H действует на множестве жителей г. Томска и содержит пары (x, y) такие, что x и y носят шляпы одинакового размера.

Свойства этих трех отношений приведены в таблице 1.2, где P означает рефлексивность, AP – антирефлексивность, C – симметричность, AC - антисимметричность, HC – несимметричность, T – транзитивность отношения. В качестве упражнения проверьте правильность заполнения таблицы, пользуясь определениями свойств бинарных отношений.

Таблица 1.2

Свойства отношений

Отношение	Р	АР	С	АС	НС	Т
M	+	-	+	-	-	+
S	+	-	+	-	-	+
H	+	-	+	-	-	+

Мы видим, что отношения обладают одинаковыми свойствами, поэтому их относят к одному типу.

Определение. Отношение R на множестве X называется отношением ***эквивалентности,*** если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Таким образом, отношения M, S, H являются отношениями эквивалентности на соответствующих множествах X. Важной особенностью отношений эквивалентности является то, что они разбивают все множество X на непересекающиеся подмножества – классы эквивалентности.

Определение. ***Классом эквивалентности***, порожденным элементом $x \in X$, называется подмножество $[x]$ множества X, для элементов которого выполняется условие $(x, y) \in R, y \in X$. Таким образом, класс эквивалентности $[x] = \{y \mid y \in X, (x, y) \in R\}$.

Так, отношение M разбивает множество $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ на три класса эквивалентности: $[1] = \{1,4,7\}, [2] = \{2,5\}, [3] = \{3,6\}$. Класс, порожденный элементом 4, совпадает с классом [1]; [5] = [2], [3] = [6], [7] = [1].

Классы эквивалентности образуют систему непустых непересекающихся подмножеств множества X, в объединении дающую все множество X – т.е. образуют разбиение множества X (см. 1.1.6).

Отношение эквивалентности обозначают “ ≡ “, поэтому определение класса эквивалентности можно записать так: $[x] = \{y \mid y \in X, x \equiv y\}$.

1.2.6. Отношения порядка

Рассмотрим отношения G, L из 1.2.4, отношение Q из 1.2.2 и отношение включения V на множестве всех подмножеств целых чисел ($\mathrm{B}(\mathbf{Z})$ – булеан множества $\mathbf{Z}$): $V = \{(X, Y) \mid X, Y \in \mathrm{B}(\mathbf{Z}), X \subseteq Y\}$.

Таблица 1.3

Свойства отношений

Отношение	Р	АР	С	АС	НС	Т
G	-	+	-	-	+	+
L	+	-	-	+	-	+
Q	+	-	-	+	-	+
V	+	-	-	+	-	+

Мы видим, что по свойствам эти отношения разделились на два типа.

<u>*Определение*</u>. Отношение R на множестве X, обладающее свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности, называется отношением ***порядка*** на множестве X (обозначается “$\preceq$”).

<u>*Определение*</u>. Отношение R на множестве X, обладающее свойствами антирефлексивности, несимметричности, транзитивности, называется отношением ***строгого порядка***.

Таким образом, отношения L, Q, V являются отношениями порядка на соответствующих множествах, а отношение G – отношением строгого порядка.

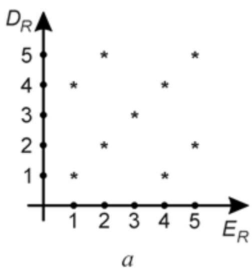
1.2.7. Решение задачи 4 контрольной работы № 1

<u>*Задача*</u>. На множестве $X = \{1,2,3,4,5\}$ задано бинарное отношение $R \subseteq X \times X : R = \{(x, y) \mid x, y \in X, (x + 2y)$ делится на $3\}$. Представить отношение R различными способами; выяснить, какими свойствами оно обладает; является ли отношение R отношением эквивалентности или отношением порядка.

Решение. Отношение R можно задать перечислением всех элементов:

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,4), (4,1), (5,2), (2,5)\}.$$

Наглядно представить отношение R можно с помощью графика (рис. 1.10, *а*), схемы (рис. 1.10, *б*), графа (рис. 1.11, *а*), матрицы отношения (рис. 1.11, *б*).



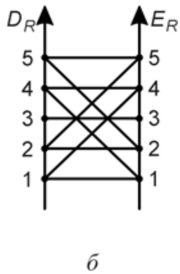


Рис. 1.10. График (*а*) и схема (*б*) отношения R

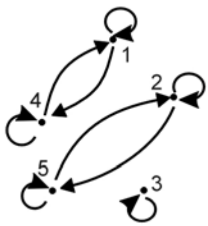
Выясним, какими свойствами обладает отношение.

Покажем, что отношение рефлексивно. При $x = y$ условие “ $x + 2y$ делится на 3” принимает вид $x + 2x = 3x$ – делится на 3 (выполняется при любых значениях $x \in X$).

Проверим, является ли отношение симметричным. Пусть $x+2y$ делится на 3 (т.е. $(x,y)\in R$). Составим пару (y,x) и для нее проверим характеристическое свойство отношения:

$$y+2x=y+2x+(x+2y)-(x+2y)=3y+3x-(x+2y)=$$
$$=3(y+x)-(x+2y)\,.$$

Очевидно, что $3(y+x)$ делится на 3, а $x+2y$ делится на 3 по условию, следовательно, $y+2x$ делится на 3, т.е. $(y,x)\in R$. Отношение симметрично.



а

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & & & & & \\[-2ex] & \multicolumn{5}{c}{} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

б

Рис. 1.11. График (*а*) и схема (*б*) отношения *R*

Проверим, является ли отношение транзитивным. Пусть $(x,y)\in R$ и $(y,z)\in R$, т.е. $x+2y$ делится на 3 и $y+2z$ делится на 3. Будет ли делиться на 3 выражение $x+2z$, т.е. будет ли $(x,z)\in R$? Преобразуем $x+2z=$ $=x+3y+2z-3y=x+2y+y+2z-3y=(x+2y)+(y+2z)-3y$ делится на 3, т.к. первые два слагаемых делятся на 3 по условию и третье слагаемое $(-3y)$ делится на 3. Значит $(x,z)\in R$, и отношение транзитивно. Свойства данного отношения перечислены в таблице 1.4.

Таблица 1.4

Свойства отношения *R*

Отношение	Р	АР	С	АС	НС	Т
R	+	-	+	-	-	+

Отношение R обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, следовательно, является отношением эквивалентности. На графе отношения R (рис. 1.11, а) хорошо видны классы эквивалентности – это подмножества {1,4}, {2,5}, {3} множества X.

1.2.8. Контрольные вопросы и упражнения

1. Вставьте пропущенный знак “=” или “≠”:
   $\{3,5\}$ _____ $\{5,3\}$; $(3,5)$ _____ $(5,3)$.
2. Нарисуйте график декартова произведения $X \times Y$, где $X = \{1,5\}$, $Y = \{2,3\}$. Совпадает ли он с графиком $Y \times X$?
3. Дайте определение бинарного отношения на множестве X.
4. Обведите кружком номер правильного ответа:
   Областью определения бинарного отношения R называется множество
   1) $\{(x, y) | \ x, y \in R\}$;
   2) $\{x | \ x, y \in R\}$;
   3) $\{y | \ x, y \in R\}$.
5. Найдите область определения и область значений отношения Q из примера 2 (п.п 1.2.2).
6. Какими способами можно задать бинарное отношение?
7. Нарисуйте график и схему отношения P из примера 2 (см. 1.2.2).
8. Какое отношение является рефлексивным?
9. Какой особенностью обладает матрица рефлексивного отношения? А матрица симметричного отношения?
10. Вставьте пропущенное слово:
    Отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, называется отношением ________________ .
11. Запись $[x]$ используется для обозначения ________ _____________ .
12. Какое отношение называется отношением порядка?

1.3. Реляционная алгебра

1.3.1. Применение отношений для обработки данных

Отношение может быть не только бинарным, в общем случае отношением называется подмножество $R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, т.е. элементом отношения является упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. При обработке данных наборы из n элементов называют *записями*, i-му элементу набора соответствует i-ое поле записи. Записи группируются в файлы, и если файлы содержат совокупность записей, удовлетворяющих некоторым отношениям, мы получаем *базу данных*. Таким образом, отношение удобно представлять в виде таблицы, каждая строка которой соответствует записи, а каждый столбец – определенному полю записи.

Любая ли таблица может задавать отношение? Очевидными являются следующие *требования*:

1) порядок столбцов таблицы фиксирован;
2) каждый столбец имеет название;
3) порядок строк таблицы произволен;
4) в таблице нет одинаковых строк.

Число n столбцов таблицы называется ***степенью*** отношения (говорят, что задано n-арное отношение). Число строк в таблице – количество элементов отношения. Математическая модель, описывающая работу с такими таблицами, называется *реляционной алгеброй*.

1.3.2. Теоретико-множественные операции реляционной алгебры

Так как отношения являются множествами, к ним применимы обычные операции теории множеств: пересечение, объединение, разность. Но в отличие от алгебры множеств в реляционной алгебре эти операции могут быть применены не к любым, а только к ***совместимым*** отношениям. Два отношения будем называть совместимыми, если их степени равны, а соответствующие поля относятся к однотипным множествам. Первое требование означает, что объединение, пересечение и разность определяются только для таблиц с одинаковым количеством столбцов, а второе – в соответствующих столбцах должны располагаться однотипные данные (не выполняется операция пересечения множества фамилий и множества зарплат).

Пересечением двух отношений R и S называется множество $R \cap S$ всех записей, каждая из которых принадлежит как R, так и S (рис. 1.12, *а*, *б*).

Объединением двух отношений R и S называется множество $R \cup S$ записей, которые принадлежат хотя бы одному из отношений R или S (рис.1.12, *а*, *в*).

Разностью двух отношений R и S называется множество $R \setminus S$ всех записей, каждая из которых принадлежит отношению R, но не принадлежит отношению S (рис.1.12, *а,г*).

R

A_1	A_2	A_3
a	b	a
b	a	c
b	c	a

S

B_1	B_2	B_3
a	b	c
b	c	a

а

$R \cap S$

C_1	C_2	C_3
b	c	a

б

$R \cup S$

D_1	D_2	D_3
a	b	a
b	a	c
b	c	a
a	b	c

в

$R \setminus S$

E_1	E_2	E_3
a	b	a
b	a	c

г

Рис. 1.12. Операции над совместимыми отношениями
а) данные отношения R и S;
б) пересечение отношений R и S;
в) объединение отношений R и S;
г) разность отношений R и S

В реляционной алгебре вводится операция расширенного декартова произведения. Пусть $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ – элемент n-арного отношения R, а $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ – элемент m-арного отношения S. ***Конкатенацией*** записей r и s назовем запись $(r, s) = (r_1, r_2, \ldots, r_n, s_1, s_2, \ldots, s_m)$, полученную приписыванием записи s к концу записи r.

R

A_1	A_2
a	b
a	c
c	e

S

B_1	B_2	B_3
k	l	m
b	k	c

$R \times S$

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
a	b	k	l	m
a	b	b	k	c
a	c	k	l	m
a	c	b	k	c
c	e	k	l	m
c	e	b	k	c

Рис. 1.13. Расширенное декартово произведение
отношений R и S

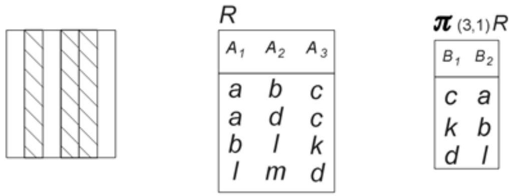
Расширенным декартовым произведением отношений R и S называется множество $R \times S = \{(r, s) \mid r \in R, s \in S\}$, элементами которого являются все возможные конкатенации записей $r \in R$ и $s \in S$. Отметим, что полученное отношение имеет степень $n + m$ и важен порядок выполнения операции: $R \times S \neq S \times R$.

В качестве упражнения запишите расширенное декартово произведение $S \times R$ для отношений R и S (рис. 1.13) и сравните с отношением $R \times S$.

1.3.3. Специальные операции реляционной алгебры

При поиске информации в базе данных мы часто выполняем однотипные действия: выбор записей, отвечающих заданному условию; исключение полей, содержащих не интересующие нас в данный момент факты и т.п. Поэтому, кроме теоретико-множественных, в реляционной алгебре применяются и специальные операции. Рассмотрим некоторые из них.

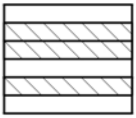
Пусть задано отношение R и список $c = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ – упорядоченное подмножество номеров столбцов. ***Проекцией*** отношения R на список c называется отношение $\pi_c R = \{r[c] \mid r \in R\}$, записи которого содержат только те поля, которые указаны в списке c. Таким образом, операция проекции позволяет получить “ вертикальное ” подмножество отношения R (рис. 1.14, *а*). Операция проекции выполняется в два этапа: 1) выписываем записи отношения R, включая только те поля, которые указаны в списке c; 2) вычеркиваем в полученной таблице повторяющиеся строки (рис. 1.14, *б*, *в*).



а *б* *в*

Рис. 1.14. Операции проекции
а) проекция - "вертикальное" подмножество;
б) данное отношение R;
в) проекция $\boldsymbol{\pi}_{(3,1)}\ R$ отношения R на список c=(3,1)

Операция селекции (выбора) дает возможность построения “горизонтального” подмножества отношения, т.е. подмножества записей, обладающих заданным свойством. Обозначим F – логическое условие, которому должны удовлетворять искомые записи. ***Селекцией*** отношения R по условию F называется отношение $\sigma_F R$, содержащее те и только те записи отношения R, для которых условие F истинно (рис. 1.15).



R

A_1	A_2	A_3
a	b	c
a	d	c
b	l	k
l	m	d

$\sigma_{„A_1=a"} R$

B_1	B_2	B_3
a	b	c
a	d	c

Рис. 1.15. Селекция отношения R по условию F - „ A_1 =a"

Соединение отношений по условию F обозначается $R \underset{F}{\triangleright\triangleleft} S$ и представляет собой отношение, записями которого являются конкатенации (r, s), удовлетворяющие условию F. Таким образом, соединение можно выполнить в два этапа: 1) выполнить операцию расширенного декартова произведения $R \times S$; 2) выполнить селекцию полученного отношения по условию F.

$$R \underset{F}{\triangleright\triangleleft} S = \sigma_F (R \times S)$$

На рис. 1.16. приведен пример соединения отношений R и S по условию F - "$A_1 < B_1$", где знак " < " означает лексикографический (алфавитный) порядок.

R

A_1	A_2
a	b
b	c

S

B_1	B_2	B_3
a	b	c
c	a	b
b	c	a

$R \underset{F}{\bowtie} S$

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
a	b	c	a	b
a	b	b	c	a
b	c	c	a	b

Рис. 1.16. Соединение отношений R и S по условию F -„$A_1 < B_1$"

1.3.4. Решение задачи 5 контрольной работы № 1

Задача. Отношения R и S заданы в виде таблиц (рис. 1.17, *а*). Совместимы ли эти отношения? Записать обозначение проекции R на список $c = (3,2)$ и выполнить эту операцию. Записать обозначение соединения отношений R и S по условию F – "$A_2 \geq B_1$" и выполнить эту операцию.

Решение. Степень отношения R равна 3 (три столбца в таблице), степень отношения S равна 2 (два столбца), значит, отношения R и S несовместимы и над ними нельзя выполнять операции пересечения, объединения, разности.

R

A_1	A_2	A_3
a	b	c
k	m	t
b	a	d

S

B_1	B_2
b	k
c	m
d	t

а

$\pi_c R$

C_1	C_2
c	b
t	m
d	a

б

$R \underset{F}{\bowtie} S$

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
a	b	c	b	k
k	m	t	b	k
k	m	t	c	m
k	m	t	d	t

в

Рис. 1.17. Операции над отношениями R и S
а) данные отношения;
б) проекция отношения R на список $c = (3, 2)$;
в) соединение отношений R и S по условию
F - „$A_2 \geq B_1$"

Обозначение операции проекции $\pi_{(3,2)}R$. Чтобы выполнить эту операцию, выписываем третье и второе поле всех записей в новую таблицу (вычеркнули столбец A_1, столбцы A_2 и A_3 поменяли местами); одинаковых строк нет (рис. 1.17, *б*).

Обозначение операции соединения - $R \underset{A_2 \geq B_1}{\rhd\lhd} S = \sigma_{A_2 \geq B_1}(R \times S)$.

Результат операции $R \times S$ – девять записей (к каждой строке таблицы *R* приписываем строку таблицы *S*). Вычеркиваем строки, не удовлетворяющие условию $"A_2 \geq B_1"$, т.е. строки, второй элемент которых стоит в алфавите раньше четвертого (на рис. 1.17, *в*).

1.3.5. Контрольные вопросы и упражнения

1. При каких условиях таблица является аналогом n-арного отношения?
2. Что называется степенью такого отношения?
3. Какие отношения в реляционной алгебре называются совместимыми?
4. Составьте конкатенацию записей “ пас ” и “ тор ”.
5. Отношение R имеет степень 3, отношение S – 4. Какую степень будет иметь отношение $R \times S$?
6. Операция проекции отношения R на список столбцов обозначается ______________________ .
7. Как выполняется операция селекции отношения R по условию F?
8. Какие операции и в каком порядке нужно выполнить:

$$\pi_{(3,2)}(\sigma_{A_1 < A_2}(R \cup S))\ ?$$

1.4. Конечные и бесконечные множества

1.4.1. Биекция

В дальнейшем мы будем использовать понятие взаимно однозначного отображения (биекции). Напомним, что отображение $f: X \to Y$ является биекцией тогда и только тогда, когда каждый элемент x множества X имеет единственный образ $y = f(x) \in Y$, а каждый элемент $y \in Y$ имеет единственный прообраз $x \in X$, т.е. $x = f^{-1}(y)$. Так, соответствие между множествами X и Y на рис. 1.18, *а* является биекцией, а на рис. 1.18, *б*, *в* – не является биекцией (объясните почему).

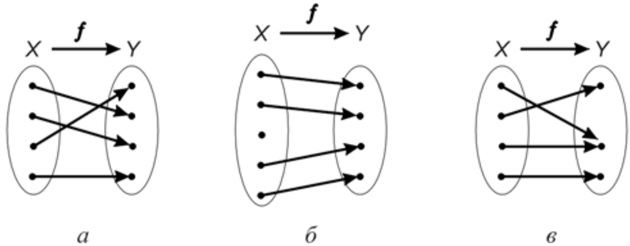


Рис. 1.18. Соответствие множеств X и Y
а) биективное; б) в) не биективное.

1.4.2. Равномощные множества

<u>*Определение*</u>. Будем говорить, что множества X и Y ***равномощны***, если существует биекция множества X на множество Y.

Пример. Покажем, что множества $X = [0;1]$ и $Y = [1;3]$ равномощны. Действительно, можно установить биекцию $f: X \to Y$, например, по закону $y = 2x + 1$ (рис. 1.19, *а*). Биекцию между множествами X и Y можно установить и геометрически (рис. 1.19, *б*). Через левые концы отрезков проведена прямая l, через правые – прямая m. Точка пересечения прямых l и m обозначена M. Из точки M проводим лучи, пересекающие оба отрезка; при этом точке пересечения с лучом на первом отрезке соответствует единственная точка пересечения с лучом на втором отрезке (и наоборот).

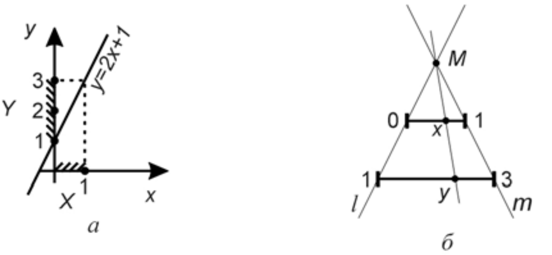


Рис. 1.19. Равномощность множеств X=[0;1] и Y=[1;3]
а) графическая иллюстрация;
б) геометрическое отображение.

1.4.3. Классы равномощных множеств

Введенное в 1.4.2 отношение равномощности является отношением эквивалентности “ $\equiv$ “. В самом деле, оно рефлексивно: для каждого множества X справедливо $X \equiv X$ (X равномощно X), так как существует тождественное отображение множества X на множество X. Это отношение симметрично: если существует биекция X на Y, то обратное отображение также является биекцией (если $X \equiv Y$, то $Y \equiv X$). Отношение транзитивно: если существует биекция $f : X \to Y$ и существует биекция $g : Y \to Z$, то соответствие $z = g(f(x))$ отображает X на Z биективно (если $X \equiv Y$ и $Y \equiv X$, то $X \equiv Z$).

По свойству отношения эквивалентности (см. 1.2.5) получаем разбиение всех множеств на непересекающиеся классы равномощных множеств. Каждому классу присвоим название - *кардинальное число*. Таким образом, кардинальное число – это то общее, что есть у всех равномощных множеств. Обозначим кардинальное число множества $X - card\ X$ или $|X|$. Пустое множество имеет кардинальное число $card\ \varnothing$=0; для всех конечных множеств кардинальное число совпадает с количеством элементов множества; а для обозначения кардинального числа бесконечных множеств используется буква $\aleph$ (алеф). Понятие кардинального числа (мощности множества) обобщает понятие “ количество элементов ” на бесконечные множества.

1.4.4. Сравнение множеств по мощности

Расположим классы эквивалентности равномощных множеств в порядке возрастания кардинальных чисел: $0,1,2,\ldots,n,\ldots,\aleph_0,\aleph_1,\aleph_{2,\ldots}$.

Для конечных множеств это не вызывает затруднений: $|X|<|Y|$ означает для конечных множеств, что количество элементов множества X меньше количества элементов множества Y, и класс $|X|$ расположен левее класса $|Y|$ в последовательности классов равномощных множеств. А что означает неравенство $|X|<|Y|$ для бесконечных множеств? Договоримся о следующих обозначениях:

1) если множества X и Y попадают в один класс эквивалентности, пишем $|X|=|Y|$;

2) если класс эквивалентности множества X находится левее класса эквивалентности Y в ряду кардинальных чисел, используем обозначение $|X|<|Y|$;

3) если класс эквивалентности множества X находится правее класса эквивалентности множества Y, то $|X|>|Y|$;

4) в теории множеств строго доказано, что случай, когда множества X и Y несравнимы по мощности, невозможен – это означает, что классы равномощных множеств можно вытянуть в цепочку без разветвлений по возрастанию мощности.

Следующая теорема, приведенная без доказательства, позволяет устанавливать равномощность бесконечных множеств.

Теорема Кантора-Бернштейна. Пусть X и Y два бесконечных множества. Если во множестве X есть подмножество, равномощное множеству Y, а во множестве Y есть подмножество, равномощное X, то множества X и Y равномощны.

Пример. Пусть $X=[0;1], Y=(0;+\infty)$. Покажем, что $|X|=|Y|$. Непосредственно биекцию X на Y построить трудно, т.к. X - отрезок с включенными концами, а Y – открытый интервал.

Применим теорему Кантора-Бернштейна. Возьмем в качестве подмножества X_1 множества X открытый интервал : $X_1=(0;1)\subseteq[0;1]=X$. Биекция X_1 на Y легко устанавливается: например, по закону $y=\log_{0,5}x$ (рис. 1.20) , осуществляется взаимно однозначное отображение интервала (0;1) на интервал $(0;+\infty)$.

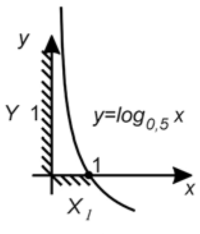


Рис. 1.20. Биекция множества X_1 =(0;1) на множество Y=(0:+∞)

В качестве подмножества $Y_1 \subseteq Y$ возьмем любой замкнутый интервал из Y, например, $Y_1 = [1;3] \subseteq (0;+\infty) = Y$. В 1.4.1 уже показано, что $|[1;3]| = |[0;1]|$ (существует биекция $y = 2x + 1$). Таким образом, условия теоремы Кантора-Бернштейна выполняются, следовательно, множества $X = [0;1]$ и $Y = (0;+\infty)$ равномощны ($|X| = |Y|$).

1.4.5. Определение конечного множества

Множество X называется ***конечным***, если существует биекция $f : X \to \{1,2,\dots,n\}$, т.е. множество X можно взаимно однозначно отобразить на отрезок натурального ряда $\{1,2,\dots,n\}$; при этом $|X| = n$.

Пустое множество принято относить к конечным множествам и обозначать $|\varnothing|=0$.

Все множества, для которых такую биекцию установить невозможно, будем называть ***бесконечными.***

1.4.6. Свойства конечных множеств

Сформулируем свойства конечных множеств в виде теорем (не все теоремы будут строго доказаны).

Теорема (правило суммы). Пусть множество X является объединением r непересекающихся конечных множеств X_i, $i = 1,2,\dots r$. Тогда $|X| = \sum_{i=1}^{r} |X_i|$.

Согласно условию теоремы система множеств $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ является разбиением множества X. Доказательство проведем методом математической индукции по числу r блоков разбиения.

Шаг 1. Покажем, что теорема справедлива при $r = 2$. Пусть $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и множества X_1, X_2 конечны, т.е. существует биекция $f_1 : X \to \{1,2,\dots,n_1\}$ и $f_2 : X \to \{1,2,\dots,n_2\}$. Установим биекцию $f : X \to \{1,2,\dots,n_1 + n_2\}$ следующим образом: всем элементам множества X_1 оставим прежние номера, а номера элементов множества X_2 увеличим на число n_1. Полученное отображение

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x),\ \textit{если}\ x \in X_1; \\ n_1 + f_2(x),\ \textit{если}\ x \in X_2 \end{cases}$$

является биекцией $f: X \to \{1,2,\ldots,n_1+n_2\}$ в силу биективности f_1 и f_2. Следовательно, $|X| = n_1 + n_2 = |X_1| + |X_2|$. Основание индукции доказано.

Шаг 2. Индукционный переход заключается в следующем: предположим, что теорема справедлива при числе блоков разбиения $r-1$; докажем, что в этом случае она будет справедлива и при числе блоков r.

Предположение: множества $Y_i, i = 1,2,\ldots r-1$, конечны и образуют разбиение множества Y. Тогда $|Y| = \sum_{i=1}^{r-1} |Y_i| = \sum_{i=1}^{r-1} n_i$.

Рассмотрим разбиение множества X на r конечных множеств. Тогда $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i = (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{r-1}) \cup X_r$ по закону ассоциативности объединения. Обозначим $Y = \bigcup_{i=1}^{r-1} X_i$. Опираясь на основание индукции (шаг 1), имеем $|X| = |Y \cup X_r| = |Y| + |X_r|$, а по индукционному предположению $|X| = \left|\bigcup_{i=1}^{r-1} X_i\right| + |X_r| = \sum_{i=1}^{r-1} |X_i| + |X_r| = \sum_{i=1}^{r} |X_i|$. Индукционный переход доказан.

Заключение. Согласно методу математической индукции, теорема справедлива для любого натурального числа r блоков разбиения.

<u>*Теорема*</u> (правило произведения). Пусть конечное множество X представлено в виде декартова произведения r конечных множеств $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_r$. Тогда $|X| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_r|$.

Правило произведения доказывается методом математической индукции аналогично правилу суммы.

<u>*Теорема*</u> (правило включения – исключения). Пусть X_1 и X_2 конечные множества. Тогда $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$.

Доказательство теоремы опирается на правило суммы. Представим множество $X_1 \cup X_2$ в виде объединения непересекающихся множеств $X_1 \cup X_2 = A \cup B \cup C$, где $A = X_1 \setminus X_2, B = X_1 \cap X_2$, $C = X_2 \setminus X_1$ (рис. 1.21). Тогда по правилу суммы $|X_1 \cup X_2| = |A| + |B| + |C|$, но $X_1 = A \cup B,\ X_2 = B \cup C$, поэтому $|X_1| = |A| + |B|$, $|X_2| = |B| + |C|$. Имеем $|X_1 + X_2| = |A| + |B| + |B| + |C|$, отсюда $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |B| =$
$|X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$.

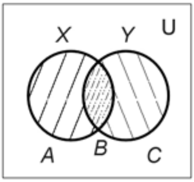


Рис. 1.21. Правило включения-исключения

<u>*Теорема*</u> (обобщенное правило включения – исключения).

Пусть конечное множество X является объединением r конечных множеств: $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$. Тогда

$$\left|X\right| = \sum_{i=1}^{r}\left|X_i\right| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|X_i \cap X_j\right| +$$
$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n}\left|X_i \cap X_j \cap X_k\right| - \ldots + (-1)^{r+1}\left|X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_r\right|.$$

<u>*Теорема*</u> (о мощности булеана конечного множества). Пусть множество X конечно и $\left|X\right| = n$. Тогда $\left|\mathrm{B}(X)\right| = 2^n$.

Напомним, что $\mathrm{B}(X)$ есть булеан множества X, т.е. множество всех подмножеств множества X (см 1.1.6). Докажем теорему методом математической индукции по числу n элементов множества X.

Основание индукции. Проверим правильность теоремы при $n=1$. Т.к. множество X состоит из одного элемента $X = \{x_1\}$, то всех возможных подмножеств у множества X будет два: пустое множество и само множество X, т.е. $\left|\mathrm{B}(X)\right| = 2 = 2^n$.

Индукционный переход. Пусть теорема справедлива при $\left|X\right| = n-1$. Рассмотрим произвольное множество $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ и покажем, что количество всех его подмножеств равно 2^n.

Покрасим элемент x_1 множества X в “зелубой ” цвет, и все подмножества множества X, содержащие этот элемент, назовем красивыми, а не содержащие этот элемент – некрасивыми. Количество некрасивых подмножеств по индукционному предположению равно 2^{n-1}. Красивые подмножества получены добавлением “зелубого” элемента к каждому некрасивому подмножеству поочередно, значит, их тоже 2^{n-1}. По правилу суммы количество всех подмножеств множества X равно $2^{n-1}+2^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$.

Заключение. Согласно методу математической индукции, теорема справедлива для любого натурального числа n.

1.4.7. Определение счетного множества

Будем говорить, что множество X ***счетно***, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbf{N}$.

Пример 1. Пусть X множество нечетных натуральных чисел. Покажем, что X счетно. Для этого нужно установить биекцию множества X на множество натуральных чисел, т.е. занумеровать элементы множества X так, чтобы каждому элементу X соответствовал ровно один номер, а любому натуральному числу соответствовал ровно один элемент из X. Очевидно, соответствие $f=2n-1, n\in\mathbf{N}$, удовлетворяет этим требованиям:

$$\begin{array}{lllllll} X=\{1, & 3, & 5, & 7, & \ldots, & 2n-1, & \ldots\} \\ \phantom{X=\{}\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ N=\{1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots\} \end{array}$$

Таким образом, $|X|=|\mathbf{N}|$ и X счетно.

Пример 2. Пусть $X=\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ – декартово произведение множества N на себя. Покажем, что X счетно. Расположим все элементы X в виде матрицы (рис. 1.22) и занумеруем его элементы " по диагоналям ": номер 1 присвоим элементу (1,1), номер 2 – элементу (2,1), 3 – (1,3) и т.д.

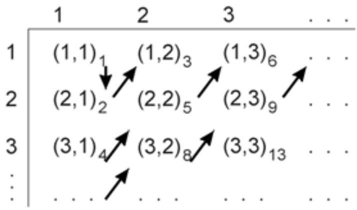


Рис. 1.22. Множество X=N × N

Полученное отображение X на $\mathbf{N}$ также является биекцией (хотя записать формулу в явном виде сложнее, чем в примере 1).

Мощность счетного множества обозначается $\aleph_0$. Когда мы пишем $|X|=\aleph_0$, мы утверждаем, что множество X счетно, т.е. относится к тому же классу эквивалентности, что и множество натуральных чисел. А множество **N** считается эталоном (образцом) счетных множеств.

1.4.8. Свойства счетных множеств

Покажем, что класс счетных множеств расположен в ряду мощностей левее любых других классов бесконечных множеств, а предшествуют ему только классы конечных множеств (рис. 1.23).

Рис. 1.23. Ряд мощностей множеств

Основой для такого утверждения служат следующие теоремы о счетных множествах.

<u>*Теорема 1*</u>. Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Пусть X – счетное множество, а $Y \subseteq X$ – произвольное его подмножество. Занумеруем элементы множества $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$ и выберем тот элемент, который имеет минимальный номер и принадлежит подмножеству Y – обозначим его y_1. Затем рассмотрим множество $X \setminus \{y_1\}$ и найдем в нем элемент с минимальным номером, принадлежащий Y, - обозначим y_2, и т.д. Если на n-ом шаге мы не обнаружим в множестве $X \setminus \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ элементов множества Y, то Y конечно и $|Y| = n$. В противном случае (если процесс будет продолжаться бесконечно) множество Y счетное, т.к. указан способ нумерации его элементов.

<u>*Теорема 2*</u>. Всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество.

Пусть X – бесконечное множество. Выберем произвольный элемент $x_1 \in X$. Так как X бесконечно, то $X \setminus \{x_1\} \neq \varnothing$. Обозначим x_2 произвольный элемент из $X \setminus \{x_1\}$. Далее найдется $x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$, $x_4 \in X \setminus \{x_1, x_2, x_3\}, \ldots$. Поскольку X бесконечно, этот процесс не может оборваться из-за “нехватки” элементов, и мы получим счетное подмножество Y множества X: $Y = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subseteq X$.

<u>*Теорема 3*</u>. Объединение конечного или счетного количества счетных множеств есть множество счетное.

Пусть $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, где $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - счетные множества. Будем считать, что они попарно не пересекаются (в противном случае перейдем от множеств X_n к множествам $Y_n = X_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k$, которые попарно не пересекаются и $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$). Все элементы множества X запишем в виде бесконечной таблицы:

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots \\ x_{31} & x_{34} & x_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

где в первой строке записаны элементы множества X_1, во второй – X_2 и т.д. Занумеруем эти элементы "по диагонали" (как в примере 2 из 1.4.7), при этом устанавливается биекция между множествами X и $\mathbf{N}$, т.е. X – счетное множество.

<u>*Теорема 4*</u>. Пусть X бесконечное множество, а Y – счетное. Тогда $|X \cup Y| = |X|$.

Теорема утверждает, что добавление счетного множества элементов не увеличивает мощность бесконечного множества.

Доказательство. Рассмотрим множество $Z = X \cup Y$ и представим его в виде объединения непересекающихся множеств $Z = X \cup Y_1$, где $Y_1 = Y \setminus X$. Так как Y счетно, то Y_1 конечно или счетно (по теореме 1). Множество X бесконечно, значит, существует счетное подмножество $X_1 \subseteq X$ (по теореме 2). Тогда $X = X_1 \cup (X \setminus X_1)$, а

$$Z = X \cup Y_1 = X_1 \cup (X \setminus X_1) \cup Y_1 = (X \setminus X_1) \cup (X_1 \cup Y_1).$$

По теореме 3 $X_1 \cup Y_1$ счетно, т.е $|X_1 \cup Y_1| = |X_1|$. Поэтому $|Z| = |(X \setminus X_1) \cup X_1| = |X|$. Теорема доказана.

В примере 1 из 1.4.7 мы установили, что множество $\mathbf{N}$ равномощно своему собственному подмножеству. Рассуждения, близкие к доказательству теоремы 4, позволяют утверждать, что таким свойством обладает не только множество $\mathbf{N}$, но любые бесконечные множества.

Рассмотренные четыре теоремы показывают, что среди бесконечных множеств счетные множества являются наименьшими по мощности. Существуют ли множества более чем счетные?

1.4.9. Несчетные множества

Рассмотрим множество $X = [0;1] \subset \mathbf{R}$. Сравним его с множеством $\mathbf{N}$. Очевидно, что $\left|[0;1]\right| \geq |\mathbf{N}|$. Действительно, отрезок [0;1] содержит счетное подмножество $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$, значит, является не менее, чем счетным. Покажем, что [0;1] и $\mathbf{N}$ не являются равномощными множествами, т.е. что $\left|[0;1]\right| \neq \aleph_0$.

<u>*Теорема*</u>. Множество точек отрезка [0;1] не является счетным.

Проведем доказательство методом “от противного”. Предположим, что множество [0;1] счетно, т.е. существует биекция $\mathbf{N}$ на [0;1], и каждому элементу отрезка можно присвоить номер: $[0;1] = \{a_i \mid a_i \in [0;1], i \in \mathbf{N}\}$. Каждый элемент отрезка [0;1] представляется в виде бесконечной десятичной дроби $a_i = 0,\alpha_{i1}\alpha_{i2}\alpha_{i3}\ldots$, где α_{ij} – j-я десятичная цифра i-го элемента. Запишем все элементы $a_i, i \in \mathbf{N}$, в порядке возрастания номеров. Покажем, что найдется элемент b, принадлежащий отрезку [0;1], но не совпадающий ни с одним из занумерованных элементов $a_i, i \in \mathbf{N}$. Метод построения такого элемента называется диагональной процедурой Кантора и заключается в следующем. Будем строить элемент b в виде бесконечной десятичной дроби $b = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$, где β_i – i-я десятичная цифра. В качестве β_1 возьмем любую цифру, не совпадающую с α_{11}, β_2 – любую цифру, не совпадающую с α_{22}, ... , $\beta_n \neq \alpha_{nn}$ при любых $n \in \mathbf{N}$ (рис. 1.24). Построенный таким образом элемент b принадлежит отрезку [0;1], но отличается от каждого из занумерованных элементов α_i хотя бы одной цифрой. Следовательно, предположение о том, что существует биекция $f: \mathbf{N} \to [0;1]$ ошибочно, и множество [0;1] не является счетным.

$$
\begin{array}{llll l}
a_1 = 0, & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots \\
a_2 = 0, & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots \\
a_3 = 0, & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\
a_n = 0, & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Рис. 1.24. Диагональная процедура Кантора

Итак, мы показали, что $|[0;1]| > |\mathbf{N}|$, т.е. класс эквивалентности, которому принадлежит отрезок [0;1], расположен правее класса $\aleph_0$ счетных множеств в ряду мощностей (рис. 1.23). Обозначим этот класс $\aleph$ (без индекса). Множества, принадлежащие этому классу, называются ***несчетными*** или множествами мощности ***континуум*** (континуум – непрерывный). Этому классу принадлежат и интервал (0;1), и множество **R** действительных чисел, и множество точек круга на плоскости.

Пример. Множество **R** имеет мощность континуума, т.к. равномощно отрезку [0;1]. Действительно, по теореме Кантора-Бернштейна (см. 1.4.4) $|[0;1]| = |(0;1)|$. Биекцию интервала (0;1) на множество **R** можно задать с помощью сложной функции $y = f(g(x))$, где $z = g(x)$ имеет вид $z = \pi\, x - \frac{\pi}{2}$ и отображает интервал (0;1) на интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а $y = f(z)$ отображает интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ на **R** по закону $y = tg\, z$.

1.4.10. Выводы

Итак, используя понятие “мощность”, мы сравниваем между собой не только конечные, но и бесконечные множества. Мощность – это то общее, что есть у всех равномощных множеств, а общим у них является класс эквивалентности. Мы говорим, что множество имеет мощность $\aleph_0$, и это означает, что оно принадлежит тому же классу эквивалентности, что и множество натуральных чисел; мы говорим, что множество имеет мощность континуума, и это означает, что оно принадлежит тому же классу, что и отрезок [0;1] (табл. 1.5).

Таблица 1.5

Мощность множества

Множество	Эталон	Мощность
Конечное	{1, 2, … ,n}	n
Счетное	**N**	$\aleph_0$
Несчетное	[0;1]	$\aleph$

Мы показали, что несчетные множества имеют мощность большую, чем счетные. А существуют ли множества наибольшей мощности ? На этот вопрос отвечает теорема, которую мы приведем без доказательства.

<u>*Теорема*</u>. Пусть X – бесконечное множество. Мощность булеана множества X больше мощности множества X.

На основании этой теоремы мы можем утверждать, что не существует множества наибольшей мощности: для каждого множества X мы можем построить его булеан, т.е. множество большей мощности. Это означает, что ряд мощностей (рис. 1.23) неограничен.

1.4.11. Решение задачи 6 контрольной работы 1

<u>*Задача*</u>. Даны множества $A=\{-2,-1,0\}$ и $B=\{4n-1 \mid n\in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A\cap B, A\cup B, A\times B$?

Решение. Множество A конечно и задано перечислением своих элементов, множество B задано характеристическим свойством. Запишем несколько первых элементов множества $B=\{3,7,11,15,\dots\}$. Видим, что $A\cap B=\varnothing$ и $|A\cap B|=0$, т.е. множество $A\cap B$ конечно.

Покажем, что множество $A\cup B=\{-2,-1,0,3,7,11,15,\dots\}$ счетно. Занумеруем его элементы:

$$z_n=\begin{cases} -2, & n=1,\\ 0, & n=2,\\ 4n-13, & n\ge 3.\end{cases} \qquad n\in N.$$

Задана биекция множества $\mathbf{N}$ на множество $A\cup B$, следовательно, $A\cup B$ счетно и $|A\cup B|=\aleph_0$.

По определению декартова произведения $A\times B=\{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$. Запишем элементы этого множества в виде матрицы (рис. 1.25) и занумеруем его по столбцам.

A ↓ B →	3	7	11	15	. . .
-2	$(-2,3)_1$	$(-2,7)_4$	$(-2,11)_7$	$(-2,15)_{10}$	. . .
-1	$(-1,3)_2$	$(-1,7)_5$	$(-1,11)_8$	$(-1,15)_{11}$	. . .
0	$(0,3)_3$	$(0,7)_6$	$(0,11)_9$	$(0,15)_{12}$	. . .

Рис. 1.25. Множество $A \times B$

Замечаем, что если номер n делится на 3 без остатка, то первый элемент пары равен 0; если номер n делится на 3 с остатком 1, то первый элемент пары равен –2; если номер n делится на 3 с остатком 2, то первый элемент пары равен -1. Поэтому способ нумерации может быть задан следующим образом:

$$z_n=\begin{cases} (0,4k-1), & \textit{если } n=3k,\\ (-2,4k-1), & \textit{если } n=3k-2,\\ (-1,4k-1), & \textit{если } n=3k-1.\end{cases} \qquad k\in N,$$

и множество $A\times B$ счетно, т.е. имеет мощность $\aleph_0$.

1.4.12. Контрольные вопросы и упражнения

1. Является ли биекцией отображение $f(x)=x^2$, заданное на отрезке [-1;1]? А заданное на [0;1]?
2. Являются ли равномощными множества $X=[0;1]$ и $Y=[-2;0]$?
3. Являются ли равномощными множество $X=\{1,2\}$ и множество корней квадратного уравнения $x^2+x+4=0$?
4. Сформулируйте теорему Кантора-Бернштейна.
5. Покажите, пользуясь теоремой Кантора-Бернштейна, что множества $X=[0;1]$ и $Y=[0;3]\cup[4;5]$ равномощны.
6. Даны множества $X=\{2,5,7\}$ и $Y=\{3,6,8\}$. Чему равно $|X\cup Y|$?
7. Впишите ответ:
   Если $X=\{2,5,7\}$, $Y=\{3,5,8\}$, то $|X\cup Y|=$ ________ .
8. Пусть $X=\{2,4\}$. Тогда $|\mathrm{B}(X)|$=______, $\mathrm{B}(X)$={______________}.
9. Сколько подмножеств имеет множество $X=\{1,3,5,7\}$?
10. Какое множество называется счетным?
11. Покажите, что множество целых чисел $\mathbf{Z}$ счетно.
12. Мощность счетного множества обозначается _____ .
13. Сформулируйте свойства счетных множеств.
14. Множество X – все натуральные числа, делящиеся на 3, множество Y – натуральные числа, делящиеся на 4. Какова мощность множества $X\cup Y$?
15. Какова мощность множества $\mathbf{N}\cap[1;5]$?
16. Мощность несчетного множества обозначается буквой ______ .
17. Какова мощность множества $\mathbf{N}\cup[0;1]$?
18. Существует ли множество наибольшей мощности?

1.5. Комбинаторика

1.5.1. Задачи комбинаторики

Комбинаторика решает для конечных множеств задачи следующего типа:

а) выяснить, сколько существует элементов, обладающих заданным свойством;

б) составить алгоритм, перечисляющий все элементы с заданным свойством;

в) отобрать наилучший по некоторому признаку среди перечисленных элементов.

Мы будем заниматься только задачами первого типа. При этом будет идти речь об отборе r элементов с заданным свойством из конечного множества X, состоящего из n элементов. Результат такого отбора будем называть *выборкой*. Нас будет интересовать вопрос о количестве выборок заданного типа.

1.5.2. Типы выборок

Выборки делятся на типы по двум признакам: а) важен ли порядок отбора элементов; б) есть ли среди отобранных элементов одинаковые. Будем обозначать n – количество элементов в исходном множестве X, r – количество элементов в выборке.

Упорядоченный набор элементов, среди которых нет повторяющихся, называется ***размещением*** из n элементов по r. Количество размещений обозначается A_n^r (табл. 1.6).

Таблица 1.6

Типы выборок

	Повторений элементов нет	Повторения элементов есть
Порядок важен	A_n^r размещения	$\overline{A}_n^r$ размещения с повторениями
Порядок не важен	C_n^r сочетания	$\overline{C}_n^r$ сочетания с повторениями

Пример. Определяя трех победителей олимпиады среди 20 участников, мы составляем размещения из 20 элементов по 3, т.к. порядок в этом списке важен (первое, второе, третье место), и ни одна фамилия не может появиться в нем дважды.

Упорядоченный набор элементов, среди которых могут быть одинаковые, называется ***размещением с повторениями***. Количество таких выборок обозначается $\overline{A}_n^r$.

Пример. Составляя всевозможные четырехзначные телефонные номера из десяти цифр, мы получаем размещения с повторениями из 10 по 4, т.к. в телефонном номере могут встретиться одинаковые цифры, порядок записи цифр важен.

Неупорядоченный набор элементов, среди которых нет повторяющихся, называется ***сочетанием*** из n элементов по r. Количество сочетаний обозначается C_n^r.

Пример. Из восьми человек нужно выбрать троих, чтобы вручить им лопаты для уборки снега. Здесь порядок отбора не важен, и одному человеку вручить две лопаты не удастся – имеем сочетание из восьми по три.

Неупорядоченный набор элементов, среди которых могут быть одинаковые, называется ***сочетанием с повторениями***. Количество таких выборок обозначается $\overline{C}_n^r$.

Пример. С трех различных негативов хотим напечатать пять фотографий. Здесь порядок печати не важен, а в полученном наборе обязательно будут одинаковые фотографии – это сочетания с повторениями из трех элементов по пять.

1.5.3. Основные правила комбинаторики

В 1.4.6 мы доказывали теоремы о свойствах конечных множеств. Именно они, лишь в другой формулировке, используются при выводе формул комбинаторики как основные правила.

Правило суммы. Если элемент a может быть выбран m способами, а элемент b *другими* k способами, то выбор одного из этих элементов – a или b может быть сделан $m+k$ способами.

Пример. На конюшне четыре лошади и два пони. Сколько возможностей выбрать себе скакуна? Здесь используем правило суммы: выбираем один элемент из двух множеств (лошадь или пони) $4+2=6$ способами.

Правило произведения. Если элемент a может быть выбран m способами, а после этого элемент b выбирается k способами, то выбор пары элементов (a,b) в заданном порядке может быть произведен $m \cdot k$ способами.

Пример. Пару лыж можно выбрать шестью способами, пару ботинок – тремя. Сколькими способами можно выбрать лыжи с ботинками? Здесь выбираем пару элементов (лыжи, ботинки) – всего $6 \cdot 3 = 18$ способов.

Правило включения-исключения. Если свойством S обладает m элементов, а свойством P обладает k элементов, то свойством S или P обладает

$m+k-l$ элементов, где l – количество элементов, обладающих одновременно и свойством S, и свойством P.

Пример. На полке стоят банки с компотом из яблок и груш. В десяти банках есть яблоки, в шести – груши, в трех – и яблоки, и груши. Сколько всего банок на полке? Здесь $m=10, k=6, l=3$, т.е. всего на полке $m+k-l=10+6-3=13$ банок.

1.5.4. Размещения с повторениями

Задача. Определить количество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ длины r, которые можно составить из элементов множества X ($|X|=n$), если выбор каждого элемента $x_i, i=1,2,\ldots,r$, производится из всего множества X.

Упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ – это элемент декартова произведения $X \times X \times \ldots \times X = X^r$, состоящего из r одинаковых множителей X. По правилу произведения количество элементов множества X^r равно $\left|X^r\right| = |X|^r = n^r$. Мы вывели формулу $\overline{A}_n^r = n^r$.

Пример. Сколько четырехзначных номеров можно составить, если использовать все десять цифр?

Здесь $n=10$, $r=4$, и количество телефонных номеров равно

$$\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000.$$

1.5.5. Размещения без повторений

Задача. Сколько упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ можно составить из n элементов множества X, если все элементы набора различны?

Первый элемент x_1 можно выбрать n способами. Если первый элемент уже выбран, то второй элемент x_2 можно выбрать лишь $n-1$ способами, а если уже выбран $r-1$ элемент $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$, то элемент x_r можно выбрать $n-(r-1)=n-r+1$ способами (повторение уже выбранного элемента не допускается). По правилу произведения получаем

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1).$$

Эта формула записывается иначе с использованием обозначения $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Так как

$$A_n^r \cdot (n-r)! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

то

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Пример. Сколько может быть различных списков победителей олимпиады (первое, второе, третье место), если участвовало 20 человек?

Здесь $n = 20,\ r = 3$, искомым является число

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840.$$

1.5.6. Перестановки без повторений

Рассмотрим частный случай размещения без повторений: если $n = r$, то в размещении участвуют все элементы множества *X*, т.е. выборки имеют одинаковый состав и отличаются друг от друга только порядком элементов. Такие выборки называются ***перестановками***. Количество перестановок из *n* элементов обозначают P_n:

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Пример. Сколькими способами можно выстроить очередь в кассу, если хотят получить зарплату шесть человек?

$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = 720$.

1.5.7. Перестановки с повторениями

Пусть множество X состоит из k различных элементов: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. ***Перестановкой с повторениями*** состава $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ будем называть упорядоченный набор длины $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_k$, в котором элемент x_i встречается r_i раз $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Количество таких перестановок обозначается $P_n(r_1, r_2, \ldots, r_k)$.

Пример. Из букв $\{a, b, c\}$ запишем перестановку с повторением состава $(2, 2, 1)$. Ее длина $n = 2 + 2 + 1 = 5$, причем буква a входит 2 раза, b – 2 раза, c – один раз. Такой перестановкой будет, например, (a, b, a, b, c) или (b, c, a, a, b).

Выведем формулу количества перестановок с повторениями. Занумеруем все одинаковые элементы, входящие в перестановку, различными индексами, т.е. вместо перестановки (a, b, a, b, c) получим (a_1, b_1, a_2, b_2, c). Теперь все элементы перестановки различны, а количество таких перестановок равно $n! = (r_1 + r_2 + \ldots + r_k)!$. Первый элемент встречается в выборке r_1 раз. Уберем индексы у первого элемента (в нашем примере получим перестановку

(a, b_1, a, b_2, c)), при этом число различных перестановок уменьшится в $r_1!$ раз, т.к. при изменении порядка одинаковых элементов наша выборка не изменится. Уберем индексы у второго элемента – число перестановок уменьшится в $r_2!$ раз. И так далее, до элемента с номером k – число перестановок уменьшится в $r_k!$ раз. Получим формулу

$$P_n(r_1, r_2, ..., r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_k!}.$$

Пример. Сколько различных “слов” можно получить, переставляя буквы слова “передача” ?

В этом слове буквы “е” и “а” встречаются два раза, остальные по одному разу. Речь идет о перестановке с повторениями состава $(2, 2, 1, 1, 1, 1)$ длины $n = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$. Количество таких перестановок равно

$$P_8(2, 2, 1, 1, 1, 1) = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 7! \cdot 2 = 10080.$$

1.5.8. Сочетания

Задача. Сколько различных множеств из r элементов можно составить из множества, содержащего n элементов?

Будем составлять вначале упорядоченные наборы по r элементов в каждом. Количество таких наборов (это размещения из n элементов по r) равно $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$. Теперь учитываем, что порядок записи элементов нам безразличен. При этом из $r!$ различных размещений, отличающихся только порядком элементов, получим одно сочетание. Например, два различных размещения (a, b) и (b, a) из двух элементов соответствуют одному сочетанию $\{a, b\}$. Таким образом, число сочетаний C_n^r в $r!$ раз меньше числа размещений A_n^r:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Пример. Количество способов, которыми мы можем выбрать из восьми дворников троих равно

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56.$$

1.5.9. Сочетания с повторениями

<u>*Задача*</u>. Найти количество $\overline{C}_n^r$ сочетаний с повторениями из n предметов по r.

Рассмотрим вывод формулы на примере с фотографиями (см. 1.5.2). Имеется n типов предметов ($n=3$ негатива). Нужно составить набор из r предметов ($r=5$ фотографий). Наборы различаются своим составом, а не порядком элементов. Например, разными будут наборы состава $(3,1,1)$ и $(1,0,4)$ – один содержит три фотографии с первого негатива и по одной со второго и с третьего, а другой – одну с первого и четыре с третьего. Разложим эти наборы на столе, разделяя фотографии разного типа карандашами (рис. 1.26). Карандашей нам понадобится $n-1=3-1=2$, а фотографий $r=5$. Мы будем получать различные сочетания с повторениями, переставляя между собой эти $(n-1)+r$ предметов, т.е. $\overline{C}_n^r = P_{n-1+r}(n-1,r)$ число сочетаний с повторениями из n предметов по r равно числу перестановок с повторениями длины $n-1+r$ состава $(n-1,r)$. В нашем примере

$$\overline{C}_3^5 = P_{3-1+5}(3-1,5) = P_7(2,5) = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = 21.$$

Иначе формулу сочетаний с повторениями можно записать

$$\overline{C}_n^r = \frac{(n-1+r)!}{(n-1)!\cdot r!} = C_{n-1+r}^r.$$

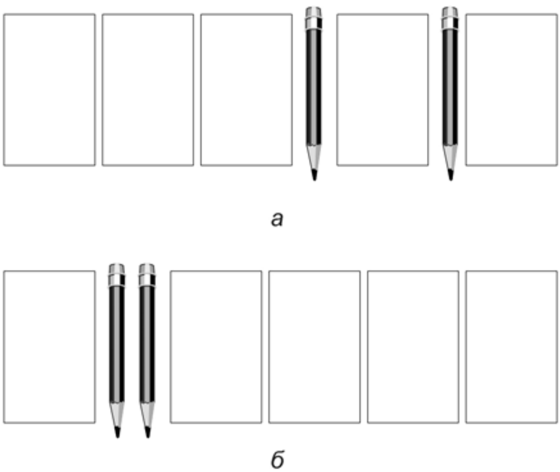


Рис. 1.26. Сочетания с повторениями:
а) состава (3,1,1); *б)* состава (1,0,4)

1.5.10. Решение задач 7,8 контрольной работы № 1

При решении задач комбинаторики рекомендуем выбирать нужную формулу, пользуясь блок-диаграммой (рис. 1.27).

<u>*Задача*</u>. В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, его заместителя и казначея. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Составим список в порядке: председатель, заместитель, казначей. Выбираем трех из 9 человек, т.е. $n = 9,\ r = 3$. Порядок важен? Да, выбираем правую часть блок-диаграммы (рис. 1.27). Следующий вопрос: выбираем все n элементов? Нет. Повторения есть? Нет. Следовательно, наша выборка – размещение без повторений и количество таких выборок

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504.$$

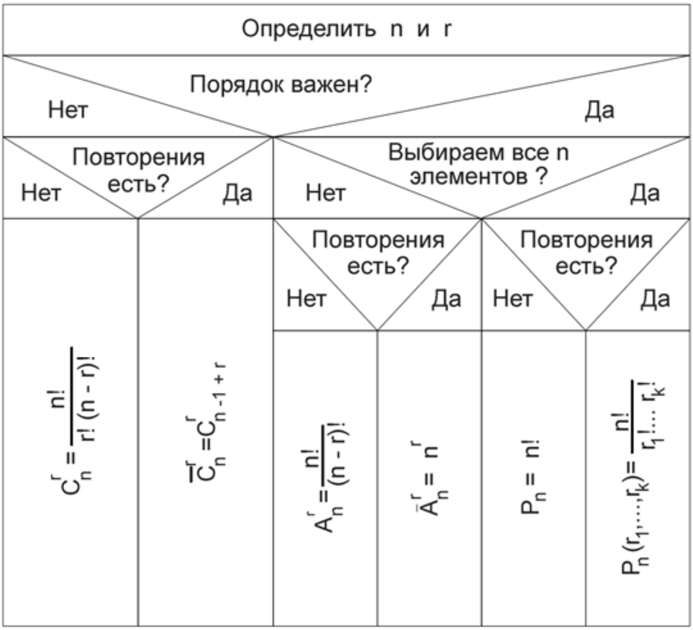


Рис. 1.27. Выбор формулы

<u>*Задача*</u>. Сколькими способами 40 человек можно рассадить в три автобуса, если способы различаются только количеством человек в каждом автобусе?

Решение. Выстроим 40 человек в очередь и выдадим каждому билет с номером автобуса. Получим выборку, например, такую: $1, 1, 2, 2, 3, 1, \ldots, 2, 1$. В этой выборке 40 элементов ($r = 40$), а значений – номеров автобусов – три ($n = 3$). Порядок важен? Чтобы ответить на этот вопрос, поменяем местами двух человек в очереди и посмотрим, изменилась ли выборка. Выборка не изменилась, т.к. количество людей в каждом автобусе осталось прежним. Порядок не важен, поэтому выбираем левую часть блок-диаграммы (рис. 1.27). Повторения есть? Да, в нашей выборке номер автобуса может встречаться несколько раз. Следовательно, выборка является сочетанием с повторениями из $n = 3$ по $r = 40$ элементов:

$$\overline{C}_3^{40} = \frac{(3-1+40)!}{40!\cdot(3-1)!} = \frac{42!}{40!\cdot 2!} = 41\cdot 21 = 861.$$

1.5.11. Бином Ньютона

В школе изучают формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Бином Ньютона позволяет продолжить этот ряд формул. Раскроем скобки в следующем выражении:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \quad раз}$$

Общий член суммы будет иметь вид Ca^kb^{n-k}. Чему равен коэффициент C? Он равен количеству способов, которыми можно получить слагаемое a^kb^{n-k} (т.е. количеству способов, которыми можно выбрать k скобок с множителем a, а из остальных $n-k$ скобок взять множитель b). Например, если $n = 5$, $k = 2$, то слагаемое a^2b^3 можем получить, выбрав множитель a из первой и пятой скобки. Каков тип выборки? Порядок перечисления не важен (выбираем сначала первую, затем пятую скобки, или, наоборот, сначала пятую, затем первую – безразлично), повторяющихся элементов (одинаковых номеров скобок) в выборке нет. Это сочетание без повторений. Количество таких выборок равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Таким образом, формула бинома для произвольного натурального n имеет вид:

$$(a+b)^n = C_n^0b^n + C_n^1ab^{n-1} + C_n^2a^2b^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}a^{n-1}b + C_n^na^n$$

или

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Пример. При $n = 4$ получим формулу

$$(a+b)^4 = C_4^0 b^4 + C_4^1 ab^3 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^3 b + C_4^4 a^4 =$$

$$= b^4 + 4ab^3 + 6a^2 b^2 + 4a^3 b + a^4,$$

т.к.

$$C_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = 1; \quad C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4; \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6; \ldots$$

Проверьте правильность формулы, перемножив $(a+b)^3$ на $(a+b)$.

Строгое доказательство формулы бинома Ньютона проводится методом математической индукции.

1.5.12. Свойства биномиальных коэффициентов

Биномиальными коэффициентами являются величины

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

которые выражают число сочетаний из n элементов по k. Эти величины обладают следующими свойствами.

Свойство симметрии.

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

В формуле бинома это означает, что коэффициенты, стоящие на одинаковых местах от левого и правого концов формулы, равны, например: $C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15.$

Действительно, C_n^k - это количество подмножеств, содержащих k элементов, множества, содержащего n элементов. А C_n^{n-k} - количество дополнительных к ним подмножеств. Сколько подмножеств, столько и дополнений.

Свойство Паскаля.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Число C_n^k - это количество подмножеств из k элементов множества X. Разделим все подмножества на два класса:

1) подмножества, не содержащие элемент x_1, - их будет C_{n-1}^k;

2) подмножества, содержащие элемент x_1, - их будет C_{n-1}^{k-1}.

Т.к. эти классы не пересекаются, то по правилу суммы количество всех k-элементных подмножеств множества X будет равно $C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1}$.

На этом свойстве основано построение треугольника Паскаля (рис. 1.28), в n-ой строке которого стоят коэффициенты разложения бинома $(a+b)^n$.

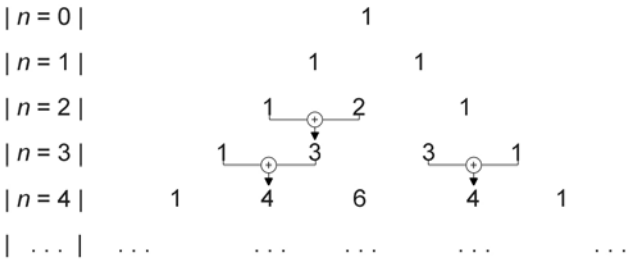


Рис. 1.28. Треугольник Паскаля

Свойство суммы.

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n.$$

Подставим в формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$$

значения $a=1,\ b=1$. Получим

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k 1^k 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.$$

Заметим, что с точки зрения теории множеств сумма $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n$ выражает количество всех подмножеств n-элементного множества. По теореме о мощности булеана (см. 1.4.6) это количество равно 2^n .

Свойство разности.

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3...+(-1)^n C_n^n=0.$$

Положим в формуле бинома Ньютона $a=1,\ b=-1$. Получим в левой части $(1-1)^n=0$, а в правой – биномиальные коэффициенты с чередующимися знаками, что и доказывает свойство.

Последнее свойство удобнее записать, перенеся все коэффициенты с отрицательными знаками в левую часть формулы:

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+...=C_n^0+C_n^2+...,$$

тогда свойство легко запоминается в словесной формулировке: “ сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами равна сумме биномиальных коэффициентов с четными номерами”.

<u>*Задача*</u>. Найти член разложения бинома $\left(x+\frac{1}{x^4}\right)^n$, не содержащий *x*, если сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами равна 512.

Решение. По свойству разности сумма биномиальных коэффициентов с четными номерами также равна 512, значит, сумма всех коэффициентов равна 512+512=1024. Но по свойству суммы это число равно $2^n = 2^{10} = 1024$. Поэтому $n = 10$. Запишем общий член разложения бинома и преобразуем его:

$$T_{k+1} = C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^k x^k \left(\frac{1}{x^4}\right)^{n-k} = C_n^k x^{k-4n+4k}, \quad k = 0,1,...,n;$$

при $n = 10$ получим:

$$T_{k+1} = C_{10}^k x^{5k-40}, \quad k = 0,1,...,n.$$

Член разложения T_{k+1} не содержит *x*, если $5k - 40 = 0$, т.е. $k = 8$. Итак, девятый член разложения не содержит x и равен $T_9 = C_{10}^8 = \frac{10!}{8!(10-8)!} = 45.$

Свойство максимума. Если степень бинома n – четное число, то среди биномиальных коэффициентов есть один максимальный при $k = \frac{n}{2}$. Если степень бинома нечетное число, то максимальное значение достигается для двух биномиальных коэффициентов при $k_1 = \frac{n-1}{2}$ и $k_2 = \frac{n+1}{2}$.

Так, при $n = 4$ максимальным является коэффициент $C_4^2 = 6$, а при $n = 3$ максимальное значение равно $C_3^1 = C_3^2 = 3$ (рис. 1.28).

1.5.13. Контрольные вопросы и упражнения

1. Выборка, среди элементов которой нет одинаковых, а порядок записи элементов важен, является _______________________ .
2. Выборка, среди элементов которой нет одинаковых, а порядок записи элементов безразличен, является ________________________ .
3. Количество размещений с повторениями из n элементов по r элементов определяется по формуле

___________ = __________________________ .

4. Количество сочетаний из n элементов по r элементов определяется по формуле

_____________ = __________________________ .

5. Сформулируйте основные правила комбинаторики.

6. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для письма, если имеется 5 конвертов и 4 марки?

7. Сколько пятизначных номеров можно составить из девяти цифр $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$?

8. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг (все полосы горизонтальные), если имеются ткани пяти различных цветов?

9. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице 7 футбольных команд, если известно, что все команды набрали различное количество очков?

10. Сколькими способами можно составить команду из 4 человек, если имеется 7 бегунов?

11. Сколькими способами можно разложить 12 различных предметов по четырем различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось по три предмета?

12. Сколькими способами можно разложить 6 одинаковых шаров по четырем различным ящикам?

13. Запишите разложение бинома $(a-b)^5$.

14. Докажите свойство симметрии биномиальных коэффициентов, сравнив формулы для C_n^k и C_n^{n-k}.

15. Найдите максимальный числовой коэффициент в разложении бинома $(1+x)^8$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Логика высказываний

2.1.1. История математической логики

Логика как наука о законах человеческого мышления зародилась в давние времена. Родоначальником формальной логики считают Аристотеля (IV в. до н.э.). До сих пор мы пользуемся классификацией суждений, введенной этим древнегреческим ученым, именно он впервые обратил внимание на то, что рассуждения мы проводим, исходя из структуры утверждений, а не из их конкретного содержания.

В конце семнадцатого века вопросы логики привлекли внимание немецкого ученого Г. Лейбница (1646-1716 гг.). Он считал, что логика должна стать "искусством вычисления". Основные понятия должны быть обозначены особыми символами, должны быть выработаны правила их соединения, и тогда всякое рассуждение можно будет заменить вычислением. Эти идеи были частично реализованы в работах английского ученого Дж. Буля (1815-1864 гг.). Он создал алгебру высказываний (впоследствии ее стали называть алгеброй логики). Работа Буля стала началом развития математической логики (а аристотелеву логику называют традиционной формальной логикой).

В конце XIX века логика нашла применение в обосновании основных понятий и идей математики. Для построения математической теории используется аксиоматический способ: без доказательств принимаются основные понятия этой теории (аксиомы), из которых логически выводится все ее содержание. Логическими средствами этого являются правила вывода данной теории.

В начале двадцатого века математическая логика нашла применение в технике, затем была установлена тесная связь математической логики с новой наукой – кибернетикой. Как часть математической логики возникла новая математическая дисциплина – теория алгоритмов, занимающаяся проблемами обоснования существования алгоритмов решения задач.

2.1.2. Понятие высказывания

Изучая теорию множеств, мы не давали строго определения понятия "множество", считая его понятием неопределяемым, первичным; однако, при этом мы опирались на интуитивное представление о понятии "множество". Так же поступим и при изучении математической логики: не будем давать строгого определения понятия "высказывание", считая высказыванием любое повествовательное предложение, о котором есть смысл говорить, что оно истинно или ложно. При этом высказывание не может быть одновременно и истинным, и ложным. Например, "$2+2=3$" – высказывание, принимающее значение "ложь" (Л), "$2+5=7$" – высказывание, принимающее значение "истина" (И), а "$x+y=4$" не является высказыванием.

2.1.3. Операции над высказываниями

В естественном языке из нескольких простых предложений можно составить сложное, пользуясь союзами “и”, “или” и т.п. Так же из простых высказываний (высказывательных переменных) будем строить составные, пользуясь логическими союзами – логическими операциями.

Отрицанием (инверсией) высказывания X называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда X ложно (обозначается $\neg X$ или $\overline{X}$, читается “не X” или “неверно, что X”).

Конъюнкцией $X \& Y$ двух высказываний называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания X и Y. Эта логическая операция соответствует соединению высказываний союзом ”и”.

Дизъюнкцией $X \vee Y$ двух высказываний X и Y называется высказывание ложное в том и только в том случае, когда оба высказывания X и Y ложны. В разговорной речи этой логической операции соответствует союз “или” (неисключающее “или”).

Импликацией двух высказываний X и Y называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда X истинно, а Y – ложно (обозначается $X \to Y$; читается “X влечет Y”, “если X, то Y”). Операнды этой операции имеют специальные названия: X – посылка, Y – заключение.

Эквиваленцией двух высказываний X и Y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения X и Y одинаковы (обозначение: $X \sim Y$, $X \leftrightarrow Y$).

2.1.4. Таблицы истинности

Операнды логических операций могут принимать только два значения: И или Л. Поэтому каждую логическую операцию $\neg$, &, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ легко задать с помощью таблицы, указав значение результата операции в зависимости от значений операндов. Такая таблица называется ***таблицей истинности*** (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Таблицы истинности логических операций

X	Y	$\neg X$	$X\&Y$	$X\vee Y$	$X\to Y$	$X\leftrightarrow Y$
И	И	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И	Л
Л	Л	И	Л	Л	И	И

2.1.5. Формулы логики высказываний

В алфавит логики высказываний входят две специальные буквы И и Л, обозначающие логические константы “истина” и “ложь”, прописные буквы для обозначения высказывательных переменных, знаки логических операций и круглые скобки. С помощью этих символов мы строим ***формулы*** логики высказываний, заключая каждую операцию в скобки:

$$F = (((A \,\&\, (\neg B)) \to C) \vee (\neg A)\,.$$

Чтобы формулы не были громоздкими, договоримся опускать некоторые скобки, учитывая приоритет логических операций (“силу” связок). В табл. 2.1 логические операции записаны в порядке убывания приоритета. Учитывая эту договоренность, вышеприведенную формулу можно записать короче:

$$F = (A \,\&\, \neg B \to C) \vee \neg A\,.$$

В логике высказываний особую роль играют формулы, принимающие значение “истина” при любых значениях переменных. Такие формулы называются ***тавтологиями*** (или тождественно истинными формулами). Формулы, принимающие значение “истина” хотя бы при одном наборе списка переменных, называются ***выполнимыми***. Формулы, принимающие значение “ложь” при любых значениях переменных, называются ***противоречиями*** (тождественно ложными, невыполнимыми) (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Формулы логики высказываний

Выполнимые формулы		Невыполнимые
Тавтологии $X \vee \neg X \equiv$ И	Остальные $X \to \neg Y$	Противоречия $X \,\&\, \neg X \equiv$ Л

В логике высказываний всегда можно определить, является ли данная формула тавтологией – для этого достаточно построить ее таблицу истинности.

Пример: Является ли тавтологией формула $F = (X \to Y) \to \neg X$?

Построим таблицу истинности для формулы F (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Таблица истинности

X	Y	$X \to Y$	$\neg X$	$(X \to Y) \to \neg X$
И	И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И

Формула принимает значение “ложь” на наборе переменных X=И, Y=Л, следовательно, не является тавтологией; это выполнимая формула.

2.1.6. Равносильные преобразования формул

Формулы F_1 и F_2 называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые истинностные значения при любых значениях своих переменных.

Пример. Покажем равносильность формул $F_1 = X \to Y$ и $F_2 = \neg X \vee Y$. Для этого составим таблицу истинности (табл. 2.4).

Таблица 2.4.

Таблица истинности

X	Y	$\neg X$	F_1	F_2
И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И

Сравнивая два последних столбца таблицы, убеждаемся, что они полностью совпадают, т.е. $F_1 \equiv F_2$.

Очевидно, что равносильны любые две тождественно истинные формулы, равносильны любые две тождественно ложные формулы.

Отношение равносильности на множестве формул логики высказываний является отношением эквивалентности, так как обладает свойствами рефлексивности ($F \equiv F$ для любой формулы F), симметричности (если $F_1 \equiv F_2$, то $F_2 \equiv F_1$), транзитивности (если $F_1 \equiv F_2$ и $F_2 \equiv F_3$, то $F_1 \equiv F_3$). С помощью этого отношения все множество формул логики высказываний разбивается на классы равносильных формул.

Основные равносильности (табл. 2.5) – законы логики высказываний - доказываются с помощью таблиц истинности.

Таблица 2.5

Основные равносильности логики высказываний

№	Формула	Название
1	$X \vee \neg X \equiv$ И	Закон исключенного третьего
2	$X \,\&\, \neg X \equiv$ Л	Закон противоречия
3	$X \,\&\, Y \equiv Y \,\&\, X$, $X \vee Y \equiv Y \vee X$	Законы коммутативности
4	$(X \,\&\, Y) \,\&\, Z \equiv X \,\&\, (Y \,\&\, Z)$ $(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$	Законы ассоциативности
5	$X \,\&\, (Y \vee Z) \equiv (X \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, Z)$ $X \vee (Y \,\&\, Z) \equiv (X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z)$	Законы дистрибутивности

Продолжение табл. 2.5

№	Формула	Название
6	$\neg\neg X \equiv X$	Закон двойного отрицания
7	$X \,\&\, X \equiv X,\ X \vee X \equiv X$	Закон идемпотентности
8	$\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \,\&\, \neg Y$ $\neg(X \,\&\, Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$	Законы де Моргана
9	$X \vee (X \,\&\, Y) \equiv X,\ X \,\&\, (X \vee Y) \equiv X$	Законы поглощения
10	$(X \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, \neg Y) \equiv X$ $(X \vee Y) \,\&\, (X \vee \neg Y) \equiv X$	Законы склеивания
11	$X \to Y \equiv \neg X \vee Y$	Замена импликации
12	$X \sim Y \equiv (X \,\&\, Y) \vee (\neg X \,\&\, \neg Y)$	Замена эквиваленции

Обратите внимание на сходство табл. 2.5 и табл.1.1. Это объясняется тем, что алгебра множеств и алгебра высказываний изоморфны, т.е. одинаково организованы с точки зрения математики, обе они являются булевыми алгебрами.

Пример. Пользуясь основными равносильностями логики высказываний (табл. 2.5), показать, что формулы $F_1 = \neg(A \to B) \vee (B \to \neg A)$ и $F_2 = \neg(A \,\&\, B)$ равносильны.

Преобразуем первую формулу:

$$F_1 \overset{11}{\equiv} \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee \neg A) \overset{8}{\equiv} ((\neg\neg A) \,\&\, \neg B) \vee (\neg B \vee \neg A) \overset{6,4}{\equiv}$$

$$\equiv ((A \,\&\, \neg B) \vee \neg B) \vee \neg A \overset{9}{\equiv} \neg B \vee \neg A \overset{8}{\equiv} \neg(B \,\&\, A) \overset{3}{\equiv} \neg(A \,\&\, B) = F_2.$$

Формула F_2 получена из формулы F_1 цепочкой равносильных преобразований (над знаком равносильности указан номер применяемого закона из табл. 2.5), следовательно, $F_1 \equiv F_2$.

2.1.7. Решение задач контрольной работы №2

Задача 1. С помощью таблицы истинности выяснить, является ли формула $F = (X \to Y) \sim \neg X \,\&\, Y$ противоречием.

Решение. Учитывая приоритет логических операций, определим порядок действий:

$$F = (X \overset{1}{\to} Y) \overset{4}{\sim} \overset{2}{\neg} X \overset{3}{\&} Y.$$

Выполним действия в указанном порядке (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Таблица истинности

X	Y	1	2	3	4
И	И	И	Л	Л	Л
И	Л	Л	Л	Л	И
Л	И	И	И	И	И
Л	Л	И	И	Л	Л

Формула является противоречием, если при любых значениях переменных она принимает значение “ложь”. Формула F на двух наборах переменных принимает значение “истина”, следовательно, противоречием не является.

Задача 2. Пользуясь равносильными преобразованиями, выяснить, равносильны ли формулы

$$F_1 = X \to (X \sim Z)$$

и

$$F_2 = (X \to Y) \sim (X \to Z)\ .$$

Перечислить используемые законы.

Решение. Избавимся от операций импликации и эквивалентности, применив формулы

$$A \to B \equiv \neg A \vee B,$$

$$A \sim B \equiv (A \,\&\, B) \vee (\neg A \,\&\, \neg B).$$

Преобразуем первую формулу:

$$F_1 \equiv \neg X \vee (Y \,\&\, Z \vee \neg Y \,\&\, \neg Z) \overset{a}{\equiv} \neg X \vee Y \,\&\, Z \vee \neg Y \,\&\, \neg Z = F_3\ .$$

Преобразуем вторую формулу:

$$F_2 \equiv (\neg X \vee Y) \sim (\neg X \vee Z) \equiv ((\neg X \vee Y) \,\&\, (\neg X \vee Z)) \vee$$

$$\vee (\neg(\neg X \vee Y) \,\&\, \neg(\neg X \vee Z)) \overset{д,м}{\equiv} (\neg X \vee (Y \,\&\, Z)) \vee ((X \,\&\, \neg Y) \,\&$$

$$\& \,(X \,\&\, \neg Z))) \overset{a,к,и}{\equiv} \neg X \vee Y \,\&\, Z \vee X \,\&\, \neg Y \,\&\, \neg Z \overset{a,к}{\equiv}$$

$$\equiv Y \,\&\, Z \vee (\neg X \vee X \,\&\, (\neg Y \,\&\, \neg Z)) \overset{д}{\equiv} Y \,\&\, Z \vee ((\neg X \vee X) \,\&$$

$$\& \,(\neg X \vee (\neg Y \,\&\, \neg Z)) \overset{т,a}{\equiv} Y \,\&\, Z \vee \neg X \vee \neg Y \,\&\, \neg Z \overset{к}{\equiv} \neg X \vee$$

$$\vee Y \,\&\, Z \vee \neg Y \,\&\, \neg Z \equiv F_3.$$

По свойствам отношения равносильности (симметричность, транзитивность) имеем:

$F_1 \equiv F_3$ и $F_2 \equiv F_3$, значит $F_1 \equiv F_2$.

Формулы F_1 и F_2 равносильны.

В преобразованиях использовались следующие законы:

а – ассоциативность;
д – дистрибутивность;
м – закон де Моргана;
к – коммутативность;
и – идемпотентность;
т – закон исключенного третьего.

2.1.8. Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте отрицание высказывания “Сергей – мой друг”.
2. Какое значение должна иметь высказывательная переменная X, чтобы высказывание $X \vee Л$ принимало значение “ложь”.
3. Даны высказывания: X – “белые медведи живут в Африке”, Y – “$5 \geq 2$”. Какое значение принимают высказывания $X \mathbin{\&} Y, X \vee Y$, $X \rightarrow Y, X \sim Y$?
4. Составьте таблицу истинности для формулы $F = (A \sim B) \rightarrow \neg A$.
5. Запишите знаки логических операций в порядке убывания приоритета.
6. Какие скобки в формуле $F = ((A \mathbin{\&} B) \rightarrow (\neg A \vee B)) \mathbin{\&} A$ можно убрать так, чтобы значение формулы не изменилось?
7. Какая формула логики высказываний называется выполнимой?
8. Приведите пример формулы, являющейся тавтологией.
9. Какая формула называется противоречием?
10. Равносильны ли формулы $F_1 = (X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow Z)$ и $F_2 = X \rightarrow (Y \vee Z)$? Проверьте по таблице истинности.
11. Проверьте законы поглощения и склеивания с помощью таблиц истинности.
12. Докажите справедливость равносильности 12 (табл. 2.5).

2.2. Логические рассуждения

2.2.1. Определение логически правильного рассуждения

Математическая логика изучает то общее, что есть во всех доказательствах, рассуждениях, независимо от их содержания. Когда мы говорим, что одно предложение D логически следует из другого P, то имеем в виду следующее: всякий раз, когда предложение P истинно, то истинно и предложение D. В логике высказываний мы имеем дело с формулами P и D, зависящими от некоторых высказывательных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

<u>*Определение*</u>. Будем говорить, что из формулы $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ***логически следует*** формула $D(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и обозначать $P \models D$, если

для любых наборов значений $X_1, X_2, \dots, X_n$ при условии $P(X_1, X_2, \dots, X_n) = И$ выполняется условие $D(X_1, X_2, \dots, X_n) = И$.

Формула P называется посылкой, а D – заключением логического рассуждения.

Пример. Формула $D = \neg X$ логически следует из формулы $P = \neg X \,\&\, Y$, т.е. $\neg X \,\&\, Y \models \neg X$. Убедиться в этом можно, построив таблицу истинности (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Таблица истинности

X	Y	$P = \neg X \,\&\, Y$	$D = \neg X$
И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л
Л	И	И	И
Л	Л	Л	И

Действительно, если $P = И$ (при $X = Л$, $Y = И$), то $D = И$ и по определению $P \models D$. Если $P = Л$, то формула D может принимать любые истинностные значения.

Обычно в логических рассуждениях используется не одна посылка P, а несколько $P_1, P_2, \dots, P_n$. В этом случае рассуждение будет логически правильным ($P_1, P_2, \dots, P_n \models D$), если $P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \dots \,\&\, P_n \models D$ – из конъюнкции посылок логически следует заключение.

Пример. Покажем, что рассуждение $X \to Y, X \models Y$ является логически правильным. Составим конъюнкцию посылок $P = (X \to Y) \,\&\, X$ и проверим правильность логического рассуждения $P \models D$ (здесь $D = Y$) по таблице истинности (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Таблица истинности

X	Y	$X \to Y$	P	D
И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	Л	И
Л	Л	И	Л	Л

Определение логического рассуждения выполняется, значит, это рассуждение является логически правильным.

Логически правильное рассуждение будем записывать в виде *схемы рассуждения*:

$$\left| \frac{P_1, P_2, \ldots, P_n}{D} \right.$$

Так, логически правильная схема рассуждений из последнего примера имеет вид:

$$\left| \begin{array}{l} X \to Y \\ \underline{X \qquad} \\ Y \end{array} \right.$$

2.2.2. Проверка правильности логического рассуждения

Какими способами можно проверить правильность логического рассуждения?

Первый способ - по определению:

а) записать все посылки и заключения в виде формул логики высказываний;

б)составить конъюнкцию формализованных посылок $P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_n$;

в) проверить по таблице истинности, следует ли заключение D из формулы $P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_n$.

Второй способ основан на следующем ***признаке логического следования***.

<u>*Теорема*</u>. Формула D логически следует из формулы P тогда и только тогда, когда формула $P \to D$ является тавтологией.

Доказательство. Пусть $P \models D$, тогда для всех наборов переменных значение P = И влечет D = И. Это означает, что для всех наборов переменных $P \to D \equiv$ И, т.к. формула $P \to D$ принимает значение "ложь" только в одном случае: когда P =И, а D =Л, но такая ситуация исключена по условию. Следовательно, $P \to D$ – тавтология.

Обратно, пусть $P \to D$ – тавтология, т.е. $P \to D \equiv$ И. Отсюда по определению операции импликации заключаем: не существует такого набора значений переменных, при котором P =И, а D =Л. Значит, $P \models D$.

Согласно доказанной теореме, проверка правильности логического рассуждения сводится к ответу на вопрос: является ли формула $P \to D$ тавтологией? На этот вопрос можно ответить, построив таблицу истинности для формулы $P \to D$, или сведя эту формулу с помощью равносильных преобразований к известной тавтологии. Например, для логического рассуждения $X \to Y, X \models Y$ с помощью законов логики высказываний (табл. 2.5) имеем:

$$(X \to Y)\,\&\, X \to Y \overset{11}{\equiv} (\neg X \vee Y)\,\&\, X \to Y \overset{11}{\equiv} \neg((\neg X \vee Y)\,\&\, X) \vee Y \overset{8}{\equiv}$$

$$\overset{8}{\equiv} (\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg X) \vee Y \overset{5}{\equiv} ((X \,\&\, \neg Y) \vee \neg X) \vee Y \equiv$$

$$\equiv ((X \vee \neg X)\,\&\,(\neg Y \vee \neg X)) \vee Y \overset{1}{\equiv} (И \,\&\, (\neg Y \vee \neg X)) \vee Y \equiv$$

$$\equiv (\neg Y \vee \neg X) \vee Y \overset{3,4}{\equiv} \neg X \vee (\neg Y \vee Y) \overset{1}{\equiv} \neg X \vee И \equiv И \; -$$

по признаку логического следования данное рассуждение логически правильно.

Третий способ проверки правильности логического рассуждения назовем ***сокращенным***, т.к. он не требует полного перебора значений переменных для построения таблицы истинности. Для обоснования этого способа сформулируем условие, при котором логическое рассуждение является неправильным. Рассуждение является неправильным, если найдется набор значений переменных $X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0$ такой, что посылка P($X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0$) =И, а заключение D($X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0$) =Л.

Сокращенный метод заключается в следующем.

Пусть требуется проверить правильность логического следования формулы D из посылок $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Предположим, что существует набор $X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0$, при котором все посылки истинны, а заключение ложно, и попытаемся найти этот набор. Если такой набор будет обнаружен, то наше предположение оправдалось, и рассуждение является логически неправильным. Если в процессе поисков набора придем к противоречию, то наше предположение ошибочно, а рассуждение является логически правильным.

Пример. Проверим сокращенным способом правильность логического рассуждения $X \to Y, X \models Y$.

Пусть существует набор X_0, Y_0, при котором посылки истинны, а заключение ложно. Оформим это предположение в виде таблицы (табл. 2.9).

Таблица 2.9

Проверка правильности логического рассуждения

№	Истина	Ложь	Примечания
1	$X_0 \to Y_0$		это
2	X_0		наши
3		Y_0	предположения
4		$X_0 \to Y_0$	Из 2, 3 и определения импликации

Запишем в четвертой строке таблицы импликацию $X_0 \to Y_0$, учитывая, что $X_0 =$ И, а $Y_0 =$ Л. Получим противоречие между первой и четвертой строкой таблицы. Следовательно, рассуждение $X \to Y, X \models Y$ является логически правильным.

Если с помощью такого способа будем проверять правильность логического рассуждения с посылками $P_1 = X \to Y, P_2 = X$ и заключением $D = \neg Y$, то увидим, что никакого противоречия не получается, но есть значения $X_0 =$ Л, $Y_0 =$ И, при которых посылки истинны, а заключение ложно. Следовательно, это рассуждение логически неправильно.

Заметим, что не всегда сразу удается отыскать интересующий нас набор значений переменных, и сокращенный метод приводит к частичному перебору их значений.

Логически правильное рассуждение можно построить, пользуясь уже готовыми логически правильными схемами рассуждений - они называются правилами вывода (табл. 2.10).

Таблица 2.10

Правила вывода

Правило	Название
$A \to B, A \models B$	Правило отделения (ПО)
$A \to B,\ \neg B \models \neg A$	Правило отрицания (ПТ)
$A, B \models A \& B$	Введение конъюнкции (ВК)
$A \& B \models A$	Удаление конъюнкции (УК)
$A \models A \vee B$	Введение дизъюнкции (ВД)
$A \vee B, \neg B \models A$	Удаление дизъюнкции (УД)
$A \to B, B \to C \models A \to C$	Цепное правило (ЦП)

Пример. “Если идет дождь, то кошка в комнате или в подвале. Мышка в комнате или в норке. Если кошка в подвале, то мышка в комнате. Если кошка в комнате, то мышка в норке, а сыр в холодильнике. Сейчас идет дождь, а сыр лежит на столе. Где кошка и где мышка?”

Обозначим:

Д – “идет дождь”;
К – “кошка в комнате”;
Р – “кошка в подвале”;
М – “мышка в комнате”;
Н – “мышка в норке”;
Х – “сыр в холодильнике”;
$\neg X$ – “сыр на столе”.

Получаем следующую схему рассуждения:

$$\begin{array}{|l} Д \to К \vee Р \\ М \vee Н \\ К \to Н \,\&\, Х \\ Р \to М \\ \underline{Д \,\&\, \neg Х} \\ \qquad ? \end{array}$$

Воспользуемся правилами вывода (табл. 2.5).

1) $Д \,\&\, \neg Х \;|\!-\; Д$ (УК);

2) $Д \,\&\, \neg Х \;|\!-\; \neg Х$ (УК);

3) $Д \to К \vee Р, Д \;|\!-\; К \vee Р$ (1, ПО).

Далее рассмотрим два варианта.

Вариант А. Пусть имеет место $К$. Тогда

4а) $К, К \to Н \,\&\, Х , К \;|\!-\; Н \,\&\, Х$ (А, ПО);

5а) $Н \,\&\, Х \;|\!-\; Х$ (УК, 4а);

6а) $\neg Х, Х \;|\!-\; Х \,\&\, \neg Х$ (2,5а) –

получили противоречие, значит, предположение было ошибочно и этот вариант невозможен.

Вариант Б. Пусть имеет место $Р$. Тогда

4б) $Р, Р \to М \;|\!-\; М$ (Б, ПО);

5б) $Р, М \;|\!-\; Р \,\&\, М$ (Б,4б,ВК).

Получено заключение $Р \,\&\, М$, т.е. “кошка в подвале, а мышка в комнате”.

Таким образом, правила вывода помогают нам получить заключение из имеющихся посылок, т.е. проводить логическое рассуждение.

2.2.3. Прямые и косвенные методы доказательств

Доказывая теоремы в математике, мы всякий раз проводим логическое рассуждение $P \,|\!-\, D$ (P – условие теоремы, D – заключение), т.е. выясняем, является ли тавтологией формула $P \to D$. При этом доказательство теоремы может быть *прямым* (как в примере с “кошкой и мышкой” в 2.2.2), когда на основе правил вывода из посылки P мы получаем заключение D. Но доказательство может быть и *косвенным*, когда вместо формулы $P \to D$ мы рассматриваем другую, но равносильную ей формулу.

Назовем теорему $P \to D$ прямой. Наряду с ней можно рассматривать теоремы:

$D \to P$ – обратную;

$\neg P \to \neg D$ – противоположную;

$\neg D \to \neg P$ – обратную противоположной.

Есть ли среди этих формул равносильные исходной? Построив таблицу истинности, убеждаемся, что есть (табл. 2.11).

Таблица 2.11

Таблица истинности

P	D	$P \to D$	$D \to P$	$\neg P \to \neg D$	$\neg D \to \neg P$
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И	Л
Л	И	И	Л	Л	И
Л	Л	И	И	И	И

Прямая теорема равносильна обратно противоположной:

$$P \to D \equiv \neg D \to \neg P .$$

Эта равносильность имеет специальное название – ***закон контрапозиции***. Заметим, что обратная и противоположная теоремы также связаны законом контрапозиции.

Пример. Вместо доказательства утверждения “Если $m \cdot n$ нечетное число, то m и n нечетны” ($P \to D$) согласно закону контрапозиции можно доказывать утверждение ($\neg D \to \neg P$): “Если хотя бы одно из чисел m или n четно, то $m \cdot n$ четно”.

К методам косвенного доказательства относятся доказательства “от противного”. Схемы таких доказательств основаны на равносильностях (справедливость которых можно проверить по таблице истинности):

$$A \to B \equiv (A \& \neg B) \to \neg A ;$$

$$A \to B \equiv (A \& \neg B) \to B ;$$

$$A \to B \equiv \neg(A \to B) \to C \& \neg C .$$

2.2.4. Решение задачи контрольной работы №2

<u>*Задача*</u>. Проверить правильность логического рассуждения сокращенным способом. Какими еще способами можно решить эту задачу?

“Если сегодня будет мороз, то я пойду на каток. Если сегодня будет оттепель, то я пойду на дискотеку. Сегодня будет мороз или оттепель. Следовательно, я пойду на дискотеку”.

Решение. Формализуем условие задачи, введя обозначения:

М – “сегодня будет мороз”;

К – “я пойду на каток”;

О – “сегодня будет оттепель”;

Д – “я пойду на дискотеку”.

Схема рассуждения имеет вид:

$$\begin{array}{|c} M \to К \\ О \to Д \\ \underline{M \vee О} \\ Д \end{array}$$

Рассуждение является логически правильным, если при любых наборах значений переменных (*М*, *К*, *О*, *Д*), для которых все посылки истинны, заключение также истинно. Предположим противное: есть набор ($M_0, К_0, О_0, Д_0$) такой, что посылки истинны, а заключение ложно (табл. 2.12). Применяя определения логических операций, попытаемся найти этот набор.

Таблица 2.12

Проверка правильности логического рассуждения

№	Истина	Ложь	Примечания
1	$M_0 \to К_0$		предполагаем,
2	$О_0 \to Д_0$		что посылки истинны,
3	$M_0 \vee О_0$		
4		$Д_0$	а заключение ложно
5		$О_0$	из 2, 4 и определения импликации
6	M_0		из 3, 5 и определения дизъюнкции
7	$К_0$		из 1, 6 и определения импликации

Убеждаемся, что предположение справедливо при значениях переменных $M_0 =$ И, $К_0 =$ И, $О_0 =$ Л, $Д_0 =$ Л. Следовательно, рассуждение *не является логически правильным*.

Другой способ решения задачи: построить таблицу истинности для формулы $(M \to К)\,\&\,(О \to Д)\,\&\,(M \to О) \to Д$ и убедиться, что она не является тавтологией. Тогда по признаку логического следования (см. 2.2.2) рассуждение не является логически правильным. Так как в рассуждении участвуют четыре высказывательных переменные (*М*, *К*, *О*, *Д*), то таблица истинности будет содержать $2^4 = 16$ строк, и этот способ является трудоемким.

С помощью правил вывода можно построить логически правильное рассуждение, но не всегда можно доказать неправильность логического рассуждения.

Поэтому для данной задачи наиболее удобным является сокращенный способ проверки правильности логического рассуждения.

2.2.5. Контрольные вопросы и упражнения

1. Что означает предложение: ”Из формулы P логически следует формула D”?
2. Покажите по определению, что из формулы $P = X$ логически следует формула $D = X \vee Y$.
3. Покажите, что из посылок $P_1 = X \to Y$ и $P_2 = \neg X$ не следует логически формула $D = \neg Y$.
4. Запишите в виде схемы следующее рассуждение: ”Если идет дождь, то я беру зонт. Если светит солнце, то я беру веер. Идет дождь или светит солнце. Следовательно, я беру зонт или веер”.
5. Перечислите способы, которыми можно доказать правильность логического рассуждения.
6. Обоснуйте сокращенный способ проверки правильности логического рассуждения.
7. Для чего применяются правила вывода?
8. Докажите справедливость цепного правила вывода (табл. 2.10).
9. Сформулируйте теорему Пифагора и обратно противоположную к ней.
10. Приведите примеры косвенных доказательств теорем.

2.3. Логика предикатов

2.3.1. Понятие предиката

Не всякие логические рассуждения могут быть проведены средствами логики высказываний. Иногда нам требуется исследовать саму структуру предложений. Это можно сделать с помощью логики предикатов. Предложение “x белого цвета” не является высказыванием, но если вместо x подставить конкретное значение, например “ снег” или “жираф”, получим высказывание. Это предложение описывает свойство x “быть белого цвета” и является *одноместным предикатом*. Если рассмотрим предложение “x больше ростом, чем y”, то подставляя конкретные пары значений (x, y) , будем получать высказывания, принимающие значение “истина” или “ложь”. Это предложение описывает свойство пары объектов и является *двухместным предикатом*.

В общем случае n-местным предикатом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция, аргументы которой являются элементами произвольного множества M, а значения принадлежат множеству {И, Л}, т.е. $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to$ {И, Л}. Элементы множества M называются *предметными переменными*. Количество предметных переменных есть *порядок* (местность) предиката. Множество значений предметных переменных, на котором предикат принимает значение И, называется ***множеством истинности*** предиката. Например, определим на множестве M=$\mathbf{N}$ одноместный предикат $C(x)$ – “x делится на

2". Его множеством истинности является множество целых положительных чисел. На множестве M=**R** зададим двухместный предикат $L(x, y)$ – "x меньше y". Его множество истинности можно изобразить на плоскости xOy как множество точек, лежащих выше прямой $x = y$.

Пусть два предиката P и Q определены на одном и том же множестве M. Так как предикаты могут принимать только два значения (истина или ложь), то к ним можно применить операции логики высказываний, образуя новые предикаты, при этом порядок (местность) предиката не меняется: $\neg P,\ P \,\&\, Q,\ P \vee Q,\ P \to Q,\ P \leftrightarrow Q$. В качестве упражнения дайте определение этим предикатам самостоятельно.

2.3.2. Кванторы

Кроме операций логики высказываний, в логике предикатов рассматриваются операции квантификации. Для их обозначения используются символы:

$\forall$ - квантор всеобщности;

$\exists$ - квантор существования.

Рассмотрим эти операции вначале для одноместных предикатов.

Пусть $P(x)$ – одноместный предикат, определенный на множестве M. Тогда под выражением $\forall x P(x)$ будем понимать высказывание, которое принимает значение истина тогда и только тогда, когда $P(x)$ истинно для *каждого* элемента x множества M. Это высказывание уже не зависит от x. Переменную x в предикате $P(x)$ называют *свободной*, а в высказывании $\forall x P(x)$ – связанной квантором всеобщности.

Аналогично, под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если найдется *хотя бы один* элемент x множества M, для которого $P(x)$ истинно, и ложным, если ни одного такого элемента во множестве M нет. Высказывание $\exists x P(x)$ не зависит от x, в нем переменная x связана квантором существования.

Операции квантификации являются обобщением операций конъюнкции и дизъюнкции на случай бесконечного множества M предметной переменной. Действительно, пусть множество M конечно: $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Тогда $\forall x P(x) = \text{И}$ означает, что для всех элементов множества M выполняется свойство P, т.е.

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} P(x_i) = P(x_1) \,\&\, P(x_2) \,\&\ldots\&\, P(x_n) = И.$$

Равенство $\forall x P(x) = \text{Л}$ означает, что найдется хотя бы один элемент $x_m \in M$ такой, что $P(x_m) = \text{Л}$, т.е. $\mathop{\&}_{i=1}^{n} P(x_i) = Л.$

Операция квантификации понижает порядок (местность) предиката, а одноместный предикат превращает в высказывание (0-местный предикат).

Применение одной кванторной операции к двухместному предикату превращает его в одноместный предикат: $\exists y L(x, y)$ – здесь связана переменная y, а переменная x осталась свободной; а двух – в высказывание $\forall x \exists y L(x, y)$ – "для любого x найдется y такой, что $x < y$ " (если предикат $L(x, y)$ означает " $x < y$ "). Если на двухместный предикат навешивают два одноименных квантора, то их можно менять местами, если же кванторы разноименные, то этого делать нельзя.

Пример. Пусть предикат $P(x, y)$ выражает свойство "покупателю x подходит по размеру пара ботинок y". Тогда высказывание $\forall x \exists y P(x, y)$ может служить рекламой обувного магазина: "каждому покупателю мы подберем подходящую по размеру пару ботинок", а высказывание $\exists y \forall x P(x, y)$ – нет ("у нас есть пара ботинок, подходящая по размеру любому покупателю").

2.3.3. Формулы логики предикатов

Из предикатных символов с помощью знаков логических операций и кванторов строятся формулы логики предикатов, которые используются в информационных задачах для описания предметной области. При этом определяется содержание множества предметных переменных M, а каждому предикатному символу придается смысл – задается свойство, которое описывает этот предикат. Таким образом, формулам придается некоторая ***интерпретация***. Одна и та же формула в разных интерпретациях может иметь разные значения.

Пример. Пусть задана формула $F = \exists x \forall y P(x, y)$. Рассмотрим две ее интерпретации:

I_1: M=N, $P(x, y)$–" $x \le y$" ;

I_2: M=Z, $P(x, y)$–" $x \le y$" .

В первом случае F=И – это утверждение о существовании наименьшего натурального числа. Во втором случае F=Л.

Если формула F истинна при любых значениях своих аргументов в некоторой интерпретации, то она называется истинной в данной интерпретации. Формула, истинная в любой интерпретации, называется ***общезначимой***. Например, формула $F = \forall x A(x) \to A(y)$ общезначима. Аналогично, можно говорить о формулах равносильных в данной интерпретации и просто равносильных.

В логике высказываний мы всегда можем определить по таблице истинности, является ли формула тавтологией. В логике предикатов нет единой процедуры, позволяющей определить, является ли формула общезначимой: ведь каждой формуле можно придать бесконечное число интерпретаций.

2.3.4. Равносильные преобразования формул

Две формулы логики предикатов называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые истинностные значения при любых значениях переменной в любой интерпретации. Все равносильности логики высказываний (табл. 2.5) справедливы в логике предикатов. Кроме этого, в логике предикатов есть равносильности, связанные с преобразованиями формул, содержащих кванторы (табл. 2.13).

Таблица 2.13

Основные равносильности логики предикатов

№	Формула
1	$\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$
2	$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$
3	$(\forall x P(x))\,\&\,(\forall x Q(x)) \equiv \forall x(P(x)\,\&\,Q(x))$
4	$(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) \equiv \exists x(P(x) \vee Q(x))$
5	$(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \forall x \forall y(P(x) \vee Q(y))$
6	$(\exists x P(x))\,\&\,(\exists x Q(x)) \equiv \exists x \exists y(P(x)\,\&\,Q(y))$

Докажем первую из этих формул: $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$.

Зададим произвольную интерпретацию I этой формулы на множестве M. Покажем, что левая и правая части формулы принимают одинаковые значения при любых значениях предметной переменной $x \in M$.

Пусть $\neg(\exists x P(x)) =$ И в данной интерпретации, тогда $\exists x P(x) =$ Л. По определению квантора существования это означает, что во множестве M нет такого элемента x, для которого $P(x)$ принимает значение “истина”. Следовательно, при всех значениях предметной переменной x предикат $P(x) \equiv$ Л, а $\neg P(x) \equiv$ И. По определению квантора всеобщности формула $\forall x(\neg P(x))$ истинна в данной интерпретации.

Если же формула $\neg(\exists x P(x))$ ложна в данной интерпретации, тогда $\exists x P(x)$ истинна. Это значит, что найдется хотя бы один элемент $a \in M$ такой, что $P(a) =$ И, т.е. $\neg P(a) =$ Л. Но тогда $\forall x(\neg P(x))$ ложна в данной интерпретации.

Следовательно, $\neg(\exists x P(x))$ и $\forall x(\neg P(x))$ равносильны в данной интерпретации, а в силу ее произвольности, равносильны.

Остальные равносильности логики предикатов (табл. 2.7) доказываются аналогично. Обратите внимание на разницу между парами формул 3, 4 и 5, 6. В формулах 3, 4 используются “родственные” операции: конъюнкция и квантор всеобщности, дизъюнкция и квантор существования. В формулах 5, 6, прежде чем выносить квантор за скобки, нам приходится делать замену переменной: $(\exists x P(x)) \& (\exists x Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \& (\exists y Q(y))$, чтобы подчеркнуть разные области действия кванторов существования.

Действительно, если $P(x)$ означает “x получил пятерку по математике”, а $Q(x)$ – “x получил пятерку по физике”, то может оказаться, что $(\exists x P(x)) \& (\exists x Q(x)) =$ И, а $(\exists x (P(x) \& Q(x)) =$ Л (если пятерки получили разные люди).

2.3.5. Рассуждения в логике предикатов

Рассмотрим рассуждение: “Каждый орел умеет летать. Некоторые свиньи не умеют летать. Следовательно, некоторые свиньи – не орлы”. На языке предикатов его можно записать так:

$$\left| \begin{array}{l} \forall x (O(x) \to L(x)) \\ \exists x (S(x) \& \neg L(x)) \\ \hline \exists x (S(x) \& \neg O(x)) \end{array} \right.$$

Здесь предикат $O(x)$ описывает свойство x быть орлом, $S(x)$ – быть свиньей, $L(x)$ – уметь летать. С каждым предикатом связано множество истинности.

Условие $\forall x (O(x) \to L(x))$ $\forall x$ означает, что $O \subseteq L$; $\exists x (S(x) \& \neg L(x))$ – что $S \cap \neg L \neq \varnothing$; $\exists x (S(x) \& \neg O(x))$ – что $S \cap \neg O \neq \varnothing$ (рис. 2.1).

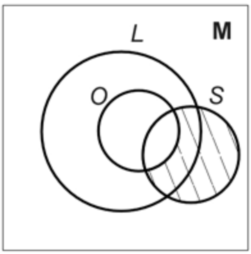


Рис. 2.1. Множество истинности предиката $\exists x(S(x) \& \neg O(x))$

В этом рассуждении мы проверили правильность логического рассуждения, опираясь на геометрическую иллюстрацию. В логике предикатов существуют формальные методы проверки правильности рассуждений. Они используют специальную форму записи формулы логики предикатов – предваренную нормальную форму (ПНФ). Записать формулу ***в предваренной нормальной форме*** – это значит:

1) перейти от символов $\to$ и ~ к символам &, $\vee$, $\neg$;

2) внести все отрицания внутрь формулы, “приклеив” их к предикатным символам;
3) вынести все кванторы в начало формулы.

Пример. Записать в ПНФ формулу логики предикатов

$$F = \neg(\exists x(P(x) \to \forall y Q(y))).$$

В преобразованиях будем использовать законы логики высказываний (табл. 2.5) и логики предикатов (табл. 2.13).

$$F \equiv \neg(\exists x(P(x) \to \forall y Q(y))) \equiv \forall x(\neg(\neg P(x) \vee \forall y Q(y))) \equiv$$
$$\equiv \forall x(P(x) \,\&\, \neg(\forall y Q(y))) \equiv \forall x(P(x) \,\&\, (\exists y \neg Q(y))) \equiv$$
$$\equiv \forall x \exists y (P(x) \,\&\, \neg Q(y)).$$

2.3.6. Решение задачи контрольной работы №2

<u>*Задача*</u>. Используя два предиката, записать предложение в виде формулы логики предикатов: “Все кошки знают румынский язык”. Записать отрицание этой формулы и привести ее к предваренной нормальной форме.

Решение. Будем использовать предикат $K(x)$ – “x является кошкой”, $R(x)$ – “x знает румынский язык”. Тогда данное предложение можно записать в виде формулы:

$$F = \forall x(K(x) \to R(x)) \equiv \forall x(\neg K(x) \vee R(x)).$$

Отрицание данного предложения сформулируем, начиная со слова “неверно”. “Неверно, что все кошки знают румынский язык”.

$$\neg F = \neg(\forall x(K(x) \to R(x))) \equiv \neg(\forall x(\neg K(x) \vee R(x))$$
$$\equiv \exists x(\neg(\neg K(x) \vee R(x) \equiv \exists x(K(x) \,\&\, \neg R(x)).$$

2.3.7. Контрольные вопросы и упражнения

1. Приведите примеры одноместных предикатов.
2. Дайте определение n-местного предиката.
3. Что такое предметные переменные?
4. Что такое порядок (местность) предиката?
5. Что такое множество истинности предиката?
6. Какие переменные являются связанными, а какие свободными:
   $F = (\forall x P(x) \to Q(y)) \vee (\neg z Q(z))$?
7. Запишите в виде формулы логики предикатов:
   а) если мороз больше 40^0, то некоторые школьники не идут на занятия;
   б) если мороз больше 50^0, то все школьники не идут на занятия.
8. Что такое общезначимая формула?
9. Запишите основные равносильности логики предикатов.
10. Как привести формулу логики предикатов к предваренной нормальной форме?

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

3.1. Ориентированные графы

3.1.1. Основные понятия

С ориентированными графами мы уже встречались при изучении бинарных отношений.

<u>*Определение*</u>. ***Ориентированным графом*** (орграфом) называется упорядоченная пара (X,Γ), где X – множество произвольной природы, а $\Gamma \subseteq X \times X$.

Элементы множества X называются ***вершинами***, а элементы (x, y) множества Γ - ***дугами*** орграфа $G_0 = (X,\Gamma)$. Обычно вершины орграфа изображаются точками плоскости, а каждая дуга (x, y) – стрелкой от вершины x к вершине y (x - начало, y – конец дуги).

Говорят, что вершина x смежна вершине y, если x является началом, а y – концом одной и той же дуги. Две дуги смежны, если у них есть общая вершина. Говорят, что вершина x и дуга g ***инцидентны***, если вершина x является началом или концом дуги g. Дуга $g = (x, y)$ называется ***петлей***, если $x = y$.

Обозначим

$$\Gamma(x) = \{y \mid (x, y) \in \Gamma\};$$

$$\Gamma^{-1}(x) = \{z \mid (z, x) \in \Gamma\};$$

$$\Gamma^{n}(x) = \Gamma(\Gamma^{n-1}(x));$$

$$\Gamma^{-n}(x) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-(n-1)}(x)).$$

Множеством ***достижимости*** вершины $x \in X$ называется множество вершин X :

$$D(x) = \{x\} \cup \Gamma(x) \cup \Gamma^{2}(x) \cup \ldots .$$

Множеством ***контрдостижимости*** вершины $x \in X$ называется множество вершин X :

$$K(x) = \{x\} \cup \Gamma^{-1}(x) \cup \Gamma^{-2}(x) \cup \ldots .$$

3.1.2. Орграфы и бинарные отношения

Мы рассматриваем орграфы, в которых каждая пара вершин может соединяться не более, чем двумя дугами; причем если дуги две, то они идут в противоположных направлениях. Это графы Бержа – графы представления бинарных отношений. Рассмотрим, как связаны свойства бинарного отношения (см. 1.2.4) с изображением орграфа на плоскости.

Рефлексивное бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ представляется орграфом $G_0 = (X, R)$, имеющим петли при каждой вершине, т.к. по определению $\forall x \in X \Rightarrow (x, x) \in R$ (рис. 3.1, *а*).

Антирефлексивному отношению R соответствует орграф, не имеющий ни одной петли (рис. 3.1, *б*)

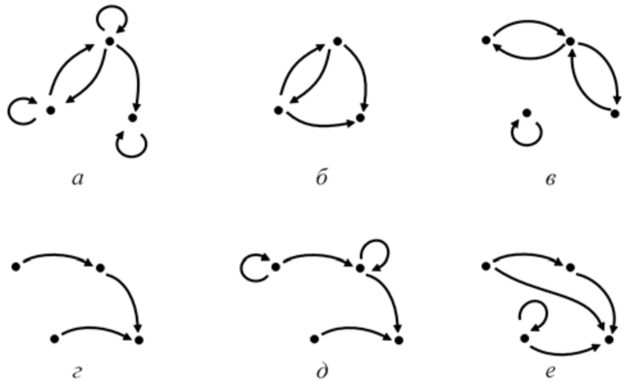


Рис. 3.1. Орграфы, представляющие бинарное отношение:
а) рефлексивное; *б)* антирефлексивное; *в)* симметричное;
г) несимметричное; *д)* антисимметричное; *е)* транзитивное

Свойство *симметричности* отношения R означает, что любые две вершины соединены парой противоположно направленных дуг (рис. 3.1, *в*). В орграфе, представляющем *несимметричное* отношение, нет петель, и любая пара вершин может быть соединена только одной дугой (рис. 3.1, *г*). *Антисимметричность* означает, что любая пара вершин орграфа может быть соединена только одной дугой, но могут быть и петли (рис. 3.1, *д*). Согласно определению *транзитивности*, для любой пары дуг таких, что конец первой совпадает с началом второй, существует третья дуга, имеющая общее начало с первой и общий конец со второй. Этому условию отвечают орграфы, изображенные на рис. 3.1, *б*, *г*.

3.1.3. Матрицы орграфа

При решении на ЭВМ задач, связанных с орграфами, удобно представлять орграфы в виде матриц. Дадим определения матриц для орграфа $G_0 = (X, \Gamma)$, где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\Gamma = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$.

Матрицей смежности орграфа G_0 называется матрица A, имеющая n строк и n столбцов, элемент которой, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца, равен

$$a_{i\,j} = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad (x_i, x_j) \in \Gamma, \\ 0, & \textit{если} \quad (x_i, x_j) \notin \Gamma, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Матрица смежности не сохраняет информацию о нумерации дуг орграфа.

Матрицей инцидентности орграфа G_0 называется матрица B, имеющая n строк и m столбцов, элемент которой, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца, равен

$$b_{i\,j} = \begin{cases} -1, & \textit{если вершина } x_i - \textit{начало дуги } g_j, \\ 1, & \textit{если вершина } x_i - \textit{конец дуги } g_j, \\ 2, & \textit{если при вершине } x_i \textit{ есть петля } g_j, \\ 0, & \textit{если вершина } x_i \textit{ и дуга } g_j \textit{ неинцидентны}, \end{cases} \qquad i = \overline{1, n}, \; j = \overline{1, m}.$$

3.1.4. Решение задачи 5 контрольной работы № 2

Задача. Дан ориентированный граф $G_0 = (X, R)$ (рис. 3.2, *а*). Найти множество достижимости и множество контрдостижимости вершины x_2. Выяснить, какими свойствами обладает бинарное отношение R. Построить матрицу смежности и матрицу инцидентности орграфа G_0.

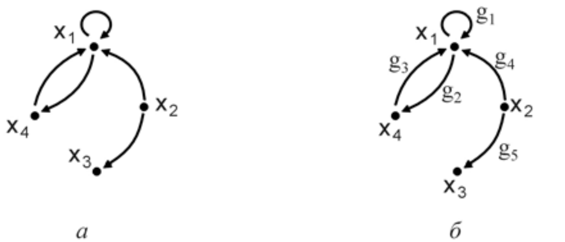


Рис. 3.2. Орграф G_0: *а)* данный по условию задачи; *б)* с занумерованными дугами

Решение. Будем строить множество достижимости поэтапно, включая в него вершины, в которые можно попасть из вершины x_2, пройдя по одной, двум, трем и так далее дугам орграфа, до тех пор, пока множество не перестанет меняться.

Шаг 0. $D_0 := \{x_2\}$.

Шаг 1. $R(x_2) = \{x_1, x_3\}, D_1 = D_0 \cup R(x_2) = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Шаг 2. $R^2(x_2) = R(R(x_2)) = R(x_1) \cup R(x_3) = \{x_1, x_4\} \cup \varnothing = \{x_1, x_4\}$.

$$D_2 = D_1 \cup R^2(x_2) = \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{x_1, x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

Множество D_2 содержит все вершины орграфа, поэтому процесс построения множества достижимости окончен:

$D(x_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Аналогично строится множество контрдостижимости, но теперь мы ищем вершины, из которых можно попасть в вершину x_2.

Шаг 0. $K_0 := \{x_2\}$.

Шаг 1. $R^{-1}(x_2) = \varnothing, K_1 = K_0 \cup \varnothing = K_0$.

Дальнейшее изменение множества невозможно, поэтому $K(x_2) = \{x_2\}$.

Выясним, какими свойствами обладает отношение R. Отношение не является рефлексивным (не при всех вершинах есть петли) и не является антирефлексивным (есть петля при вершине x_2). Отношение не является симметричным (пара вершин (x_2, x_3) соединена только одной дугой), не является несимметричным (вершины x_1 и x_4 соединены парой дуг), не является антисимметричным ($(x_2, x_4) \in R$ и $(x_4, x_2) \in R$, но $x_2 \neq x_4$). Отношение не является транзитивным ($(x_2, x_1) \in R$ и $(x_1, x_4) \in R$, но $(x_2, x_4) \notin R$).

Матрица смежности орграфа G_0 имеет вид:

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Для построения матрицы инцидентности занумеруем дуги орграфа G_0 (рис. 3.1, *б*). В этих обозначениях матрица инцидентности имеет вид (i-ый столбец матрицы соответствует дуге $g_i, i = 1, 2, \ldots, 5$):

$$B = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

3.1.5. Контрольные вопросы и упражнения

1. Какие вершины орграфа называются смежными?
2. Когда говорят, что вершина x инцидентна дуге g?

3. Какая дуга орграфа называется петлей?
4. Что такое множество достижимости вершины x?
5. Что такое множество контрдостижимости вершины x?
6. Какую особенность имеет орграф рефлексивного отношения?
7. Какую особенность имеет орграф симметричного отношения?
8. В орграфе 6 вершин и 8 дуг. Какую размерность имеет его матрица смежности? А матрица инцидентности?

3.2. Неориентированные графы

3.2.1. Основные термины

Неориентированным графом (неорграфом) называется упорядоченная пара $G=(X,U)$, где X – множество вершин неорграфа G, а U – множество неупорядоченных пар вершин (ребер неорграфа). Любые две вершины неорграфа могут быть соединены не более, чем одним ребром. Две вершины называются *смежными*, если они соединены ребром. Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину. Вершина *инцидентна* ребру (ребро инцидентно вершине), если она является одним из концов ребра. ***Степень*** $p(x)$ вершины x равна количеству ребер, инцидентных вершине x. Сумма степеней всех вершин неорграфа $G=(X,U)$ равна удвоенному числу ребер:

$$\sum_{x\in X} p(x) = 2\cdot|U|.$$

Неорграф называется ***пустым*** (обозначается O_n), если все вершины имеют нулевые степени (рис. 3.3, *а*). Неорграф называется ***полным*** (обозначается K_n), если все его вершины смежны друг другу (рис. 3.3, *б*). Неорграф называется ***двудольным***, если множество его вершин можно разбить на два непустых подмножества X_1 и X_2 так, что смежные вершины принадлежат разным подмножествам (рис. 3.3, *в*). Полный двудольный граф такой, что $|X_1|=s, |X_2|=r$, обозначается $K_{s,r}$ (рис. 3.3, *г*).

а *б* *в* *в*

Рис. 3.3. Примеры неорграфов: *а)* пустой O_4; *б)* полный K_4; *в)* двудольный; *г)* полный двудольный $K_{3,2}$

В дальнейшем везде вместо термина “неорграф” будем говорить “граф”.

Граф $G_1 = (X_1, U_1)$ называется ***подграфом*** графа $G = (X, U)$, если $X_1 \subseteq X, U_1 \subseteq U$. Подграф $G_1 = (X_1, U_1)$ называется ***остовным*** подграфом графа $G = (X, U)$, если $X_1 = X$. На рис. 3.4, *б*, *в* приведены остовные подграфы графа G (рис. 3.4, *а*).

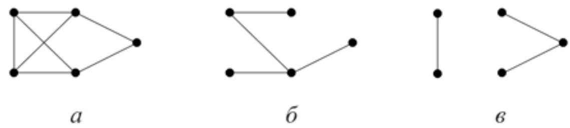


Рис. 3.4. Граф G (*а*) и его остовные подграфы (*б*, *в*)

3.2.2. Матрицы графа

Пусть $G = (X, U)$ неорграф, причем $|X_1| = n, |X_2| = m$. Присвоим номера вершинам графа: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Матрицей смежности графа G называется квадратная матрица A размерности $n \times n$ (n строк, n столбцов), элементы которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ смежна вершине } x_j, \\ 0, & \text{если } \{x_i, x_j\} \notin U, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Матрица смежности неорграфа обладает двумя особенностями: а) на главной диагонали матрицы могут стоять только нули: $a_{ii} = 0, i = \overline{1, n}$, т.к. в неорграфе нет петель; б) матрица симметрична относительно главной диагонали: $a_{ij} = a_{ji}, i, j = \overline{1, n}$, т.к. ребро является неупорядоченной парой вершин.

Занумеруем теперь и ребра графа: $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$.

Матрицей инцидентности графа G называется прямоугольная матрица B размерности $n \times m$ (n строк, m столбцов), элементы которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } u_j, \\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ и ребро } u_j \text{ неинцидентны},. \end{cases} \quad i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, m}$$

Каждый столбец матрицы инцидентности соответствует одному ребру графа, поэтому в каждом столбце этой матрицы имеется ровно две единицы (соответствующие двум вершинам – концам данного ребра).

3.2.3. Решение задачи 6 контрольной работы №2

Задача. Дан неорграф $G=(X,U)$ (рис. 3.5, *а*). Занумеруйте вершины графа и определите степени всех его вершин. Нарисуйте какой-либо остовный подграф графа G. Запишите матрицу смежности графа G. Занумеруйте ребра графа и запишите его матрицу инцидентности.

Решение. Занумеруем вершины графа арабскими цифрами, а его ребра римскими цифрами в произвольном порядке (рис. 3.5, *б*).

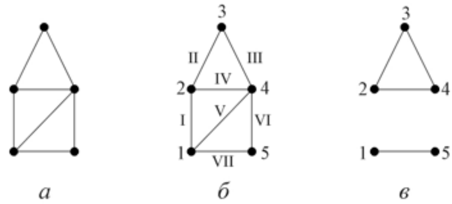


Рис. 3.5. Граф G=(X,U):
а) данный по условию задачи;
б) с занумерованными вершинами и рёбрами;
в) остовный подграф графа G

В остовный подграф $G_1=(X_1,U_1)$ графа $G=(X,U)$ включим все вершины $X_1=X$ и любое непустое подмножество ребер, например, $U_1=\{\text{II},\text{III},\text{IV},\text{VII}\}$ рис.3.5, *в*. Перечислим степени вершин графа: $p(1)=3$, $p(2)=3$, $p(3)=2$, $p(4)=4$, $p(5)=2$.

Матрица смежности A (ее размерность 5×5) имеет вид:

$$A=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&1&1&0\\0&1&0&1&0\\1&1&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}.$$

Матрица инцидентности имеет размерность 5×7 и равна

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} & \mathrm{VI} & \mathrm{VII} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

3.2.4. Контрольные вопросы и упражнения

1. Перечислены степени всех вершин неорграфа: $2, 3, 1, 2, 2$. Сколько ребер имеет этот граф? Нарисуйте такой граф.
2. Какую степень имеет каждая вершина графа K_5?
3. Нарисуйте двудольный граф $K_{4,2}$. Какую размерность имеют его матрица смежности и матрица инцидентности?
4. Сколько остовных подграфов можно построить для графа K_3?
5. Докажите, что в неорграфе число вершин нечетной степени четно.
6. Сколько различных подграфов имеет граф K_3?
7. Граф, степени всех вершин которого одинаковы и равны числу l, называется однородным степени l. Нарисуйте однородный степени 2 граф с пятью вершинами. Сколько существует однородных степени 2 графов с шестью вершинами?

3.3. Планарные графы

3.3.1. Изоморфизм графов

Пусть даны неорграфы $G_1 = (X_1, U_1)$ и $G_2 = (X_2, U_2)$. Графы G_1 и G_2 называются ***изоморфными***, если существует биекция G_1 на G_2, сохраняющая отношение смежности. Это значит, что существует биекция (см. 1.4.1) $\varphi : G_1 \to G_2$ такая, что вершины $x, y \in X_1$ в графе G_1 соединены ребром $u \in U_1$ тогда и только тогда, когда в графе G_2 их образы $\varphi(x), \varphi(x) \in \varphi(y) \in X_2$ соединены ребром $\varphi(u) \in U_2$. Из определения следует, что не могут быть изоморфными два графа, у которых не совпадает количество вершин или количество ребер.

Пример. Графы G_1 и G_2 (рис. 3.6), изоморфны, т.к. имеют одинаковое количество вершин и ребер ($|X_1| = |X_2| = 4, |U_1| = |U_2| = 6$), и можно биективно отобразить граф G_1 на G_2, сохранив отношение смежности:

$\varphi(x_i) = y_i, i = \overline{1,4}; \varphi(u_i) = v_i, i = \overline{1,6}.$

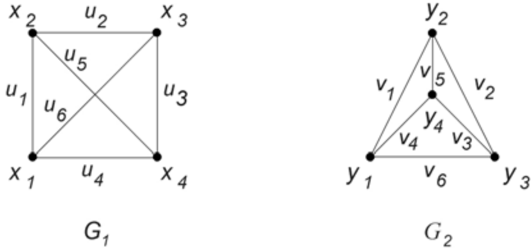


Рис. 3.6. Изоморфные графы G_1 и G_2

Для изоморфных графов используется обозначение $G_1 \cong G_2$. Изоморфные графы несут одинаковую информацию и отличаются только обозначениями вершин и ребер. Матрицы смежности изоморфных графов могут быть получены друг из друга одновременными (одинаковыми) перестановками строк и столбцов.

3.3.2. Планарность

Часто требуется изобразить граф так, чтобы его ребра не пересекались. Например, при изготовлении микросхем печатным способом электрические цепи наносятся на плоскую поверхность изоляционного материала. А так как проводники не изолированы, то они не должны пересекаться. Аналогичной является задача проектирования железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

Назовем граф ***плоским***, если его вершины являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, причем никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им вершины. Любой граф, изоморфный плоскому графу, будем называть ***планарным***. Так, граф G_2 (рис. 3.6) является плоским, а граф G_1 – планарным (т.к. изоморфен плоскому графу G_2). Существуют и непланарные графы. Один из них появляется в задаче о “трех домах и трех колодцах”: имеются три дома и три колодца (газ, вода и свет); требуется соединить каждый дом с каждым колодцем так, чтобы линии соединения не пересекались. Моделью служит непланарный граф $K_{3,3}$. Также непланарным является граф K_5 (рис. 3.7).

Рис. 3.7. Непланарные графы K_5 и $K_{3,3}$

3.3.3. Критерий планарности

Графы K_5 и $K_{3,3}$ (рис. 3.7) интересны тем, что они являются эталонами непланарных графов. Все другие непланарные графы имеют подграфы, “подобные” или K_5, или $K_{3,3}$. Что значит “подобные”?

Элементарное стягивание графа $G=(X,U)$ заключается в следующем: а) удаляем ребро $\{x, y\}$ из U; б) заменяем символы x и y в U на новый символ z; в) удаляем вершины x, y из X; г) добавляем z в X. Элементарное стягивание графа G означает слияние двух смежных вершин x и y в одну z после удаления ребра между ними.

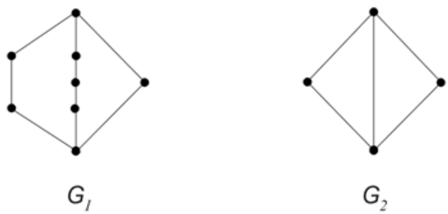


Рис. 3.8 Граф G_1 стягиваемый к графу G_2

Граф G_1 называется *стягиваемым* к графу G_2, если G_2 может быть получен из G_1 путем последовательных элементарных стягиваний (рис. 3.8).

Первый критерий планарности независимо друг от друга доказали русский математик Л.С. Понтрягин и польский математик К. Куратовский.

Теорема Понтрягина - Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к K_5 или $K_{3,3}$.

Пример. Граф G_1 (рис. 3.9, *а*) является непланарным, так как его подграф G_2 (рис. 3.9, *б*) изоморфен графу $K_{3,3}$ (рис. 3.9, *в*). Вершины графа

G_2 покрашены в два цвета, чтобы легче было установить изоморфизм $G_2 \cong K_{3,3}$

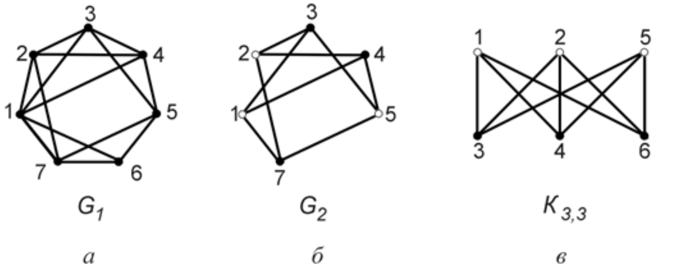


Рис. 3.9. Пример непланарного графа: *а)* граф G_1;
б) подграф $G_2 \subseteq G_1$; *в)* непланарный граф $K_{3,3} \cong G_2$

3.3.4. Решение задачи 7 контрольной работы №2

Задача. Даны графы G_1 и G_2 (рис. 3.10). Показать, что графы изоморфны. Является ли граф G_1 планарным?

Рис. 3.10. Графы G_1 и G_2

Решение. Число вершин n_1 и число ребер m_1 графа G_1 совпадает с числом вершин n_2 и числом ребер m_2 графа G_2: $n_1 = n_2 = 6, m_1 = m_2 = 8$. Зададим произвольную нумерацию вершин и ребер графа G_1. В графе G_1 две вершины x_1 и x_2 имеют степень $p(x_1) = p(x_2) = 2$. Найдем в графе G_2 две вершины, имеющие степень 2 и обозначим их y_1 и y_2.

Вершина x_1 смежна вершинам x_3 и x_4. Обозначим y_3 и y_4 вершины графа G_2, смежные вершине y_1. Соответственно ребрам u_1 и u_2 графа G_1, занумеруем v_1, v_2 ребра графа G_2, инцидентные вершинам y_1 и y_3, y_1 и y_4. Далее занумеруем в графе G_2 вершины, смежные с y_2, как y_5, y_6, а инцидентные им ребра v_4, v_3. Вершина x_4 в графе G_1 смежна вершинам x_1, x_3, x_5; обозначим соответствующие ребра v_2, v_6, v_7. Ребру $u_5 = \{x_3, x_5\}$ графа G_1 сопоставим ребро $v_5 = \{y_3, y_5\}$ графа G_2; ребру $u_8 = \{x_5, x_6\}$ – ребро $v_8 = \{y_5, y_6\}$. Построена биекция $\varphi : G_1 \to G_2, \varphi(x_i) = y_i, i = \overline{1,6}$, $\varphi(u_j) = v_j, i = \overline{1,8}$ такая, что смежным вершинам x_i и x_j графа G_1 сопоставляются смежные вершины y_i и y_j. Следовательно, графы G_1 и G_2 изоморфны.

Для ответа на вопрос о планарности построим плоский граф G_3, изоморфный графу G_1 (рис. 3.11). Граф G_1 является планарным.

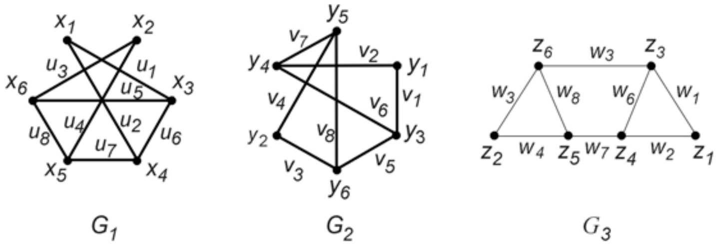


Рис. 3.11. Изоморфные графы G_1, G_2, G_3

3.3.5. Контрольные вопросы и упражнения

1. Какие графы называются изоморфными?
2. Изоморфны ли графы K_8 и $K_{2,4}$?
3. Запишите матрицы смежности изоморфных графов G_1 и G_2 (рис.3.6).
4. Как связаны между собой матрицы инцидентности двух изоморфных графов?
5. Какой граф называется плоским?
6. Какой граф называется планарным?

3.4. Связность графов

3.4.1. Маршруты

Пусть задан неорграф $G = (X, U)$. Последовательность $x_1 u_1 x_2 u_2 x_3 \ldots u_k x_{k+1}$ вершин $x_i \in X$, $i = \overline{1, k+1}$, и ребер $u_j \in U$, $j = \overline{1,k}$

графа G называется ***маршрутом*** длины k, соединяющим вершины x_1 и x_{k+1}. Вершина x_1 называется начальной, а x_{k+1} – конечной вершиной маршрута. Маршрут называется *замкнутым*, если его конечная вершина совпадает с начальной. Незамкнутый маршрут, в котором все ребра различны, называется ***цепью***. Цепь, в которой все вершины различны, называется ***простой*** цепью. Замкнутый маршрут, в котором все ребра различны, называется ***циклом***. Цикл, в котором все вершины (кроме начальной и конечной) различны, называется ***простым***.

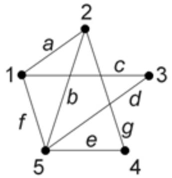


Рис. 3.12. Граф G_1

Пример. В графе G (рис. 3.12) последовательность $5b2a1f5b2c4$ определяет марш-рут длины 5, соединяющий вершину 5 с вершиной 4; $5b2a1d3g5e4$ – цепь длины 5; $5b2c4$ – простую цепь; $5b2c4e5$ – простой цикл.

3.4.2. Компоненты связности

Граф $G = (X, U)$ называется ***связным***, если для любой пары вершин $x, y \in X$ найдется цепь, соединяющая эти вершины. Например, граф G_1 (рис. 3.13) является связным, а граф G_2 – нет (вершины x_1 и x_2 не могут быть соединены цепью).

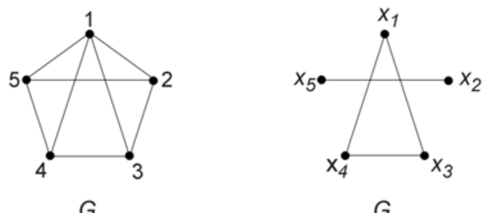


Рис. 3.13. Связность графов

Компонентой связности графа G называется максимальный связный подграф графа G. Слово “максимальный ” здесь означает, что добавление любой вершины графа G превращает этот граф в несвязный. Так, у графа G_2 (рис. 3.13) имеется две компоненты связности: G' – подграф, содержащий вершины x_5,x_2 и соединяющее их ребро; G'' – вершины x_1, x_3, x_4 и соединяющие их ребра. Подграфы G' и G'' не имеют общих вершин и ребер, причем

$G_2 = G' \cup G''$, т.е. множество компонент связности $\{G', G''\}$ образует разбиение графа G_2.

3.4.3. Эйлеровы цепи и циклы

<u>*Задача*</u>. Дан граф $G = (X, U)$. Требуется построить цикл (цепь), проходящий через все ребра графа G ровно по одному разу. Такой цикл (цепь), если он существует, называется ***эйлеровым*** циклом (цепью), а граф G – эйлеровым графом. В популярной формулировке эта задача звучит так: заданную плоскую фигуру нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одной и той же линии дважды (рис. 3.14).

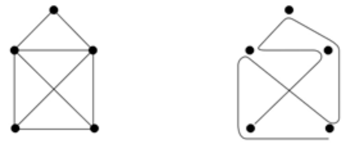


Рис. 3.14. Эйлерова цепь в графе G

<u>*Теорема 1*</u> (об эйлеровом цикле). Для того, чтобы в графе G существовал эйлеров цикл, необходимо и достаточно, чтобы: 1) он был связен; 2) степени всех вершин были четными.

<u>Необходимость</u>. Пусть в графе G существует эйлеров цикл. Тогда граф G связен (любую пару вершин можно соединить цепью – частью эйлерова цикла), и степень каждой вершины четна: так как все ребра эйлерова цикла различны, то с каждым проходом эйлерова цикла через вершину x в этот цикл войдут два новых инцидентных вершине x ребра, следовательно, общее число ребер, инцидентных вершине x, четно.

<u>Достаточность</u> докажем индукцией по количеству ребер m.

Основание индукции. Проверим справедливость теоремы при $m = m_0 = 3$. Пусть граф G связен и все вершины его имеют четную степень. Тогда граф может быть только таким, как на рисунке 3.15, *а*. Очевидно, что в нем есть эйлеров цикл.

Индукционный переход. Предположим, что теорема справедлива для всех графов с числом ребер $m \le k$. Покажем, что теорема справедлива и для графов с числом ребер $m = k + 1 : T(m \le k) \Rightarrow T(m = k + 1)$.

Пусть $G = (X, U)$ связный граф, все вершины которого имеют четную степень и $|U| = k + 1$.

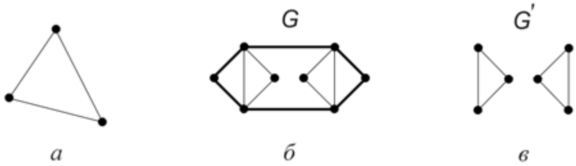


Рис. 3.15. Эйлеровы графы: *а)* эйлеров цикл с числом ребер m=3; *б)* G - связный граф, степени вершин которого четны; *в)* подграф G' графа G

Так как число вершин графа G конечно, то в нем существует цикл μ_0 (на рис. 3.15, *б* выделен жирной линией). Если цикл μ_0 содержит все ребра графа G, он является искомым эйлеровым. Если μ_0 содержит не все ребра графа G, то построим подграф G' графа G, выбросив ребра, содержащиеся в μ_0 (рис. 3.15, *в*). Подграф G' не обязательно связный, но его можно разбить на компоненты связности $G_1, G_2, \ldots, G_p$ (на рис. 3.15, *в* $p = 2$). Каждая компонента связности G_i, $i = \overline{1, p}$, является связным графом, все вершины которого имеют четную степень, а число ребер $m_i \le k$, $i = \overline{1, p}$. По индукционному предположению для каждого графа G_i можно построить эйлеров цикл μ_i, $i = \overline{1, p}$. Так как исходный граф G связен, то цикл μ_0 имеет общие вершины со всеми циклами μ_i, $i = \overline{1, p}$. Тогда искомым эйлеровым циклом в G является объединение циклов $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$. Индукционный переход доказан.

Следовательно, теорема справедлива для графов с любым числом ребер $m \ge 3$.

<u>*Теорема 2*</u> (об эйлеровой цепи). В графе G существует эйлерова цепь тогда и только тогда, когда: 1) граф G связен; 2) граф G имеет ровно две вершины нечетной степени.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

3.4.4. Цикломатическое число

Пусть в графе $G = (X, U)$ количество вершин $|X| = n, |U| = m$, количество компонент связности равно k. ***Цикломатическим числом*** графа G называется число $\lambda(G) = k + m - n$.

Пример. Определим цикломатическое число для каждого из графов G_i, $i = \overline{1,4}$ (рис. 3.16).

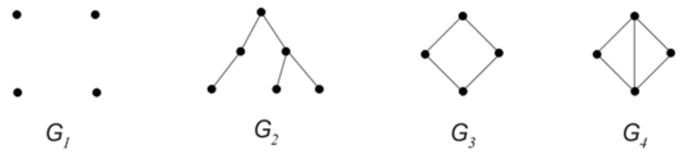


Рис. 3.16. Примеры графов с различными цикломатическими числами

Граф G_1 является пустым графом и для него $n = 4, m = 0, k = 4$, поэтому $\lambda(G_1) = 4 + 0 - 4 = 0$. Для графа G_2 имеем $\lambda(G_2) = 1 + 5 - 6 = 0$. Для G_3 - $\lambda(G_3) = 1 + 4 - 4 = 1$; для $G_4 - \lambda(G_4) = 1 + 5 - 4 = 2$.

Теорема. Цикломатическое число графа равно нулю тогда и только тогда, когда в графе нет циклов.

Действительно, пусть $\lambda(G) = k + m - n$. Рассмотрим остовный подграф $G_1 = (X, U_1)$ графа $G = (X, U)$, выбросив ребро $u_1 : U_1 = U \setminus \{u_1\}$. Если в графе G есть хотя бы один цикл, содержащий ребро u_1, то число компонент связности не изменится; если же ни одного такого цикла нет, то число компонент связности увеличится на единицу: $k_1 = k + 1$. Поэтому $\lambda(G_1) = k_1 + (m - 1) - n \geq \lambda(G)$. Будем повторять эти рассуждения, выбрасывая по одному ребру, пока не получим пустой подграф $G_m = O_n$. Для цепочки подграфов $G, G_1, G_2, \ldots, G_{m-1}, G_m$ выполняются неравенства

$$\lambda(G) \geq \lambda(G_1) \geq \lambda(G_2) \geq \ldots \geq \lambda(G_{m-1}) \geq \lambda(G_m),$$

причем $\lambda(G_m) = \lambda(O_n) = n + 0 - n = 0$, и знак равенства сохранится на протяжении всей цепочки тогда и только тогда, когда выбрасываются ребра, не входящие ни в один цикл. Поэтому $\lambda(G) = \lambda(O_n) = 0$ тогда и только тогда, когда в графе G нет циклов.

3.4.5. Решение задачи 8 контрольной работы №2

Задача. Для данного неорграфа G (рис. 3.17, *а*) определить цикломатическое число. Выяснить, можно ли нарисовать G, не отрывая руки от бумаги и не проходя ни по одному ребру дважды.

Решение. Граф G является связным, поэтому число компонент связности $k = 1$. Число вершин графа $n = 6$, число ребер $m = 10$. По определению цикломатического числа $\lambda(G) = k + m - n = 1 + 10 - 6 = 5$.

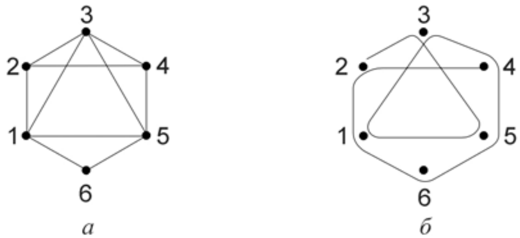


Рис. 3.17. Граф G: *а)* данный по условию;
б) эйлерова цепь в графе G

Для ответа на второй вопрос определим степени всех вершин графа: $p(1) = 4$, $p(2) = 3$, $p(3) = 4$, $p(4) = 3$, $p(5) = 4$, $p(6) = 2$. Граф связен, и ровно две вершины (вторая и четвертая) имеют нечетную степень. По теореме об эйлеровой цепи в графе существует эйлерова цепь, т.е. его можно нарисовать, не отрывая руки от бумаги. Начальной и конечной вершинами этой цепи будут вершины с нечетной степенью (один из вариантов приведен на рис. 3.17, *б*).

3.4.6. Контрольные вопросы и упражнения

1. Нарисуйте граф $K_{3,3}$; постройте в нем цикл длины 4. Можно ли в этом графе построить цикл нечетной длины?
2. Нарисуйте граф, имеющий 6 вершин , 4 ребра, 3 компоненты связности. Чему равно его цикломатическое число?
3. Связный граф задан матрицей смежности:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Чему равно его цикломатическое число?
4. Сформулируйте теорему об эйлеровом цикле.
5. Является ли эйлеровым граф K_5? А граф K_6?
6. Сформулируйте теорему об эйлеровой цепи.
7. Существует ли эйлерова цепь в графе G (рис. 3.12)?
8. Может ли цикломатическое число графа принимать отрицательное значение?
9. Известно, что в графе G есть эйлеров цикл. Может ли его цикломатическое число равняться нулю?

3.5. Графы без циклов

3.5.1. Дерево и лес

Определение. Связный граф без циклов называется ***деревом***. Несвязный граф без циклов - ***лесом***.

В качестве *корня* дерева может быть рассмотрена любая из его вершин. ***Листом*** дерева будем называть вершину x степени единица: $p(x)=1$. *Ветвь* дерева – любая цепь, соединяющая корень с листом.

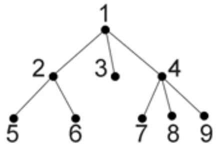


Рис. 3.18. Граф G - дерево

На рис. 3.18 в качестве корня рассматривается вершина 1; листьями являются вершины 3,5,6,7,8,9; ветви – цепи 1-2-5 или 1-4-8 и т.п.

3.5.2. Свойства деревьев

Пусть в графе $G=(X,U)$ $n=|X|$ - количество вершин, $m=|U|$ - количество ребер, k – количество компонент связности.

Свойство 1. Граф G является деревом тогда и только тогда, когда его цикломатическое число $\lambda(G)=0$ и число компонент связности $k(G)=1$.

Это свойство является переформулировкой определения: дерево – связный граф, значит, $k(G)=1$; дерево – граф без циклов, значит, $\lambda(G)=0$.

Свойство 2. Если граф G – дерево, то количество его ребер на единицу меньше количества вершин.

По свойству 1 $\lambda(G)=k+m-n=0$ и $k=1$, отсюда $1+m-n=0$, т.е. $m=n-1$.

Свойство 3. Любая пара вершин дерева может быть соединена единственной простой цепью.

Предположим противное. Пусть найдутся вершины $x,y\in X$ для которых нет такой цепи. Тогда граф G не является связным, что противоречит условию (G – дерево).

Предположим теперь, что для некоторой пары вершин $x,y\in X$ существуют две простых цепи, соединяющих x и y. Тогда образуется цикл, но это противоречит условию (G – дерево).

Следовательно, для любой пары вершин такая цепь существует и единственна.

Свойство 4. Среди связных графов с заданным количеством вершин дерево является максимальным безцикловым графом.

Слово “максимальный” здесь означает, что добавление любого ребра к дереву приводит к появлению цикла. Действительно, соединив любые две несмежные вершины дерева ребром, получим цикл, т.к. по свойству 3 существует цепь, соединяющая эти вершины.

Свойство 5. Дерево является минимальным связным графом.

Слово “минимальный” здесь означает, что удаление любого ребра приводит к нарушению связности. Цикломатическое число обладает свойством $\lambda(G) \geq 0$, у дерева $\lambda(G) = k + m - n = 0$. Удалив ребро, получим подграф $G_1 \subseteq G$, для которого $\lambda(G_1) = k_1 + m_1 - n_1 = k_1 + (m-1) - n = 0$, но по свойству 2 $m = n - 1$, отсюда $k_1 + n - 2 - n = 0$ и $k_1 = 2$, т.е. граф G_1 несвязный.

3.5.3. Каркасы графа

Задача. Шесть городов соединены сетью автодорог (рис. 3.19). Требуется закрыть на ремонт наибольшее количество дорог так, чтобы связь между городами сохранилась.

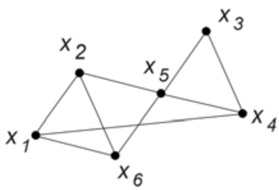


Рис. 3.19. Схема автодорог

В этой задаче имеем связный граф $G = (X, U)$ и требуется построить его остовный связный подграф $G_1 = (X, U_1)$ с наименьшим количеством ребер. По свойству 5 (см. 3.5.2) G_1 – дерево.

Определение. ***Каркасом*** графа G называется остовный подграф графа G с тем же числом связности, но без циклов.

Очевидно, что каркас связного графа – дерево, несвязного – лес. Каркас может быть построен не единственным образом. На рис. 3.20 приведены два различных каркаса для схемы автодорог (рис. 3.19).

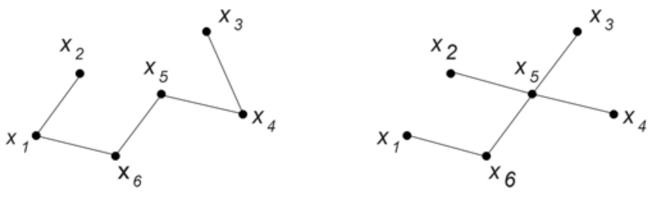


Рис. 3.20. Каркасы графа для схемы автодорог

Сколько ребер нужно удалить, чтобы построить каркас графа?

Теорема. Чтобы построить каркас графа, нужно удалить $\lambda(G)$ ребер.

Докажем теорему для связного графа $G=(X,U)$, $|X|=n, |U|=m,\ k(G)=1$. Пусть $G_1=(X,U_1)$ – каркас графа G. Найдем разность $m(G)-m(G_1)$. Так как G_1 – дерево, то $m(G_1)=n(G_1)-1=n-1$. Значит, при построении каркаса удалено $m(G)-m(G_1)=m-n+1=$ $=1+m-n=\lambda(G)$ ребер.

Для несвязного графа теорема доказывается аналогично (строится каркас для каждой компоненты связности).

Для графа на рис. 3.19 $\lambda(G)=1+9-6=4$ – нужно удалить 4 ребра. Поэтому его каркасы (рис. 3.20) содержат $n-4=9-4=5$ ребер.

Какие ребра нужно удалить для построения каркаса? Рассмотрим два метода построения каркаса графа.

3.5.4. Обход графа “в ширину”

Идея метода заключается в следующем. Начинаем обход графа из произвольной вершины, которой присваиваем метку “1”. Вершинам, смежным с помеченной, присвоим метки $2,3,\ldots,r_1$. Далее нумеруем непомеченные вершины, смежные с 2; затем непомеченные вершины, смежные с 3 и т.д., пока не занумеруем все вершины, смежные с уже помеченными. Если в графе есть непомеченные вершины, то процесс повторяется, пока всем вершинам не будут присвоены метки. Покажем применение этого метода для построения каркаса графа. Дан граф G (рис. 3.21, *а*).

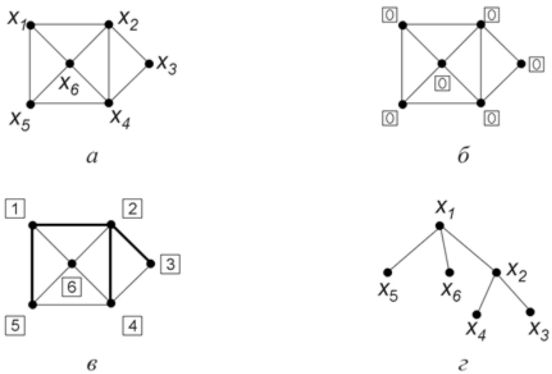


Рис. 3.21. Обход графа G "в ширину":
а) данный граф; *б)* начальная разметка;
в) окончательная разметка; *г)* каркас графа G

Присвоим всем его вершинам метки “0”(рис. 3.21, *б*). Начинаем разметку с вершины x_1: она получает метку “1”. Вершине x_1 смежны вершины x_2, x_6, x_5, имеющие метку “0”. Присваиваем им новые метки “2”, “3”, “4” и включаем в каркас соответствующие ребра (выделены жирной линией на рис. 3.21, *в*). Вершина x_2 имеет метку “2”, ей смежны вершины x_3, x_4, x_6. Но вершина x_6 уже имеет метку, большую нуля, поэтому новые метки “5” и “6” получают вершины x_3 и x_4. Включаем в каркас ребра $\{x_2, x_3\}$ и $\{x_2, x_4\}$. Рассмотрим вершину с меткой “3”. Все вершины, смежные ей, уже имеют метки, большие нуля, поэтому новые ребра к каркасу не добавляем. То же можно сказать и о вершинах с метками “4”, “5”, “6”. Каркас графа G приведен на рис. 3.21, *г*.

Обход графа в “ширину” приводит к “разветвленным” деревьям с короткими ветвями.

Если граф несвязный, то разметка проводится для каждой его компоненты связности.

3.5.5. Обход графа “в глубину”

Этот метод приводит к деревьям малоразветвленным, с длинными ветвями.

Продемонстрируем обход “в глубину” для графа G (рис. 3.21, *а*). Всем вершинам присвоим метку “0” (рис. 3.21, *б*). Начинаем разметку из вершины x_1 с меткой “1”; вершине x_2 присваиваем метку “2”, ребро $\{x_1, x_2\}$ включаем в каркас (рис. 3.22, *а*).

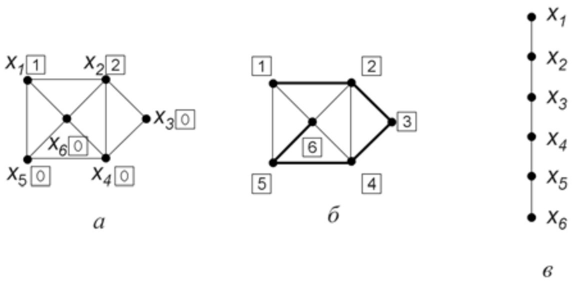


Рис. 3.22. Обход графа G "в глубину": *а)* начало разметки; *б)* окончательная разметка; *в)* каркас графа G

Далее ищем вершину с нулевой меткой, смежную вершине “2” – присваиваем ей метку “3”, включаем соединяющее их ребро в каркас и так далее, до тех пор, пока все вершины не получат отличные от нуля метки. Каркас графа G построен (рис. 3.22, *в*).

3.5.6. Решение задачи 9 контрольной работы №2

Задача. Для данного графа G (рис. 3.23, *а*) выяснить, сколько ребер нужно удалить, чтобы построить его каркас. Построить каркас графа двумя способами (обход “в глубину”, обход “в ширину”), начиная обход из вершины с максимальной степенью.

Решение. Согласно теореме из 3.5.3 количество удаляемых ребер при построении каркаса равно цикломатическому числу графа. Для графа G $n = 5, m = 6, k = 1,$ поэтому цикломатическое число $\lambda(G) = k + m - n = = 1 + 7 - 5 = 3$, т.е. для построения каркаса нужно удалить 3 ребра графа. Максимальную степень имеет вершина $x_4 : p(x_4) = 4$. Будем строить каркас с помощью обхода “в ширину” из вершины x_4 (метка “1”). Метки “2”, “3”, “4”, “5” получат вершины x_2, x_1, x_3, x_5. Включаем в каркас ребра, соединяющие эти вершины с вершиной x_4, и построение каркаса закончено (рис. 3.23, *б*).

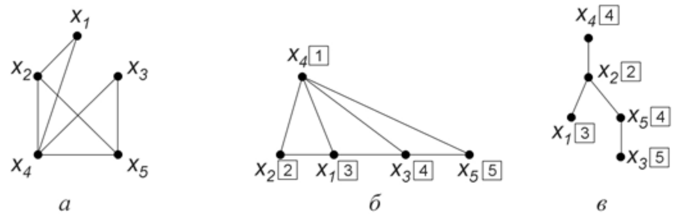


Рис. 3.23. Построение каркаса графа G:
а) данный граф G;
б) каркас, построенный обходом "в ширину";
в) каркас, построенный обходом "в глубину”

Присвоим вновь метку “1” вершине x_4. Будем строить каркас, обходя граф “в глубину”. Метку “2” получит вершина x_2 (включаем в каркас ребро $\{x_4, x_2\}$). Метку “3” – вершина x_1 (включаем ребро $\{x_2, x_1\}$). Все вершины, смежные x_1, уже имеют ненулевые метки, поэтому возвращаемся из вершины x_1 в вершину x_2. Вершина x_5 смежна вершине x_2 и не имеет метки. Присваиваем ей метку “4” и включаем в каркас ребро $\{x_2, x_5\}$. Следующую метку “5” получает вершина x_3, в каркас включаем ребро $\{x_5, x_3\}$. Все вершины имеют ненулевые метки, в каркас включено $m - \lambda(G) = 7 - 3 = 4$ ребра, его построение закончено (рис. 3.23, *в*).

3.5.7. Контрольные вопросы и упражнения

1. Какой граф называется деревом?
2. Сколько ребер может быть у дерева с шестью вершинами?
3. Что произойдет с цикломатическим числом дерева, если удалить одно из его ребер?
4. Какое наименьшее количество ребер может иметь связный граф с 16 вершинами?
5. Докажите, что всякое дерево, имеющее хотя бы одно ребро, имеет хотя бы один лист.
6. Что такое каркас графа?
7. Всегда ли каркас графа является деревом?
8. Сколько ребер нужно удалить, чтобы построить каркас графа K_4 ?

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера-Венна.

Четырнадцать спортсменов участвовали в кроссе, 16 – в соревнованиях по плаванию, 10 – в велосипедных гонках. Восемь участников участвовали в кроссе и заплыве, 4 – в кроссе и велосипедных гонках, 9 – в плавании и велосипедных гонках. Во всех трех соревнованиях участвовали три человека. Сколько всего было спортсменов?

2. Задано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и множества $X = \{1, 3, 6, 7\}, Y = \{3, 4, 7, 8\}, Z = \{3, 4, 7, 8\}$. Построить булеан множества X и любое разбиение множества Z. Выполнить действия $(X \setminus Y) \cap \overline{Z}$.

3. Доказать, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) = \overline{(\overline{A} \cap \overline{C})} \cap B.$$

4. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$R = \{(a,b) \mid a + b - \text{четное}, \quad a, b \in X\}$.

Представить отношение различными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

5. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*b*	*C*
a	*c*	*d*
b	*d*	*a*
d	*a*	*b*

S:

B_1	B_2	B_3
a	*d*	*b*
a	*c*	*d*
b	*d*	*a*

Записать обозначения операций и выполнить их:

а) селекция отношения R по условию “ $A_2 > b$ ”;

б) проекция на список (3,1) объединения отношений R и S.

6. Даны множества $A = \{-1, 0, 1\}$ и $B = \{3n - 2 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

7. Шесть старушек вышли во двор поболтать. На скамейке помещаются только четыре из них. Сколькими способами их можно рассадить на скамейке?

8. На веревке сушатся четыре белых полотенца и три желтых. Сколькими способами их можно развесить, если полотенца одного цвета не отличаются друг от друга?

Вариант 2

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера-Венна.

В туристском клубе несколько раз за лето организуются походы, причем все члены клуба хотя бы раз в них участвуют. Сорок человек побывали в пеших походах, 28 – в конных, 25 – в лодочных. И в пеших, и в конных походах побывало 20 человек, в пеших и лодочных – 15, в конных и лодочных – 8, во всех видах походов побывало 6 человек. Сколько туристов в клубе?

2. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X=\{3,5,6,7,8\}, Y=\{1,2,4,6\}, Z=\{1,2,7,8\}$. Построить булеан множества Y и любое разбиение множества X. Выполнить действия $(Z\cap Y)\cup\overline{X}$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$(A\cup\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B).$$

4. Пусть $X=\{1,2,3,4,5\}$. Отношение $R\subseteq X\times X$ задано характеристическим свойством:

$$R=\{(a,b)\mid a+b<5, a,b\in X\}.$$

Задать отношение другими возможными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

5. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*b*	*c*
a	*c*	*d*
b	*d*	*a*
d	*a*	*b*

S:

B_1	B_2
a	*d*
a	*c*
c	*d*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция отношения R на список (1,3);

б) соединение отношений R и S по условию “ $A_2=B_1$ ”.

6. Даны множества $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{3n-1\mid n\in\mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A\cap B, A\cup B, A\times B$?

7. На подоконнике стоят четыре горшка с цветами. Сколькими способами их можно расставить на подоконнике?

8. Шесть мячей раскладывают по двум коробкам. Сколькими способами это можно сделать? (Считается, что вместимость коробки достаточна для всех мячей).

Вариант 3

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера-Венна.

В отделе НИИ работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Английский язык знают шесть человек, немецкий – шесть человек, французский – семь. Четыре человека знают английский и немецкий языки, три человека – немецкий и французский, два – французский и английский, один знает все три языка. Сколько человек работает в отделе?

2. Задано универсальное множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X = \{5,6,7,8\}, Y = \{1,3,5,6,8\}, Z = \{1,2,5,7\}$. Найти булеан множества X и какое-либо разбиение множества Y. Выполнить действия $\overline{X} \cap (Y \setminus Z)$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cup B).$$

4. Пусть $X = \{-2,-1,0,1,2,3\}$. Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$R = \{(a,b) \mid a + b = 3, a, b \in X\}.$$

Представить отношение R другими возможными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

5. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*b*	*D*
b	*c*	*D*
b	*a*	*D*
a	*b*	*C*

S:

B_1	B_2
b	*c*
a	*c*
a	*d*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция отношения R на список (1,3);

б) соединение отношений R и S по условию “ $A_1 > B_1$ ”.

6. Даны множества $A = \{0,1,2,3\}$ и $B = \{4n - 2 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

7. Пятнадцать студентов пришли на занятия, но в аудитории оказалось только 13 стульев. Сколькими способами они могут выбрать двоих, чтобы отправить их на поиски стульев?

8. Сколькими способами можно расставить семь катеров у двух причалов, если у каждого причала могут поместиться все семь? Способы различаются лишь количеством катеров у каждого причала.

Вариант 4

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера - Венна.

Из 80 студентов занимаются баскетболом 30 человек, легкой атлетикой 25 человек, шахматами - 40 человек. Баскетболом и легкой атлетикой занимается 8 человек, шахматами и легкой атлетикой – 10 человек, шахматами и баскетболом – 5 человек. Тремя видами спорта занимаются три человека. Сколько человек занимаются спортом?

2. Задано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и множества $X = \{1, 5, 6, 7, 8\}, Y = \{2, 3, 6, 7, 8\}, Z = \{1, 3, 5, 8\}$. Найти булеан множества Z и какое-либо разбиение множества X. Выполнить действия $\overline{Y} \cap (X \setminus Z)$.

3. Доказать, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы): $A \cap (A \cap B) \cup \overline{B} = A \cup \overline{B}$.

4. Отношение R на множестве X задано перечислением своих элементов: $R = \{(1,2), (1,1), (2,2), (2,1), (3,1), (3,3)\}$. Нарисуйте график, схему и граф отношения. Запишите его матрицу. Какими свойствами обладает отношение? Является ли оно отношением эквивалентности? Объясните ответ.

5. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
c	*e*	*f*
a	*b*	*d*
d	*e*	*f*
c	*d*	*c*

S:

B_1	B_2
f	*d*
e	*c*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция отношения R на список (2,3);

б) соединение отношений R и S по условию “ $A_3 = B_1$ ”.

6. Даны множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{4n - 3 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

7. Семеро студентов пошли вместо лекции в кино. Но оказалось, что в кассе осталось только три билета. Сколькими способами они могут выбрать этих троих?

8. Сколькими способами можно рассадить шесть кустов пионов на трех клумбах, если на каждой клумбе могут поместиться все шесть?

Вариант 5

1. Решить задачу, пользуясь диаграммой Эйлера-Венна.

Десять читателей взяли в библиотеке фантастику, 11 – детективы, 8 – приключения. Фантастику и приключения взяли 4 человека, фантастику и детективы – 6, приключения и детективы – 3, двое взяли три вида книг. Сколько читателей побывало в библиотеке?

2. Задано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и множества $X = \{2, 4, 5, 7, 8\}, Y = \{1, 2, 3, 4, 6\}, Z = \{1, 5, 6, 8\}$. Найти булеан множества Z и какое-либо разбиение множества Y. Выполнить действия $\overline{X} \setminus (Z \cap Y)$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$A \cap (\overline{A} \cup B) \cup B \cap (B \cup C) \cup B.$$

4. Пусть $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$R = \{(a, b) \mid a + b \text{ делится на } 3, a, b \in X\}.$$

Представить отношение R другими возможными способами. Какими свойствами оно обладает?

5. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*b*	*c*
b	*a*	*c*
a	*c*	*b*
a	*d*	*b*

S:

B_1	B_2	B_3
a	*c*	*b*
a	*d*	*e*
a	*d*	*b*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) селекция отношения R по условию “ $A_2 > A_3$ ”;

б) проекция на список (3,1) объединения отношений R и S.

6. Даны множества $A = \{0, 1, 2\}$ и $B = \{5n - 4 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

7. Семеро рыбаков отправились на остров на двух лодках. Ночью одна из лодок уплыла. Сколькими способами они могут отправить троих в погоню за уплывшей лодкой?

8. Сколькими различными способами можно разложить восемь монет различного достоинства в два кармана?

Вариант 6

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера-Венна.

Из 10 участников ансамбля шестеро умеют играть на гитаре, пятеро на ударных инструментах, пятеро на духовых. Двумя инструментами владеют: гитарой и ударными – трое, ударными и духовыми – двое, гитарой и духовыми – четверо. Остальные участники ансамбля только поют. Сколько певцов в ансамбле?

2. Задано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и множества $X = \{2, 5, 6, 7, 8\}, Y = \{2, 4, 6, 8\}, Z = \{1, 2, 3, 4\}$. Найти булеан множества Y и какое-либо разбиение множества Z. Выполнить действия $X \setminus (Y \cap \overline{Z})$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap C} \cap \overline{\overline{A} \cap B} \cap \overline{A} \cap C.$$

4. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$R = \{(a,b) \mid\ a+b \quad \text{делится на } 2, a,b \in X\}.$$

Представить отношение R другими возможными способами. Какими свойствами обладает это отношение? Является ли оно отношением эквивалентности?

5. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2
s	t
u	v
x	z

S:

B_1	B_2	B_3
s	u	t
u	v	t
z	s	x

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) селекция отношения S по условию “ $B_1 > B_3$ ”;

б) соединение отношений R и S по условию “ $A_1 = B_2$ ”.

6. Даны множества $A = \{-1, 0, 2\}$ и $B = \{3n - 1 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

7. В библиотеку поступило девять новых различных книг. Сколькими способами читатель может выбрать три из них?

8. В елочной гирлянде восемь лампочек: две желтых, три красных, три синих. Сколькими способами их можно расположить в гирлянде?

Вариант 7

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера-Венна.

Каждый из студентов группы занимается хотя бы одним видом спорта. Пятеро занимаются альпинизмом, шестеро – волейболом, 10 человек – борьбой. Известно, что двое занимаются и альпинизмом, и волейболом; трое – волейболом и борьбой; четверо – альпинизмом и борьбой; а один занимается всеми тремя видами спорта. Сколько студентов занимается только борьбой?

2. Задано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и множества $X = \{2, 4, 5, 7, 8\}, Y = \{1, 2, 3, 4, 6\}, Z = \{4, 5, 6, 8\}$. Найти булеан множества Z и какое-либо разбиение множества Y. Выполнить действия $\overline{X} \setminus (Z \cap Y)$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$A \cap (\overline{A} \cup B) \cup B \cap (B \cup C) \cup B.$$

4. Пусть $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$R = \{(a, b) \mid a + b \quad \text{делится на } 3, a, b \in X\}.$$

Представить отношение R другими возможными способами. Какими свойствами обладает это отношение? Является ли оно отношением эквивалентности?

5. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*e*	*d*
a	*b*	*c*
d	*a*	*b*

S:

B_1	B_2	B_3
a	*b*	*c*
b	*e*	*d*
d	*e*	*c*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) селекция отношения R по условию “ $A_1 > A_2$ ”;

б) проекция на список (2,3) объединения отношений R и S.

6. Даны множества $A = \{0, 2, 4\}$ и $B = \{4n \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

7. В магазине продается восемь типов шляп. Сколькими способами дама может выбрать себе три разных шляпы?

8. В библиотеке на полке стоит три одинаковых учебника по математике и четыре разных по программированию. Сколькими способами их можно расставить на полке?

Вариант 8

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера-Венна.

В одной из студенческих групп все студенты умеют программировать. Десять человек умеют работать на Бейсике, 10 – на Паскале, 6 – на Си. Два языка знают: 6 человек Бейсик и Паскаль, 4 – Паскаль и Си, 3 – Бейсик и Си. Один человек знает все три языка. Сколько студентов в группе?

2. Задано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и множества $X = \{1, 2, 4, 6, 7\}, Y = \{2, 3, 5, 7, 8\}, Z = \{1, 4, 7, 8\}$. Найти булеан множества Z и какое-либо разбиение множества Y. Выполнить действия $(X \cup \overline{Y}) \cap Z$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$(((A \cap B) \cup B) \cap \overline{A}) \cup B.$$

4. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$R = \{(a,b) \mid a + b < 4, a, b \in X\}.$$

Представить отношение R другими возможными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

5. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2
x	y
y	z
x	t

S:

B_1	B_2	B_3
u	t	v
x	z	y
y	z	v

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция на список (2,1) отношения S;

б) соединение отношений R и S по условию “ $A_1 < B_2$ ”.

6. Даны множества $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{5n - 3 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

7. В сессию студент сдает пять экзаменов. Сколько возможных результатов сессии (экзаменационной оценкой может быть 2,3,4,5)?

8. Сколькими способами 12 книг можно расставить по трем полкам, если на каждой полке могут поместиться все книги? Способы различаются лишь количеством книг на полках.

Вариант 9

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера-Венна.

При изучении читательского спроса оказалось, что 60% опрошенных читает журнал “Огонек”, 50% - журнал “Юность”, 50% - журнал “Аврора”. Журналы “Огонек” и “Юность” читают 30% опрошенных, “Юность” и “Аврора” – 20%, “Огонек” и “Аврора” – 40%, все три журнала – 10%. Сколько процентов опрошенных не читают ни один журнал?

2. Задано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и множества $X = \{2, 3, 4, 5, 7\}, Y = \{1, 2, 4, 8\}, Z = \{2, 5, 7, 8\}$. Найти булеан множества Y и какое-либо разбиение множества X. Выполнить действия $\overline{Z} \setminus (X \cap Y)$.

3. Доказать, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cup \overline{B}) = U.$$

4. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$R = \{(a, b) \mid |a - b| = 2, a, b \in X\}.$$

Представить отношение R другими возможными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает. Является ли R отношением эквивалентности?

5. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*d*	*e*
d	*c*	*b*
b	*d*	*a*

S:

B_1	B_2
d	*e*
d	*c*
a	*c*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция на список (2,1) отношения R;

б) соединение отношений R и S по условию “ $A_1 \geq B_1$ ”.

6. Даны множества $A = \{1, 2, 4, 6\}$ и $B = \{n^2 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

7. На столе лежат восемь яблок. Сколькими способами можно выбрать два из них?

8. Требуется покрасить шесть гаражей, стоящих в один ряд. На каждый из гаражей расходуется одна банка краски. Сколькими способами можно покрасить гаражи, если есть две банки красной краски, три зеленой и одна синей?

Вариант 10

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера-Венна.

В день авиации всех желающих катали на самолете, планере, дельтаплане. На самолете прокатилось 30 человек, на планере – 20, на дельтаплане – 15. И на самолете, и на планере каталось 10 человек, на самолете и дельтаплане – 12, на планере и дельтаплане – 5, два человека прокатились и на самолете, и на планере, и на дельтаплане. Сколько было желающих прокатиться?

2. Задано универсальное множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X = \{1,3,5,7,8\}, Y = \{2,5,6,8\}, Z = \{1,3,5,6\}$. Найти булеан множества Z и какое-либо разбиение множества Y. Выполнить действия $(X \cap \overline{Y}) \cup Z$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$A \cup \overline{A \cup \overline{\overline{B}}} \cap U.$$

4. Пусть $X = \{1,2,3,4,5\}$. Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$R = \{(a,b) \mid a - b > 1, a, b \in X\}.$$

Представить отношение R другими возможными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

5. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*b*	*c*
a	*c*	*d*
b	*c*	*d*

S:

B_1	B_2
b	*e*
b	*c*
d	*c*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция на список (3,2) отношения R;

б) соединение отношений R и S по условию “ $A_1 = B_1$ ”.

6. Даны множества $A = \{1,2,3,4\}$ и $B = \{n^2 - 1 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

7. Сколькими способами 8 человек можно рассадить на лавке (всех в один ряд)?

8. Восемь туристов отправились в путь на двух лодках, в меньшей из которых могли поместиться не более четверых, а в большей – не более шестерых человек. Сколькими различными способами они могут распределиться в разные лодки? (Распределения считаются различными, если хотя бы один турист окажется в другой лодке).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Построить таблицу истинности для формулы:

$$A \,\&\, (B \vee \neg A) \,\&\, ((\neg B \to A) \vee B)\ .$$

2. С помощью равносильных преобразований убедиться, что формула задачи 1 равносильна формуле $A \,\&\, B$. Перечислить используемые законы.

3. Проверить правильность логического рассуждения сокращенным способом. Какими другими способами можно решить эту задачу?

“Известно, что Петр и Иван братья, или они однокурсники. Если Петр и Иван братья, то Сергей и Иван не братья. Если Петр и Иван однокурсники, то Иван и Михаил тоже однокурсники. Следовательно, или Сергей и Иван братья, или Иван и Михаил однокурсники”.

4. Используя два предиката, запишите предложение в виде формулы логики предикатов: “Все солдаты храбрые”. Запишите отрицание полученной формулы и приведите ее к предваренной нормальной форме.

5. Для орграфа G_0 (рис. 1) найдите множество достижимости и множество контрдостижимости вершины x_1. Выясните, какими свойствами обладает бинарное отношение, заданное графом G_0 . Постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности, занумеровав дуги орграфа G_0 .

6. Занумеруйте вершины графа G_1 (рис. 1) и определите степени всех его вершин. Нарисуйте какой-либо остовный подграф графа G_1. Запишите матрицу смежности и матрицу инцидентности графа G_1, занумеровав его ребра.

7. Покажите, что графы G_1 и G_2(рис.1) изоморфны. Планарен ли граф G_2?

8. Определите цикломатическое число графа G_1 (рис. 1). Выясните, можно ли нарисовать граф G_1, не отрывая руки от бумаги и не проходя ни по одному ребру дважды. Ответ обоснуйте.

9. Выясните, сколько ребер нужно удалить из графа G_1 (рис. 1) при построении его каркаса. Занумеруйте вершины графа G_1 и постройте каркас двумя способами (обход “в ширину”, обход “в глубину”), начав обход из вершины с максимальной степенью.

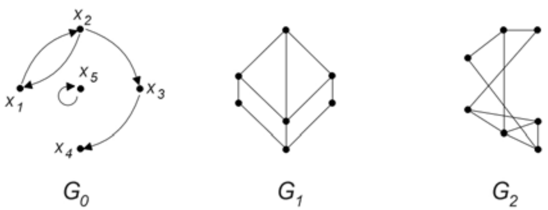


Рис. 1

Вариант 2

1. Определить с помощью таблицы истинности, равносильны ли формулы: $F_1 = A \sim B$ и $F_2 = (\neg A \,\&\, \neg B) \vee (A \,\&\, B)$.

2. В формуле $F = (A \to B) \,\&\, (C \to \neg B) \,\&\, B$ избавиться от операции импликации и упростить с помощью равносильных преобразований. Перечислить используемые законы.

3. Проверить правильность логического рассуждения сокращенным способом. Какими другими способами можно решить эту задачу? “Прямые a и b или параллельны, или пересекаются, или скрещиваются. Прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Если прямые лежат в одной плоскости, то они не скрещиваются. Следовательно, прямые a и b параллельны”.

4. Используя два предиката, запишите предложение в виде формулы логики предикатов: “Некоторые хвастуны трусливы”. Запишите отрицание полученной формулы и приведите ее к предваренной нормальной форме.

5. Для орграфа G_0 (рис. 2) найдите множество достижимости и множество контрдостижимости вершины x_1. Выясните, какими свойствами обладает бинарное отношение, заданное графом G_0. Постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности, занумеровав дуги орграфа G_0.

6. Занумеруйте вершины графа G_1 (рис. 2) и определите степени всех его вершин. Нарисуйте какой-либо остовный подграф графа G_1. Запишите матрицы смежности и инцидентности графа G_1, занумеровав его ребра.

7. Покажите, что графы G_1 и G_2 (рис. 2) изоморфны. Планарен ли G_2?

8. Определите цикломатическое число графа G_1 (рис. 2). Выясните, можно ли нарисовать граф G_1, не отрывая руки от бумаги и не проходя ни по одному ребру дважды. Ответ обоснуйте.

9. Выясните, сколько ребер нужно удалить из графа G_1 (рис. 2) при построении его каркаса. Занумеруйте вершины графа G_1 и постройте каркас двумя способами (обход “в ширину”, обход “в глубину”), начав обход из вершины с максимальной степенью.

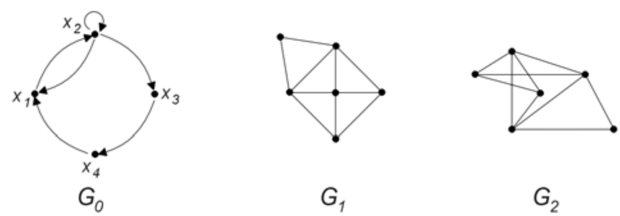


Рис. 2

Вариант 3

1. Построить таблицу истинности для формулы:

$$F = \neg(A \to \neg(B \,\&\, A)) \to A \vee B.$$

2. С помощью равносильных преобразований убедиться, что формула задачи 1 является тавтологией. Перечислить используемые законы.

3. Проверить правильность логического рассуждения сокращенным способом. Какими другими способами можно решить эту задачу?

"Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб. В данном параллелограмме диагонали не взаимно перпендикулярны. Следовательно, параллелограмм не есть ромб".

4. Используя два предиката, запишите предложение в виде формулы логики предикатов: "Все книги полезные". Запишите отрицание полученной формулы и приведите ее к предваренной нормальной форме.

5. Для орграфа G_0 (рис. 3) найдите множество достижимости и множество контрдостижимости вершины x_1. Выясните, какими свойствами обладает бинарное отношение, заданное графом G_0. Постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности, занумеровав дуги орграфа G_0.

6. Дан неорграф G_1 (рис. 3). Занумеруйте вершины графа и определите степени всех его вершин. Нарисуйте какой-либо остовный подграф графа G_1. Запишите матрицу смежности и матрицу инцидентности графа G_1, занумеровав его ребра.

7. Покажите, что графы G_1 и G_2 (рис. 3) изоморфны. Является ли граф G_2 планарным?

8. Определите цикломатическое число графа G_1 (рис. 3). Выясните, можно ли нарисовать граф G_1, не отрывая руки от бумаги и не проходя ни по одному ребру дважды. Ответ обоснуйте.

9. Выясните, сколько ребер нужно удалить из графа G_1 (рис. 3) при построении его каркаса. Занумеруйте вершины графа G_1 и постройте каркас двумя способами (обход "в ширину", обход "в глубину"), начав обход из вершины с максимальной степенью.

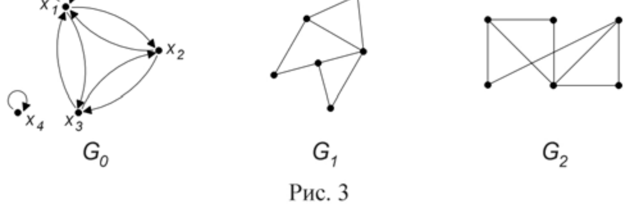


Рис. 3

Вариант 4

1. Построить таблицу истинности для формулы:

$$F = (A \to B) \& \neg(A \& B) \sim A.$$

2. С помощью равносильных преобразований убедиться, что формула задачи 1 является противоречием. Перечислить используемые законы.

3. Проверить правильность логического рассуждения сокращенным способом. Какими другими способами можно решить эту задачу?

"Если функция непрерывна на данном интервале и имеет разные знаки на его концах, то внутри данного интервала функция обращается в нуль. Функция не обращается в нуль на данном интервале, но на концах имеет разные знаки. Следовательно, функция не является непрерывной".

4. Используя два предиката, запишите предложение в виде формулы логики предикатов: "Некоторые птицы умеют петь". Запишите отрицание полученной формулы и приведите ее к предваренной нормальной форме.

5. Для орграфа G_0 (рис. 4) найдите множество достижимости и множество контрдостижимости вершины x_1. Выясните, какими свойствами обладает бинарное отношение, заданное графом G_0. Постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности, занумеровав дуги орграфа G_0.

6. Занумеруйте вершины графа G_1 (рис. 4) и определите степени всех его вершин. Нарисуйте какой-либо остовный подграф графа G_1. Запишите матрицы смежности и инцидентности графа G_1, занумеровав его ребра.

7. Покажите, что графы G_1 и G_2 (рис. 4) изоморфны. Является ли граф G_2 планарным?

8. Определите цикломатическое число графа G_1 (рис. 4). Выясните, можно ли нарисовать граф G_1, не отрывая руки от бумаги и не проходя ни по одному ребру дважды. Ответ обоснуйте.

9. Выясните, сколько ребер нужно удалить из графа G_1 (рис. 4) при построении его каркаса. Занумеруйте вершины графа G_1 и постройте каркас двумя способами (обход "в ширину", обход "в глубину"), начав обход из вершины с максимальной степенью.

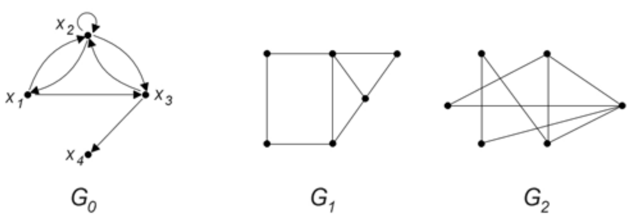


Рис. 4

Вариант 5

1. Построить таблицу истинности для формулы:

$F = (A \to B) \sim (\neg B \,\&\, A) \vee A$.

2. С помощью равносильных преобразований убедиться, что формулы $F_1 = (X \sim Y) \to X$ и $F_2 = X \vee Y$ равносильны. Перечислить используемые законы.

3. Проверить правильность логического рассуждения сокращенным способом. Какими другими способами можно решить эту задачу?

“Если цены высоки, то и зарплата высока. Цены высоки или применяется регулирование цен. Если применяется регулирование цен, то нет инфляции. Наблюдается инфляция. Следовательно, зарплата высока”.

4. Используя два предиката, запишите предложение в виде формулы логики предикатов: “Все мыши любят сыр”. Запишите отрицание полученной формулы и приведите ее к предваренной нормальной форме.

5. Для орграфа G_0 (рис. 5) найдите множество достижимости и множество контрдостижимости вершины x_1. Выясните, какими свойствами обладает бинарное отношение, заданное графом G_0. Постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности, занумеровав дуги орграфа G_0.

6. Занумеруйте вершины графа G_1 (рис. 5) и определите степени всех его вершин. Нарисуйте какой-либо остовный подграф графа G_1. Запишите матрицы смежности и инцидентности графа G_1, занумеровав его ребра.

7. Покажите, что графы G_1 и G_2 (рис. 5) изоморфны. Является ли граф G_2 планарным?

8. Определите цикломатическое число графа G_1 (рис. 5). Выясните, можно ли нарисовать граф G_1, не отрывая руки от бумаги и не проходя ни по одному ребру дважды. Ответ обоснуйте.

9. Выясните, сколько ребер нужно удалить из графа G_1 (рис. 5) при построении его каркаса. Занумеруйте вершины графа G_1 и постройте каркас двумя способами (обход “в ширину”, обход “в глубину”), начав обход из вершины с максимальной степенью.

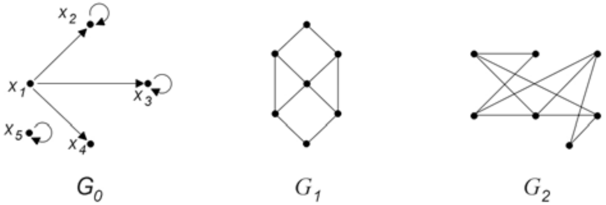


Рис. 5

Вариант 6

1. Определить с помощью таблицы истинности, равносильны ли формулы: $F_1 = A \& (A \vee \neg B) \to B$ и $F_2 = A \to B$.

2. С помощью равносильных преобразований убедиться, что формула $F_1 = A \& (B \to A) \sim A$ является тавтологией. Перечислить используемые законы.

3. Проверить правильность логического рассуждения сокращенным способом. Какими другими способами можно решить эту задачу?

"Либо аудитория была закрыта, либо, если преподаватель опоздал, то все студенты ушли в столовую. Если аудитория не была закрыта, то преподаватель не опоздал. Если все студенты ушли в столовую, то преподаватель опоздал. Следовательно, аудитория не была закрыта".

4. Используя два предиката, запишите предложение в виде формулы логики предикатов: "Некоторые петухи гордятся своим хвостом". Поставьте знак отрицания перед полученной формулой и приведите ее к предваренной нормальной форме.

5. Для орграфа G_0 (рис. 6) найдите множество достижимости и множество контрдостижимости вершины x_1. Выясните, какими свойствами обладает бинарное отношение, заданное графом G_0. Постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности, занумеровав дуги орграфа G_0.

6. Занумеруйте вершины графа G_1 (рис. 6) и определите степени всех его вершин. Нарисуйте какой-либо остовный подграф графа G_1. Запишите матрицы смежности и инцидентности графа G_1, занумеровав его ребра.

7. Покажите, что графы G_1 и G_2 (рис. 2) изоморфны. Планарен ли G_2?

8. Определите цикломатическое число графа G_1 (рис. 6). Выясните, можно ли нарисовать граф G_1, не отрывая руки от бумаги и не проходя ни по одному ребру дважды. Ответ обоснуйте.

9. Выясните, сколько ребер нужно удалить из графа G_1 (рис. 6) при построении его каркаса. Занумеруйте вершины графа G_1 и постройте каркас двумя способами (обход "в ширину", обход "в глубину"), начав обход из вершины с максимальной степенью.

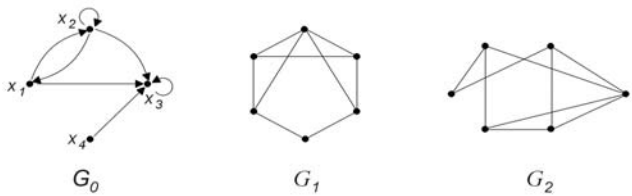


Рис. 6

Вариант 7

1. Построить таблицу истинности для формулы:

$F = ((A \& B) \to (\neg A \& \neg)) \sim \neg A$.

2. С помощью равносильных преобразований убедиться, что формулы $F_1 = A \& B \to (\neg B \& (\neg B \vee C))$ и $F_2 = \neg(A \& B)$ равносильны. Перечислить используемые законы.

3. Проверить правильность логического рассуждения сокращенным способом. Какими другими способами можно решить эту задачу?

“Если Павел не встречал Ивана, то либо Иван не был на лекциях, либо Павел лжет. Если Иван был на лекциях, то Павел встречал Ивана, и Сергей был в читальном зале после лекции. Если Сергей был в читальном зале после лекции, то либо Павел не был на лекциях, либо Павел лжет. Следовательно, Иван не был на лекциях. ”.

4. Используя два предиката, запишите предложение в виде формулы логики предикатов: “Все храбрецы достойны славы”. Поставьте знак отрицания перед полученной формулой и приведите ее к ПНФ.

5. Для орграфа G_0 (рис. 7) найдите множество достижимости и множество контрдостижимости вершины x_1. Выясните, какими свойствами обладает бинарное отношение, заданное графом G_0. Постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности, занумеровав дуги орграфа G_0.

6. Занумеруйте вершины графа G_1 (рис. 7) и определите степени всех его вершин. Нарисуйте какой-либо остовный подграф графа G_1. Запишите матрицы смежности и инцидентности графа G_1, занумеровав его ребра.

7. Покажите, что графы G_1 и G_2 (рис. 2) изоморфны. Планарен ли G_2 ?

8. Определите цикломатическое число графа G_1 (рис. 7). Выясните, можно ли нарисовать граф G_1, не отрывая руки от бумаги и не проходя ни по одному ребру дважды. Ответ обоснуйте.

9. Выясните, сколько ребер нужно удалить из графа G_1 (рис. 7) при построении его каркаса. Занумеруйте вершины графа G_1 и постройте каркас двумя способами (обход “в ширину”, обход “в глубину”), начав обход из вершины с максимальной степенью.

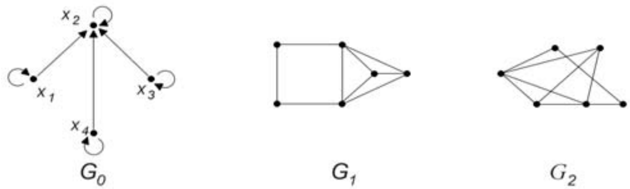


Рис. 7

Вариант 8

1. Построить таблицу истинности для формулы: $F = (B \to A \vee B) \sim \neg A$.

2. В формуле $F = \neg A \to (B \,\&\, C)) \vee (B \to A) \,\&\, (\neg A \to C)$ избавиться от операции импликации и упростить с помощью равносильных преобразований. Перечислить используемые законы.

3. Проверить правильность логического рассуждения сокращенным способом. Какими другими способами можно решить эту задачу?

"Если я буду говорить правду, то меня прославит простой народ. Если я буду лгать, то меня прославят богатые и знатные. Но я должен говорить правду или лгать. Значит меня прославит простой народ или прославят богатые и знатные".

4. Используя два предиката, запишите предложение в виде формулы логики предикатов: "Некоторые почтальоны не любят собак". Поставьте знак отрицания перед полученной формулой и приведите ее к предваренной нормальной форме.

5. Для орграфа G_0 (рис. 8) найдите множество достижимости и множество контрдостижимости вершины x_1. Выясните, какими свойствами обладает бинарное отношение, заданное графом G_0. Постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности, занумеровав дуги орграфа G_0.

6. Дан неорграф G_1 (рис. 8). Занумеруйте вершины графа и определите степени всех его вершин. Нарисуйте какой-либо остовный подграф графа G_1. Запишите матрицу смежности и матрицу инцидентности графа G_1, занумеровав его ребра.

7. Покажите, что графы G_1 и G_2 (рис. 2) изоморфны. Планарен ли G_2?

8. Определите цикломатическое число графа G_1 (рис. 8). Выясните, можно ли нарисовать граф G_1, не отрывая руки от бумаги и не проходя ни по одному ребру дважды. Ответ обоснуйте.

9. Выясните, сколько ребер нужно удалить из графа G_1 (рис. 8) при построении его каркаса. Занумеруйте вершины графа G_1 и постройте каркас двумя способами (обход "в ширину", обход "в глубину"), начав обход из вершины с максимальной степенью.

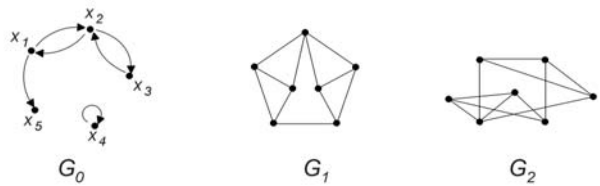


Рис. 8

Вариант 9

1. Построить таблицу истинности для формулы:

$$F = (X \sim \neg Y) \mathbin{\&} (Y \to X).$$

2. С помощью равносильных преобразований убедиться, что формула $F = \neg(A \to \neg(B \mathbin{\&} A)) \to A \vee B$ является тавтологией. Перечислить используемые законы.

3. Проверить правильность логического рассуждения сокращенным способом. Какими другими способами можно решить эту задачу?

“Если ты будешь говорить правду, то тебя возненавидят богатые и знатные. Если ты будешь лгать, то тебя возненавидит простой народ. Но ты должен говорить правду или лгать. Значит, тебя возненавидят богатые и знатные или тебя возненавидит простой народ ”.

4. Используя два предиката, запишите предложение в виде формулы логики предикатов: “Все танцоры - стройные люди”. Поставьте знак отрицания перед полученной формулой и приведите ее к предваренной нормальной форме.

5. Для орграфа G_0 (рис. 9) найдите множество достижимости и множество контрдостижимости вершины x_1. Выясните, какими свойствами обладает бинарное отношение, заданное графом G_0. Постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности, занумеровав дуги орграфа G_0.

6. Занумеруйте вершины графа G_1 (рис. 9) и определите степени всех его вершин. Нарисуйте какой-либо остовный подграф графа G_1. Запишите матрицы смежности и инцидентности графа G_1, занумеровав его ребра.

7. Покажите, что графы G_1 и G_2 (рис. 2) изоморфны. Планарен ли G_2 ?

8. Определите цикломатическое число графа G_1 (рис. 9). Выясните, можно ли нарисовать граф G_1, не отрывая руки от бумаги и не проходя ни по одному ребру дважды. Ответ обоснуйте.

9. Выясните, сколько ребер нужно удалить из графа G_1 (рис. 9) при построении его каркаса. Занумеруйте вершины графа G_1 и постройте каркас двумя способами (обход “в ширину”, обход “в глубину”), начав обход из вершины с максимальной степенью.

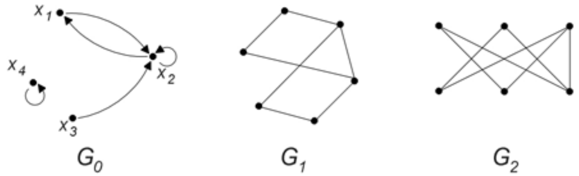


Рис. 9

Вариант 10

1. Построить таблицу истинности для формулы: $F = A \& (A \to B) \to B$.

2. В формуле $F_1 = X \to (Y \sim Z) \vee (\neg X \sim Z)$ избавиться от знаков импликации и эквиваленции. С помощью равносильных преобразований убедиться, что она равносильна формуле $F_2 = \neg X \vee Y \vee \neg Z$. Перечислить используемые законы.

3. Проверить правильность логического рассуждения сокращенным способом. Какими другими способами можно решить эту задачу?

"Если студент много занимается, то он успешно сдает экзамены. Студент не сдал экзамены. Следовательно, он занимался мало".

4. Используя два предиката, запишите предложение в виде формулы логики предикатов: "Некоторые певицы умеют танцевать". Поставьте знак отрицания перед полученной формулой и приведите ее к предваренной нормальной форме.

5. Для орграфа G_0 (рис. 10) найдите множество достижимости и множество контрдостижимости вершины x_1. Выясните, какими свойствами обладает бинарное отношение, заданное графом G_0. Постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности, занумеровав дуги орграфа G_0.

6. Занумеруйте вершины графа G_1 (рис. 10) и определите степени всех его вершин. Нарисуйте какой-либо остовный подграф графа G_1. Запишите матрицы смежности и инцидентности графа G_1, занумеровав его ребра.

7. Покажите, что графы G_1 и G_2 (рис. 10) изоморфны. Является ли граф G_2 планарным?

8. Определите цикломатическое число графа G_1 (рис. 10). Выясните, можно ли нарисовать граф G_1, не отрывая руки от бумаги и не проходя ни по одному ребру дважды. Ответ обоснуйте.

9. Выясните, сколько ребер нужно удалить из графа G_1 (рис. 10) при построении его каркаса. Занумеруйте вершины графа G_1 и постройте каркас двумя способами (обход "в ширину", обход "в глубину"), начав обход из вершины с максимальной степенью.

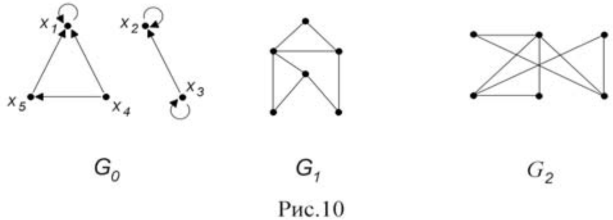


Рис.10