Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Ю. П. Шевелев

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
по решению задач

Томск 2017

Корректор: А. Н. Миронова

Шевелев Ю. П.

Дискретная математика : методические указания по решению задач / Ю. П. Шевелев. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2017. – 36 с.

Методические указания содержат образцы выполнения заданий, которые помогут подготовиться к выполнению компьютерной контрольной работы.

Для студентов технических вузов, обучающихся с использованием дистанционных образовательных технологий.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с учебным планом для студентов, обучающихся с применением дистанционной технологии, разработана рабочая программа, предусматривающая изучение таких разделов дискретной математики, как теория множеств, комбинаторика, теория графов, алгебра логики, теория конечных автоматов. Теоретический материал по этим темам изложен в учебном пособии «Дискретная математика».

Для контроля освоения учебного материала из пяти глав пособия выделено десять узких тем, по каждой из них в контрольную работу включено по одной задаче. В данных методических указаниях содержатся примеры решения задач по всем главам пособия.

В темах, начиная с четвёртой, математическую основу составляет алгебра логики, где наиболее трудоёмкими являются преобразования логических формул. В связи с этим при подготовке к контрольной работе особое внимание должно быть уделено освоению карты Вейча, позволяющей в десятки раз сократить трудозатраты (по сравнению с алгебраическими действиями) на такие преобразования логических выражений, как нахождение СДНФ, минимизация, перевод формул в алгебру Жегалкина и др.

Все подобные задачи могут быть решены и без карты Вейча, только аналитическими методами. Однако при этом многократно возрастает время на выполнение контрольного задания, так как аналитические преобразования в большинстве случаев отличаются громоздкостью и большой трудоёмкостью.

Дополнительную теоретическую информацию можно получить, обратившись к источникам, указанным в списке литературы.

ТЕМА 1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Для успешного решения задачи по теории множеств необходимо усвоить такие понятия, как конечное множество, пустое множество, универсум; изучить способы задания множеств и ознакомиться с тремя основными операциями: объединение, пересечение и дополнение. Кроме того, следует уделить внимание законам поглощения и склеивания, а также теоремам де Моргана.

Согласно условию задачи по теории множеств, требуется найти элементы множества P, заданного формулой, построенной на основе множеств A, B, C, D и теоретико-множественных операций объединения, пересечения и дополнения. Множества A, B, C, D заданы, однако в формуле P кроме этих множеств содержатся их дополнения. Следовательно, прежде чем приступать к поиску элементов множества P, необходимо найти множества $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$.

Последовательность действий, которые должны быть выполнены в процессе решения задачи, иллюстрируется следующими пятью примерами.

Пример 1. Перечислите элементы, из которых состоит множество

$$P = \overline{A} \quad B \qquad A \quad B \quad \overline{D} \qquad A \quad \overline{B} \quad D \qquad \overline{C} \quad D$$

при условии, что

$$A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\}; \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\};$$
$$C = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}; \qquad D = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$
$$I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Решение. Сначала найдём дополнения множеств $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$:

$$\overline{A} = \{3, 6, 7, 9\}; \qquad \overline{B} = \{0, 5, 6, 8\};$$
$$\overline{C} = \{0, 1, 7, 8\}; \qquad \overline{D} = \{2, 8, 9\}.$$

Находим элементы первой составляющей $\overline{A} \quad B$ заданного множества P:

$$\overline{A} \quad B = \{3, 6, 7, 9\} \quad \{1, 2, 3, 4, 7, 9\} = \{3, 7, 9\}.$$

Вторая составляющая представляет собой пересечение трех множеств:

$$A \quad B \quad \overline{D} = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\} \quad \{1, 2, 3, 4, 7, 9\} \quad \{2, 8, 9\} = \{2\}.$$

Точно так же находим элементы третьей составляющей множества P:

$$A \quad \overline{B} \quad D = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\} \quad \{0, 5, 6, 8\} \quad \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{0, 5\}.$$

Элементы последней составляющей имеют вид:

$$\overline{C} \quad D = \{0, 1, 7, 8\} \quad \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 7\}.$$

Объединим элементы всех четырех составляющих множества P:

$$P = \{3, 7, 9\} \quad \{2\} \quad \{0, 5\} \quad \{0, 1, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}.$$

Ответ: $P = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$.

В ответ вводим упорядоченную по возрастанию последовательность цифр.

Пример 2. Найдите элементы множества

$$Q = A \quad B \quad C \qquad \overline{A} \quad D \qquad \overline{B} \qquad D$$

при условии, что

$$A = \{0, 1, 5\}; \qquad B = \{0, 1, 2, 3\}; \qquad C = \{2, 3, 4, 5\};$$

$$D = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}. \qquad I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Решение. В заданном выражении Q содержатся только два множества со знаками дополнения:

$$\overline{A} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}; \qquad \overline{B} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Множество Q представляет собой объединение трех составляющих, каждая из которых есть пересечение заданных множеств.

Находим элементы множества $A \quad B \quad C$:

$$A \quad B \quad C = \{0, 1, 5\} \quad \{0, 1, 2, 3\} \quad \{2, 3, 4, 5\} = \varnothing.$$

Аналогично находим элементы множеств $\overline{A} \quad D$ и $\overline{B} \quad D$:

$$\overline{A} \quad D = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\} \quad \{1, 3, 4, 5, 7, 8\} = \{3, 4, 7, 8\}.$$

$$\overline{B} \quad D = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \{1, 3, 4, 5, 7, 8\} = \{4, 5, 7, 8\}.$$

Объединив эти результаты, получаем:

$$Q = \varnothing \quad \{3, 4, 7, 8\} \quad \{4, 5, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 7, 8\}.$$

Пример 3. Найдите элементы множества

$$Q = A \quad B \quad D \qquad \overline{A} \quad B \quad C \qquad C \quad D$$

при условии, что

$$A = \{1, 2, 4\}; \quad B = \{1, 2, 3, 5, 6\};$$

$$C = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}; \qquad D = \{1, 3, 4, 6, 9\}. \quad I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Действуя как и в двух предыдущих случаях, получаем:

$$Q = \{1, 3, 4, 5, 6, 9\}.$$

Пример 4. Найдите элементы множества

$$Q = A \quad \overline{C} \quad D \qquad B \quad D \qquad \overline{B} \quad C \quad \overline{D}$$

при условии, что

$$A = \{3, 5, 8\}; \qquad B = \{0, 3, 6, 8\};$$

$$C = \{0, 3, 7, 8, 9\}; \qquad D = \{0, 3, 5, 8, 9\}.$$

$$I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Ответ: $Q = \{0, 3, 5, 7, 8\}$.

Пример 5. Найдите элементы множества

$$Q = A \quad C \qquad \overline{A} \quad B \quad D \qquad B \quad C \quad \overline{D}$$

при условии, что

$$A = \{1, 2, 3\}; \qquad B = \{1, 2, 4, 9\};$$

$$C = \{5, 7\}; \qquad D = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}.$$

$$I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Ответ: $Q = \{4, 9\}$.

ТЕМА 2. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторные задачи отличаются очень большим разнообразием по содержанию. Однако объём исходной информации, необходимой для их решения, сравнительно невелик. Его составляют такие понятия, как факториал, правило произведения, правило суммы и шесть основных формул комбинаторики: перестановки, размещения и сочетания с повторениями и без повторений.

В комбинаторике существуют задачи, различные по содержанию, но имеющие одинаковые решения. Проиллюстрируем это на примере следующих трёх простейших задач:

1) Сколько существует 7-значных пятеричных чисел, состоящих только из нечётных цифр, если в каждом числе точно три тройки?

2) Сколько четырёхбуквенных слов можно составить из букв семиэлементного множества, если в каждом слове буквы идут в алфавитном порядке?

3) Сколько существует двоичных чисел, в каждом из которых содержится точно три нуля и точно четыре единицы?

Хотя формулировки этих трёх задач почти не имеют ничего общего, ответ к ним один и тот же: число сочетаний из семи по три, т. е. 35.

Для правильного решения зачётной задачи необходимо иметь определённый уровень комбинаторного мышления. Чтобы его приобрести, следует разобрать решения комбинаторных задач, приведённых в учебном пособии. Кроме того, ниже приведено 12 задач с решениями. С ними также полезно ознакомиться, так как задачи из контрольной работы имеют тот же уровень сложности.

Пример 1. Сколько существует 6-значных чисел пятеричной системы счисления, в каждом из которых точно две одинаковые цифры, а остальные встречаются не более чем по одному разу? Числа могут начинаться с нуля.

Решение. Пронумеруем разряды 6-значного числа, начиная со старшего. Допустим, что в числе два нуля и они находятся слева на месте разрядов 1 и 2. Тогда (в соответствии с правилом произведения) на месте третьего разряда можно поставить одну пятеричную цифру из четырёх: 1, 2, 3 или 4, на месте четвёртого – одну цифру из трёх, на месте пятого – одну цифру из двух. Для шестого разряда осталась одна цифра. Всего таких чисел 24.

Нули могут занимать другие места в шестизначном числе, например первое и пятое, второе и четвёртое и т. д. Всего существует $C_6^2 = 15$ способов занять двумя нулями два места из шести. Каждому из этих способов соответствует 24 искомых числа. Следовательно, существует $24 \cdot 15 = 360$ чисел, содержащих по два нуля.

Повторяться могут не только нули, но и остальные цифры. Тогда получим $360 \cdot 5 = 1800$ чисел.

Ответ: 1800.

Пример 2. Сколько существует 4-значных шестеричных чисел, каждое из которых начинается с цифры, являющейся простым числом, и оканчивается цифрой, делящейся без остатка на 2, если на повторы цифр ограничений нет?

Решение. Пронумеруем слева направо разряды числа. На первое место можно поставить одну цифру из трёх: 2, 3, 5. На месте второго разряда можно поставить одну цифру из шести, так как ограничений на повторы нет. То же самое относится и к третьему разряду. Оканчиваться число может только чётной цифрой: 0, 2, 4. Таким образом, всего существует $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 324$ искомых числа.

Ответ: 324.

Пример 3. Сколько существует 4-значных пятеричных чисел, в каждом из которых нет единиц, вторая и третья цифры совпадают, а на выбор остальных цифр ограничений нет? Повторы цифр возможны. Числа могут начинаться с нуля.

Решение. Пронумеруем разряды числа, начиная со старшего. На первом месте может стоять одна цифра из четырёх (так как единица из цифр удалена), на втором – также одна из четырёх. Для третьей цифры выбора нет: она должна повторить предыдущую – один вариант. Оканчиваться число может одной цифрой из четырёх. Следовательно, всего искомых чисел существует:

$$4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 = 64.$$

Ответ: 64.

Пример 4. Сколько существует 3-значных десятичных чисел, в которых каждая следующая цифра на три меньше предыдущей и каждое из чисел оканчивается чётной цифрой?

Решение. Если цифра младшего разряда – нуль, то слева от неё – 3, а левее тройки – 6. Получили одно число: 630. Если цифра младшего разряда – единица, то слева от неё – 4, а левее четвёрки – 7. Получили второе число 741. Каждая его цифра на единицу больше соответствующих цифр числа 630. Аналогично получаем ещё два числа: 852 и 963. Из этих четырёх чисел два числа оканчиваются чётной цифрой.

Ответ: 2.

Пример 5. Сколько существует 5-значных чисел четверичной системы счисления, в каждом из которых нет нулей и единиц, а цифры 3 в числе нигде рядом не стоят?

Решение. Во всех искомых числах две цифры: 2 и 3. Рассмотрим четыре случая:

1) в числе нет троек. Так как их нет, то стоять рядом они не могут. Из таких чисел существует только одно: 22222;

2) пусть в числе одна тройка. И здесь стоять рядом тройки не могут. С одной тройкой существует пять чисел: 22223, 22232, 22322, 23222, 32222;

3) если троек две, то двоек три. Запишем двойки в ряд, отделив одну от другой звёздочками и поставив звёздочки слева и справа:

$$*2*2*2*.$$

Удалим две звёздочки, а оставшиеся заменим тройками. Получим 5-значное число, где тройки рядом не стоят. Такая замена возможна $C_4^2 = 6$ способами;

4) если троек три, то двоек две. Это единственное число: 32323.

Всего искомых чисел 1 + 5 + 6 + 1 = 13.

Ответ: 13.

Пример 6. Сколько существует 4-значных десятичных чисел, в которых цифры идут в порядке возрастания и каждое число начинается с нечётной цифры?

Решение. Разобьём задачу на ряд более простых подзадач:

1) если числа начинаются с единицы, то справа от неё трёхзначные числа можно записать $C_8^3 = 56$ вариантами;

2) если числа начинаются с цифры 3, то таких чисел возможно $C_6^3 = 20$;

3) если числа начинаются с цифры 5, то справа от неё трёхзначные числа можно записать $C_4^3 = 4$ вариантами;

4) если числа начинаются с цифры 7, то этому случаю не соответствует никакого четырёхзначного числа.

Сложим результаты: 56 + 20 + 4 = 80.

Ответ: 80.

Пример 7. Сколько существует 6-значных симметричных восьмеричных чисел, т. е. одинаково читающихся как слева направо, так и справа налево, если в каждом числе только две чётные цифры (а все остальные – нечётные)? С нуля числа не начинаются.

Решение. Всё многообразие искомых чисел определяется первыми тремя цифрами в каждом числе. Для второй половины числа выбора нет: цифры второй половины должны повторять первые три цифры, но в обратном порядке. Следовательно, задача сводится к поиску количества не 6-значных чисел, а только 3-значных, в каждом из которых точно одна чётная цифра.

Чётные восьмеричные цифры: 0, 2, 4, 6. Сначала предположим, что числа могут начинаться с нуля. Если чётная цифра стоит на первом месте, то на втором и третьем местах могут стоять только нечётные цифры. Согласно правилу произведения, таких чисел существует 4 · 4 · 4 = 64. Чётная цифра может стоять на любом из трёх мест, следовательно, всего возможно 64 · 3 = 192 числа. Но по условию числа не могут начинаться с нуля. Всего начинающихся с нуля чисел существует 4 · 4 = 16. Вычтем это число из 192, получим 176.

Ответ: 174.

Пример 8. Сколько существует 7-значных двоичных чисел, в каждом из которых нулей больше чем единиц? Числа могут начинаться с нуля.

Решение. Разобьём задачу на ряд более простых подзадач:

1) в числе нет единиц. Такое число существует только одно: 0000000;

2) в числе одна единица и шесть нулей. Таких чисел 7;

3) в числе две единицы и пять нулей. Количество таких чисел определим по формуле $C_7^2 = 21$;

4) в числе три единицы и четыре нуля. Таких чисел существует

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35.$$

Сложим полученные результаты: 1 + 7 + 21 + 35 = 64.

Ответ: 64.

Пример 9. Сколько существует 4-значных десятичных чисел, в которых нечётных цифр столько же, сколько и чётных? Числа могут начинаться с нуля.

Решение. Согласно условию, в каждом числе содержится две чётные и две нечётные цифры. Пусть числа начинаются с чётных цифр. Тогда получим $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ чисел. Две чётные цифры могут занимать и другие места в 4-значном числе. Число вариантов равно $C_4^2 = 6$. Следовательно, всего искомых чисел существует $625 \cdot 6 = 3750$.

Ответ: 3750.

Пример 10. В числе 141 восьмеричной системы счисления каждую единицу заменили цифрой, являющейся простым числом, а цифру 4 заменили другой цифрой, не равной 4. Сколько получилось новых чисел, если повторы цифр возможны?

Решение. Цифры 2, 3, 5 и 7 восьмеричной системы счисления являются простыми числами. Следовательно, единицы в числе 141 можно заменить четырьмя вариантами каждую. Вместо цифры 4 можно поставить одну цифру из семи, так как всего существует восемь восьмеричных цифр, из которых цифра 4 не может заменять саму себя. Таким образом, всего существует $4 \cdot 7 \cdot 4 = 112$ искомых чисел.

Ответ: 112.

Пример 11. Сколько существует 4-значных шестеричных чисел, в каждом из которых содержится хотя бы одна цифра 3? Числа могут начинаться с нуля. Повторы цифр возможны.

Решение. Сначала найдём количество чисел, в которых нет цифры 3. На место старшего разряда можно поставить одну из следующих цифр (цифра 3 удалена): 0, 1, 2, 4, 5. То же самое относится и к остальным разрядам. Следовательно, существует $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ 4-значных шестеричных чисел, в каждом из которых нет цифры 3. С учётом же цифры 3 возможно $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ чисел. Тогда существует $1296 - 625 = 671$ число, в каждом из которых содержится хотя бы одна цифра 3.

Ответ: 671.

Пример 12. К 4-значному двоичному числу a справа приставили 3-значное двоичное число b. Оба они могут начинаться с нуля. Получилось 7-значное число. Сколько существует 7-значных чисел, если $a > b$?

Решение. Если $b = 0$, то a может быть равным 1, 2, 3, …, 15. Всего 15 значений. Если $b = 1$, то a может быть равным 2, 3, 4, …, 15. Всего 14 значений. Если $b = 2$, то a может быть равным 3, 4, 5, …, 15. Всего 13 значений. И так далее до $b = 7$. Число a при этом может быть равным 8, 9, 10, …, 15. Всего 8 значений. Сложим полученные результаты:

$$15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 = 92.$$

Ответ: 92.

ТЕМА 3. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Эта теория изобилует понятиями. В зачётной задаче требуется найти все простые цепи, соединяющие две заданные вершины неориентированного графа. Для успешного её решения необходимо иметь чёткое представление о таких понятиях, как граф, ориентированный и неориентированный графы, помеченный граф, связность графа, цепь, простая цепь, простой цикл, длина цепи, вершинное представление цепей, графический и аналитический способы задания графа.

В данной контрольной работе граф задан множеством рёбер. Каждому ребру поставлено в соответствие множество, состоящее из номеров двух вершин, соединённым ребром. Представление рёбер в виде множеств обусловлено тем, что рёбра являются неориентированными (в множествах, где нет специальных оговорок, элементы являются неупорядоченными).

Как выполнять задание по данной теме, проиллюстрируем на следующем примере:

Пример. Найдите все простые цепи, соединяющие вершины 1 и 6 неориентированного графа:

$$G = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\},\{4,6\}\}.$$

Определите числа a, b, c, d, где

a – число простых цепей, состоящих из двух рёбер;

b – число простых цепей, состоящих из трёх рёбер;

c – число простых цепей, состоящих из четырёх рёбер;

d – число простых цепей, состоящих из пяти рёбер.

Решение. Сначала граф из аналитической формы, представленной множеством неориентированных рёбер, переведём в графическую (рис. 1). Затем действуем поэтапно.

Этап 1. Согласно рисунку 1, из вершины 1 можно выйти двумя вариантами: 1-3, 1-4. На этом первый этап заканчивается.

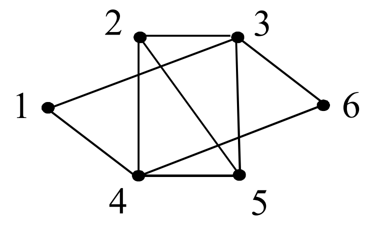

Рис. 1

Этап 2. Продолжаем движение по пути 1-3. Из вершины 3 существует четыре варианта движения: 1-3-1, 1-3-2, 1-3-5, 1-3-6. Из них цепь 1-3-1 удаляем, так как в ней вершина 1 повторяется. Из оставшихся цепь 1-3-6 является искомой. Её также удаляем. Продолжаться могут только две цепи 1-3-2 и 1-3-5. Точно такой же случай при движении по пути 1-4: цепь 1-4-1 удаляем из-за повтора вершины 1. Цепь 1-4-6 удаляем, так как она является искомой. Продолжаться могут только две цепи: 1-4-2 и 1-4-5.

Таким образом, на втором этапе найдены две искомые простые цепи, содержащие по два ребра: 1-3-6 и 1-4-6, а также четыре цепи, которые продолжаются: 1-3-2, 1-3-5, 1-4-2 и 1-4-5.

Этап 3. Действуем, как и в предыдущем случае. Берём цепь 1-3-2. Из вершины 2 можно выйти двумя путями (в вершину 3 не возвращаемся). Получим две продолжающиеся цепи: 1-3-2-4 и 1-3-2-5. Цепь 1-3-5 также даёт две продолжающиеся цепи: 1-3-5-2 и 1-3-5-4. То же самое относится к цепи 1-4-2, продолжая которую получаем цепи 1-4-2-3 и 1-4-2-5, а также к цепи 1-4-5, дающей продолжения: 1-4-5-2 и 1-4-5-3.

Таким образом, на третьем этапе получено 8 продолжающихся цепей и ни одной из искомых:

1-3-2-4, 1-3-2-5, 1-3-5-2, 1-3-5-4, 1-4-2-3, 1-4-2-5, 1-4-5-2, 1-4-5-3.

Этап 4. Цепь 1-3-2-4 имеет продолжения: 1-3-2-4-5 и 1-3-2-4-6. Из них вторая цепь – искомая. У цепи 1-3-2-5 только одно продолжение: 1-3-2-5-4. Далее получаем:

1-3-5-2-4, 1-3-5-4-2, 1-3-5-4-6, 1-4-2-3-5, 1-4-2-3-6, 1-4-2-5-3, 1-4-2-5-6,

1-4-5-2-3, 1-4-5-3-2, 1-4-5-3-6.

Таким образом, на четвёртом этапе получено 5 искомых цепей длины 4, т. е. содержащих по 4 ребра:

1-3-2-4-6, 1-3-5-4-6, 1-4-2-3-6, 1-4-2-5-6, 1-4-5-3-6,

и 8 продолжающихся

1-3-2-4-5, 1-3-2-5-4, 1-3-5-2-4, 1-3-5-4-2,
1-4-2-3-5, 1-4-2-5-3, 1-4-5-2-3, 1-4-5-3-2.

Этап 5. Четыре цепи не имеют продолжения: 1-3-2-4-5, 1-3-5-4-2, 1-4-2-3-5, 1-4-5-3-2. Удаляем их, так как они не могут привести к вершине 6. Остальные четыре цепи продолжаются. Они оканчиваются вершиной 6 и содержат по пять рёбер каждая:

1-3-2-5-4-6, 1-3-5-2-4-6, 1-4-2-5-3-6, 1-4-5-2-3-6.

Таким образом, в заданном графе (рис. 1) вершины 1 и 6 соединяют следующие простые цепи:

1) две цепи длины 2, т. е. содержащие по два ребра;

2) ни одной цепи длины 3;

3) четыре цепи длины 4;

4) четыре цепи длины 5.

Ответ: 2, 0, 4, 4.

ТЕМА 4. БУЛЕВА АЛГЕБРА: СДНФ

Здесь требуется знать, какие переменные называются логическими, что такое набор значений переменных, как формулируются теоремы де Моргана. Необходимо иметь чёткое представление о таких понятиях, как логические операции дизъюнкции, конъюнкции и инверсии, дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы, совершенные формы, минтермы, значения функции на заданном наборе, табличное и аналитическое представления булевых функций, карты Вейча.

Центральным вопросом четвёртой главы пособия является представление булевой функции в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ). Найти СДНФ можно при помощи теоремы Шеннона о разложении булевых функций, применяя её ко всем логическим переменным [22, с. 119], либо воспользоваться способом, описанным в п. 4.7 учебного пособия. Однако проще всего применить карту Вейча. Для этого необходимо на карту нанести заданную функцию, отметив на ней единицами минтермы, из которых состоят конъюнкции заданной функции, и мысленно совместить её со стандартной картой. Единицы покажут, какие номера на стандартной карте являются искомыми минтермами исследуемой функции.

Исходная функция в контрольной задаче задана в КНФ. Следовательно, сначала по теореме де Моргана находим ДНФ инверсии, наносим её на карту Вейча, затем карту инвертируем и результат сопоставляем со стандартной картой. Проиллюстрируем эти действия на примере.

Пример. Представить в СДНФ булеву функцию

$$f = (A + \overline{C})(\overline{B} + D)(\overline{B} + C + \overline{D})C.$$

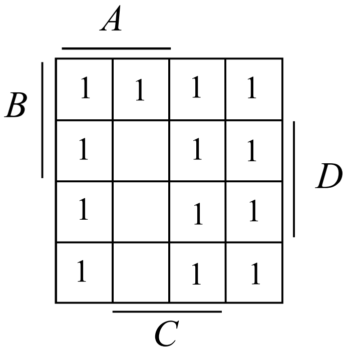

Рис. 2

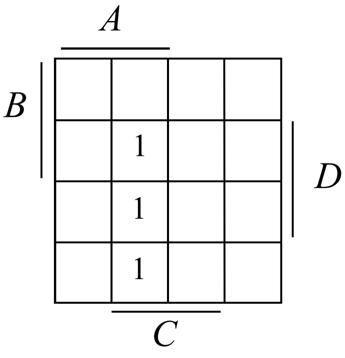

Рис. 3

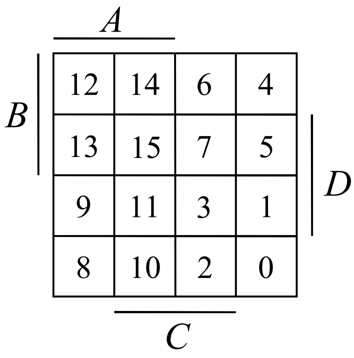

Рис. 4

Решение. Выполняем следующие действия:

1) так как функция представлена в КНФ, то сначала её инвертируем по теореме де Моргана:

$$\overline{f} = \overline{A}C + B\overline{D} + B\overline{C}D + \overline{C};$$

2) наносим инверсию на карту Вейча (рис. 2);

3) инверсию функции f, т. е. $\overline{f}$, инвертируем. Получим карту для прямой функции (рис. 3);

4) сопоставляем рис. 3 с рис. 4, где представлена стандартная карта Вейча, и находим СДНФ заданной функции:

$$f = (10,\ 11,\ 15).$$

Ответ: 10, 11, 15.

ТЕМА 5. МИНИМИЗАЦИЯ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Эта тема относится к важнейшим во всей прикладной алгебре логики темам. Дополнительно к сведениям, приведённым к предыдущей задаче, для успешной минимизации ДНФ булевых функций необходимо иметь чёткое представление о содержание таких понятий, как упрощение булевых формул, их минимизация, простая импликанта, операции склеивания и поглощения (из предыдущей темы), число вхождений переменных, сокращённая форма булевой функции, неопределённые состояния.

Для успешного выполнения задания по минимизации ДНФ необходимо научиться отыскивать на карте Вейча простые импликанты, стремясь к тому, чтобы число импликант было наименьшим и на карте Вейча не оставалось ни одной свободной единицы, т. е. каждая единица на карте должна входить хотя бы в одну из простых импликант.

Чтобы освоить карту Вейча, необходимо выполнить ряд упражнений. Для этого в учебном пособии «Дискретная математика» приведено несколько десятков упражнений на минимизацию с учётом неопределённых состояний. Здесь же на примере покажем, как необходимо действовать при решении контрольного задания по минимизации ДНФ.

Пример. Найти минимальную дизъюнктивную нормальную форму булевой функции, представленной в СДНФ (в квадратных скобках приведены неопределённые состояния):

$$f = (2, 6, 7, 9, 11, 15), [3, 4, 5, 8, 12].$$

Определить числа a, b и c, где

a – общее число букв в минимальной ДНФ;

b – число простых импликант, из которых состоит минимальная ДНФ;

c – число знаков дизъюнкции, содержащихся в минимальной ДНФ.

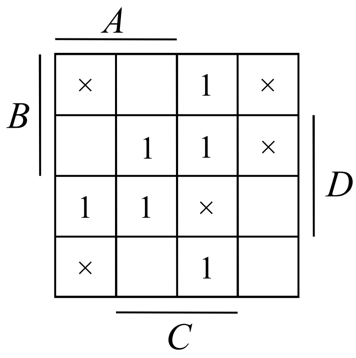

Рис. 5

Решение. Строим карту Вейча (рис. 5). По карте находим минимальную ДНФ:

$$f = A\overline{B}D + \overline{A}C + CD.$$

Находим числа *a*, *b* и *c*:

1) в минимальной ДНФ 7 вхождений переменных (т. е. общее число букв), следовательно, $a = 7$;

2) в минимальной ДНФ три слагаемых, следовательно, $b = 3$;

3) так как слагаемых 3, то знаков дизъюнкции 2, следовательно, $c = 2$.

Ответ: 7, 3, 2.

ТЕМА 6. МИНИМИЗАЦИЯ КОНЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Минимизация КНФ на основе исходной ДНФ осуществляется в основном так же, как и в случае ДНФ. Отличие состоит лишь в том, что добавляются две операции инвертирования: первая из них осуществляется при помощи карты Вейча, а вторая – с применением теоремы де Моргана.

Если процедуру минимизации КНФ представить в виде последовательности действий, то получим следующий список:

1) заданную функцию f наносим на карту Вейча;

2) карту Вейча, на которую нанесена заданная функция f, инвертируем: т. е. заменяем на ней все единицы нулями, а все нули единицами, при этом неопределённости оставляем неизменными, так как неопределённые состояния не инвертируются. В результате получим функцию $\overline{f}$;

3) находим минимальную ДНФ функции $\overline{f}$;

4) по теореме де Моргана инвертируем минимальное выражение $\overline{f}$. Получим минимальную КНФ.

Проиллюстрируем эти действия на следующем примере.

Пример. Найти минимальную конъюнктивную нормальную форму следующей булевой функции, представленной в СДНФ (в квадратных скобках приведены неопределённые состояния):

$$f = (2, 4, 7, 8, 13), [0, 1, 3, 9, 10, 12, 14].$$

Определить числа a и b, где

a – число букв в минимальной КНФ;

b – число знаков дизъюнкции в минимальной КНФ.

Решение.

1. Наносим заданную функцию f на карту Вейча (рис. 6).

2. Строим карту для функции $\overline{f}$ (рис. 7).

×	×		1
1		1	
×		×	×
1	×	1	×

Рис. 6

×	×	1	
	1		1
×	1	×	×
	×		×

Рис. 7

3. Находим минимальную ДНФ функции $\overline{f}$:

$$\overline{f} = AC + BC\overline{D} + \overline{A}\overline{C}D.$$

4. Инвертируем по теореме де Моргана выражение $\overline{f}$:

$$f = (\overline{A} + \overline{C})(\overline{B} + \overline{C} + D)(A + C + \overline{D}).$$

Получили минимальную КНФ. Находим числа a и b. Всего в минимальной КНФ 8 букв, следовательно, a = 8. В скобочных выражениях имеются знаки дизъюнкции. Всего их 5, следовательно, b = 5.

Ответ: 8, 5.

ТЕМА 7. КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ

С математической точки зрения эта тема относится к прикладной алгебре логики. Её основу составляет контактная интерпретация булевых формул.

Суть задачи на тему «Контактные структуры» состоит в следующем. Требуется построить схему, состоящую из четырёх реле, для управления осветительной лампой накаливания. При этом перечисляются все условия, при каких состояниях реле лампа горит и при каких не горит. Схема должна быть минимальной по числу реализующих её контактов.

Решение задачи сводится к выполнению следующих действий:

1) по словесному описанию работы схемы составить булеву функцию;

2) найти её минимальную ДНФ;

3) по минимальной ДНФ изобразить контактную схему;

4) по схеме определить, сколько в ней нормально замкнутых и сколько нормально разомкнутых контактов;

5) полученные в предыдущем пункте два числа являются ответом к задаче.

Для решения задачи необходимо усвоить технические понятия, такие как «электромагнитные реле», «тумблеры», «кнопки»; «нормально замкнутые и нормально разомкнутые контакты»; «параллельно-последовательные и мостиковые контактные структуры».

Пример. На основе минимальной ДНФ булевой функции построить контактную схему для управления электрической лампой при помощи четырёх реле A, B, C, D. Лампа горит, если выполняется хотя бы одно из пяти условий:

1) включены реле B и D, а реле A выключено;

2) включены реле A и B, а реле C выключено;

3) включено реле *B*, а реле *A*, *C* и *D* выключены;

4) включены реле *B* и *C*, а реле *A* выключено;

5) включено реле *A*, а реле *B* и *C* выключены.

Определить, сколько в контактной схеме нормально замкнутых контактов, сколько нормально разомкнутых.

Решение. Сначала рассмотрим решение табличным методом. Представим условия в виде таблицы (табл. 1). В первой строке записано 0 1 ∗ 1, где нуль согласно условию обозначает, что реле *A* выключено, а единицы говорят о том, что реле *B* и *D* включены. Значение *C* отмечено звёздочкой. Её можно заменить нулём или единицей. Если заменим нулём, то получим пятый минтерм, если единицей, то получим минтерм 7. Числа 5 и 7 записываем в колонке «Минтермы» первой строки. Точно так же заполняем и остальные строки колонки «Минтермы». Дизъюнкция всех этих минтермов есть СДНФ искомой функции, описывающей работу контактной структуры:

Таблица 1

Дес.	*A B C D*	Минтермы
1	0 1 ∗ 1	5, 7
2	1 1 0 ∗	12, 13
3	0 1 0 0	4
4	0 1 1 ∗	6, 7
5	1 0 0 ∗	8, 9

$$f = (4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13).$$

Нанесём это выражение на карту Вейча (рис. 8) и минимизируем:

$$f = A\overline{C} + \overline{A}B.$$

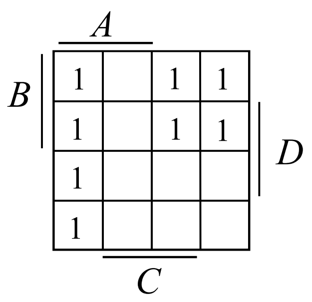

Рис. 8

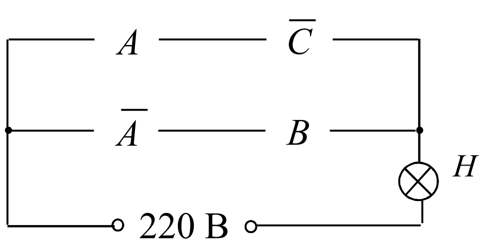

Рис. 9

Такой же результат можно получить другим, более простым путём.

Согласно первому условию, лампа горит при $A = 0$, $B = D = 1$. Этим значениям соответствует конъюнкция $\overline{A}BD$, принимающая единичное значение на двух наборах 0101 и 0111, где включённому реле соответствует неинверсная буква, а выключенному – инверсная. Переменная C в первом условии не упоминается, поэтому в конъюнкцию её не включаем. Таким образом, получили первую конъюнкцию искомого булева выражения.

Во втором условии сказано, что лампа горит, если $A = B = 1$, $C = 0$. Следовательно, конъюнкция имеет вид $AB\overline{C}$, где буквы A и B не содержат инверсий, так как им соответствуют включённые реле. Но над буквой C поставлен знак инверсии, поскольку реле C выключено. Это вторая конъюнкция из искомых.

Аналогично получаем ещё три конъюнкции согласно третьему, четвёртому и пятому условиям: $\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$ (реле B включено, а все остальные выключены) $\overline{A}BC$ (реле A выключено, а B и C включены), $A\overline{B}\overline{C}$ (реле A включено, а B и C выключены).

Лампа горит, если замкнутой является хотя бы одна из контактных цепей, соответствующих этим пяти конъюнкциям. Следовательно, все найденные конъюнкции соединяем знаками дизъюнкции. В результате получаем:

$$f = \overline{A}BD + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C}.$$

Нанесём это выражение на карту Вейча и минимизируем. Получим тот же результат, что и в случае табличного способа.

Строим контактную схему (рис. 9). На рис. 9 инверсной буквой обозначен нормально замкнутый контакт, неинверсной – нормально разомкнутый.

Согласно изображению схемы, она содержит два нормально замкнутых контакта и два – нормально разомкнутых.

Ответ: 2, 2.

ТЕМА 8. КОМБИНАЦИОННЫЕ СХЕМЫ

Эта тема похожа на предыдущую. Отличие: рассматривается электронная интерпретация булевых формул. Для решения задачи о синтезе комбинационного преобразователя необходимо вникнуть в такие понятия, как логические элементы, триггер типа *RS*, триггерный регистр, весовые и невесовые двоичные коды, таблица истинности, описывающая работу преобразователя кода.

В учебном пособии показан синтез комбинационного преобразователя, на вход которого поступают четырёхразрядные двоичные коды, а на выход – пятиразрядные (п. 7.8). В данной же задаче рассматривается простейший случай преобразователя: он содержит четыре входа и только один выход. Логика работы преобразователя задаётся булевой функцией f, представленной в СДНФ, т. е. перечислением входных кодов, на которые схема реагирует высоким уровнем выходного сигнала. Кроме того, приводится перечень запрещённых кодов, которые не будут подаваться на вход схемы. Эти коды для функции f являются неопределёнными состояниями.

Прежде чем строить логическую схему, функцию необходимо минимизировать. Построение комбинационной схемы проиллюстрируем на следующем примере.

Пример. Построить комбинационную схему на основе минимальной ДНФ следующей функции:

$$f = (1, 4, 5, 11, 13, 14),$$

$$[2, 3, 7, 10, 15].$$

В квадратных скобках указаны неопределённые состояния.

Определить числа a, b и c, где

a – число элементов И, содержащих по два входа;

b – число элементов И, содержащих по три входа;

c – число элементов И, содержащих по четыре входа.

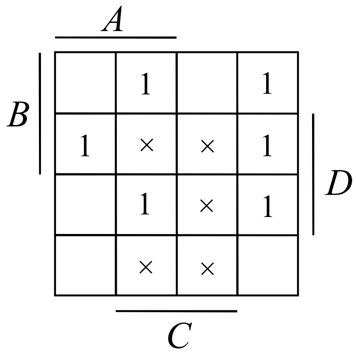

Рис. 10

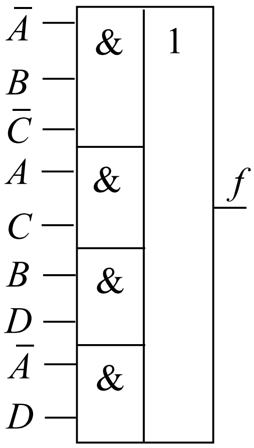

Рис. 11

Решение. Находим минимальную ДНФ по карте Вейча (рис. 10):

$$f = \overline{A}B\overline{C} + AC + BD + \overline{A}D.$$

Соответствующая схема приведена на рис. 11. В этой схеме три элемента И по два входа каждый. Следовательно, a = 3. Кроме того, схема содержит один элемент И с тремя входами. Следовательно, b = 1. Четырёхвходовых элементов в схеме нет. Следовательно, c = 0.

Ответ: 3, 1, 0.

ТЕМА 9. ФУНКЦИОНАЛЬНО ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ

Эти классы составляют основу теоремы Поста. В пособии (п. 8.7) она сформулирована следующим образом:

Система булевых функций называется функционально полной, если она содержит хотя бы одну функцию:

1) не сохраняющую константу 1;
2) не сохраняющую константу 0;
3) несамодвойственную;
4) нелинейную;
5) немонотонную.

Прикладное значение теоремы Поста состоит в том, что она даёт критерий, позволяющий ответить на вопрос: всякую ли булеву функцию можно представить в виде комбинационной схемы, используя, например, только три элемента, описываемых булевыми функциями f_1, f_2 и f_3. Чтобы ответить на этот вопрос, все три функции необходимо проверить на принадлежность к замкнутым классам. Например, если все они сохраняют константу 1, то построить на их основе схему, реализующую функцию, не сохраняющую единицу, невозможно. Если все они являются монотонными, то построить схему на основе функции, являющейся немонотонной, не удастся. То же самое относится и к остальным трём классам.

При определении функциональной полноты по Посту главным является выявление принадлежности исследуемых функций замечательным классам: монотонным, линейным, самодвойственным, сохраняющим нуль, сохраняющим единицу. После выполнения этих операций остаётся один шаг – определить по теореме Поста, является ли функционально полной исследуемая система булевых функций.

Но в данной работе контрольная задача представлена в упрощённом виде. Во-первых, исследуемая система состоит лишь из одной функции, а во-вторых, её требуется исследовать только на принадлежность к функционально замкнутым классам.

Чтобы правильно решить контрольную задачу данной темы, необходимо ознакомиться со всеми подразделами девятой главы учебного пособия, обратив особое внимание на признаки функциональной замкнутости булевых функций.

Как решать задачу на тему «Функционально замкнутые классы», проиллюстрируем на примере.

Пример.

Является ли функция

$$f = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$$

1) монотонной?

2) линейной?

3) самодвойственной?

4) сохраняющей нуль?

5) сохраняющей единицу?

Решение. Условимся обозначать ответ «да» единицей, а «нет» – нулём. Тогда результат решения данной задачи представится упорядоченной последовательностью пяти двоичных знаков. Решаем задачу:

1) нанесём функцию на карту Вейча (здесь она не приводится) и найдём минимальную ДНФ:

$$f = A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{A}C.$$

Так как в минимальной ДНФ содержатся инверсии, то функция не входит в класс монотонных. Ответ относительно монотонности: 0 (т. е. «нет», что обозначает: заданная функция не является монотонной);

2) представим выражение в виде полинома Жегалкина:

$$f = A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{A}C = A\overline{B} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}C =$$

$$= A(1 \oplus B) \oplus (1 \oplus A)B(1 \oplus C) \oplus (1 \oplus A)C =$$

$$= A \oplus AB \oplus B \oplus AB \oplus BC \oplus ABC \oplus C \oplus AC =$$

$$= A \oplus B \oplus BC \oplus ABC \oplus C \oplus AC.$$

Так как полином Жегалкина содержит конъюнкции, то функция является нелинейной. Ответ относительно линейности: 0;

3) функция четырёх переменных может быть самодвойственной только в том случае, когда она состоит из 8 минтермов. В данном же случае число минтермов функции равно 10, следовательно, функция не является самодвойственной. Ответ относительно самодвойственности: 0;

4) подставим в заданную функцию набор 0000. Получим f = 0, т. е. функция сохраняет нуль. Ответ на вопрос о сохранении нуля: 1 (т. е. «да»);

5) подставим набор 11111. Получим f = 0, т. е. ответ на вопрос о сохранении единицы: 0.

Ответ: 0, 0, 0, 1, 0.

ТЕМА 10. АВТОМАТЫ С ПАМЯТЬЮ

Автоматы с памятью содержат запоминающие элементы – триггеры A_1, A_2, …, A_n. На входы триггеров информация поступает с выходов комбинационных схем, а на входы комбинационных схем сигналы подаются как извне, так и с выходов триггеров A_1, A_2, …, A_n. Таким образом, автомат с памятью представляет собой многотактную схему в виде сочетания комбинационных схем с элементами памяти в виде триггеров, где триггеры меняют свои состояния под действием прямоугольных импульсов тактового генератора.

В общем случае прикладная теория автоматов с памятью гораздо сложнее теории комбинационных схем. Однако в данном курсе дискретной математики рассматриваются простейшие многотактные схемы. Их назначение – показать принцип работы автоматов с памятью, проиллюстрировать способ их синтеза с применением таблицы переходов.

В качестве зачётного задания требуется построить многотактный автомат на трёх триггерах типа *T* и *JK*, реализующий только одну последовательность переходов автомата из одного состояния в другое по замкнутому циклу. Теоретическая часть этой работы состоит в нахождении системы булевых функций для реализации комбинационного преобразователя, выходы которого подключаются ко входам триггеров, а на входы преобразователя поступает информация с выходов тех же триггеров. Булевы функции, описывающие работу преобразователя, согласно [17], будем называть уравнениями входов. Эти уравнения представляют собой булеву модель синтезируемого автомата. Построение булевой модели является целью работы над задачей по синтезу многотактного автомата (автомата с памятью).

В контрольных заданиях автоматы строятся на триггерах двух типов. В соответствии с этим синтез автоматов проиллюстрируем на двух примерах.

Таблица 2

Дес.	$A\ B\ C$	$J_A\ K_A$	$J_B\ K_B$	$J_C\ K_C$
4	1 0 0	× 1	0 ×	0 ×
0	0 0 0	0 ×	1 ×	1 ×
3	0 1 1	0 ×	× 0	× 1
2	0 1 0	1 ×	× 1	1 ×
5	1 0 1	× 1	0 ×	× 0
1	0 0 1	1 ×	1 ×	× 1
6	1 1 0	× 0	× 0	1 ×
7	1 1 1	× 0	× 1	× 1

Пример 1. Построить булеву модель автомата на *JK*-триггерах, меняющего под действием синхроимпульсов свои состояния в последовательности:

4, 0, 3, 2, 5, 1, 6, 7.

Булевы функции, описывающие состояния входов триггеров A, B, C, представить в минимальных ДНФ. Определить, сколько букв в каждой из функций: J_A, K_A, J_B, K_B, J_C, K_C.

Решение. Составляем таблицу переходов автомата (табл. 2), как это показано в п. 9.5 учебного пособия. Для каждого из триггеров находим уравнения входов и минимизируем их при помощи карт Вейча (здесь карты не приводятся). Булева модель автомата имеет вид следующего списка минимальных ДНФ функций:

$$J_A = B\overline{C} + \overline{B}C; \qquad K_A = \overline{B};$$

$$J_B = \overline{A}; \qquad K_B = AC + \overline{A}\,\overline{C};$$

$$J_C = \overline{A} + B; \qquad K_C = \overline{A} + B.$$

Ответ: 4, 1, 1, 4, 2, 2.

Пример 2. Построить булеву модель автомата на *T*-триггерах, меняющего под действием синхроимпульсов свои состояния в той же последовательности, что и в предыдущем примере:

4, 0, 3, 2, 5, 1, 6, 7.

Определить, сколько букв в каждой из функций: T_A, T_B, T_C (без учёта генератора).

Решение. Строим таблицу переходов автомата (табл. 3). Пусть исходным является состояние 100. После одного прямоугольного импульса должно установиться состояние 000, т. е. импульс должен пройти на вход

Таблица 3

Дес.	$A\ B\ C$	T_A	T_B	T_C
4	1 0 0	1	0	0
0	0 0 0	0	1	1
3	0 1 1	0	0	1
2	0 1 0	1	1	1
5	1 0 1	1	0	0
1	0 0 1	1	1	1
6	1 1 0	0	0	1
7	1 1 1	0	1	1

только одного триггера A, и изменить его состояние. В соответствии с этим в колонке T_A на пересечении со строкой 100 (десятичное 4) ставим единицу, а в остальных колонках той же строки записываем нули.

Под действием второго импульса автомат должен перейти в состояние 011. Отмечаем это единицами в колонках T_B и T_C на пересечении со строкой 000. В колонке T_A той же строки ставим нуль, так как триггер A должен остаться в нулевом состоянии.

Третий импульс должен сменить состояние триггера C. Следовательно, в колонке T_C на пересечении со строкой 011 записываем единицу, а в колонках T_A и T_B ставим нули.

Аналогично заполняем всю таблицу. Рассматривая её как таблицу истинности для трёх функций, находим их минимальные ДНФ:

$$T_A = A\overline{B} + \overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}; \qquad T_B = \overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}; \qquad T_C = \overline{A} + B.$$

В п. 9.3 учебного пособия отмечается, что все полученные выражения необходимо умножить на φ, где φ – генератор прямоугольных импульсов. Однако в данном случае в соответствии с условием задачи генератор не учитывается, т. е. умножение на φ не требуется. Ответом к задаче является упорядоченная последовательность чисел 7, 4 и 2, показывающих, сколько букв содержится в минимальных ДНФ функций T_A, T_B и T_C.

Ответ: 7, 4, 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О. Е. Акимов. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 376 с.

2. Березина Л. Ю. Графы и их применение : пособие для учителей / Л. Ю. Березина. – М. : Просвещение, 1979. – 143 с.

3. Бохманн Д. Двоичные динамические системы : пер. с нем. / Д. Бохманн, Х. Постхоф. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 401 с.

4. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. – М. : ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.

5. Горбатов В. А. Дискретная математика : учеб. для студентов втузов / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Горбатова. – М. : ООО «Издательство АСТ» ; ООО «Издательство Астрель», 2003. – 447 с.

6. Ежов И. И. Элементы комбинаторики / И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – М. : Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1977. – 80 с.

7. Клини С. К. Математическая логика : пер. с англ. / С. К. Клини. – М. : Изд-во ЛКИ, 2008. – 480 с.

8. Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств : пер. с англ. / С. Колдуэлл. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1962. – 737 с.

9. Кондаков Н. И. Логический словарь-справочник / Н. И. Кондаков. – М. : Наука, 1975. – 720 с.

10. Нефедов В. Н. Курс дискретной математики / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.

11. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. – СПб. : Питер, 2003. – 304 с.

12. Очков В. Ф. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет / В. Ф. Очков, Е. П. Богомолова, Д. А. Иванов. – СПб. : Лань, 2016. – 388 с.

13. Палий И. А. Дискретная математика : курс лекций / И. А. Палий. – М. : Эксмо, 2008. – 352 с.

14. Плотников А. Д. Дискретная математика : учеб. пособие / А. Д. Плотников. – М. : Новое знание, 2005. – 288 с.

15. Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика / А. П. Савин. – М. : Педагогика, 1989. – 352 с.

16. Уилсон Р. Введение в теорию графов : пер. с англ. / Р. Уилсон. – М. : Мир, 1977. – 207 с.

17. Фистер М. Логическое проектирование цифровых вычислительных устройств : пер. с англ. / М. Фистер. – Киев : Техника, 1964. – 382 с.

18. Фудзисава Т. Математика для радиоинженеров: Теория дискретных структур : пер. с япон. / Т. Фудзисава, Т. Кассами. – М. : Радио и связь, 1984. – 240 с.

19. Харари Ф. Теория графов : пер. с англ. / Ф. Харари. – М. : КомКнига, 2006. – 296 с.

20. Чупахин И. Я. Формальная логика / И. Я. Чупахин, А. М. Плотников, К. А. Сергеев и др. – Л. : Изд-во Ленинград. ун-та, 1977. – 357 с.

21. Шалыто А. А. Логическое управление. Методы аппаратной и программной реализации алгоритмов / А. А. Шалыто. – СПб. : Наука, 2000. – 780 с.

22. Шевелев Ю. П. Дискретная математика : учеб. пособие / Ю. П. Шевелев. – СПб. : Лань, 2016. – 592 с.

23. Шевелев Ю. П. Сборник задач по дискретной математике (для практических занятий в группах) : учеб. пособие / Ю. П. Шевелев, Л. А. Писаренко, М. Ю. Шевелев – СПб. : Лань, 2013. – 528 с.

24. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Высш. шк., 2003. – 384 с.

25. Многотактное устройство // Большая энциклопедия нефти и газа. – Режим доступа: http://www.ngpedia.ru/id554468p1.html