Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Е. Ф. Жигалова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Томск
«Эль Контент»
2014

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73
Ж 681

Рецензенты:
Фофанов О. Б., канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой оптимизации систем управления Томского политехнического университета;
Абдалова О. И., зам. зав. кафедрой прикладной математики и информатики ТУСУРа.

Жигалова Е. Ф.
Ж 681 Дискретная математика : учебное пособие / Е. Ф. Жигалова. — Томск : Эль Контент, 2014. — 98 с.

ISBN 978-5-4332-0167-5

Учебное пособие содержит традиционные разделы дискретной математики: основы теории множеств, булевой алгебры, теории графов и комбинаторики.

Наибольшее внимание в пособии уделено разделу о графах и их характеристиках.

В пособии размещены примеры решения типовых задач по дискретной математике по всем разделам содержания. Все задачи снабжены подробным описанием алгоритмов их решения. Пособие ориентировано на студентов технических университетов, обучающихся с применением дистанционных образовательных технологий.

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73

ISBN 978-5-4332-0167-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика — часть математики, которая зародилась в глубокой древности. Главной её спецификой является дискретность (антипод непрерывности). В широком смысле дискретная математика включает в себя такие сложившиеся разделы математики, как теория чисел, алгебра, математическая логика и ряд разделов, которые наиболее интенсивно стали развиваться в середине XX-го века в связи с внедрением ЭВМ, например «теория графов».

Дискретная математика сегодня является не только фундаментом математической кибернетики, но и важным звеном математического образования.

Главная задача курса — это обучение методам и мышлению, характерным для дискретной математики.

Научно-технический прогресс вызвал необходимость изучения и развития новых разделов науки, таких как сложные управляющие системы.

Сложная система — это собирательное название систем, состоящих из большого числа взаимосвязанных элементов. Типичными примерами сложной системы являются: нервная система, мозг, ЭВМ, система управления в человеческом обществе и т. д.

Другое определение сложной системы. Сложная система — это составной объект (система), части которого, в свою очередь, можно рассматривать как отдельные системы, объединённые в единое целое в соответствии с определёнными принципами или связанные между собой заданными отношениями.

Часто сложными называют системы, которые нельзя корректно описать математически потому, что в них имеется очень большое число различных элементов, неизвестным образом связанных друг с другом (напр., мозг), либо потому, что неизвестна природа процессов, протекающих в них. Сложными называются также системы, изучение которых связано с обработкой непомерно больших объемов информации (даже учитывая возможности современных ЭВМ).

Научно-технический прогресс вызвал необходимость изучения и развития новых разделов науки. К новым разделам науки относят: теорию функциональных систем; теорию графов и сетей; теорию кодирования; целочисленное программирование; комбинаторный анализ.

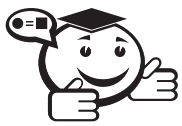
Сегодня дискретная математика является фундаментом математической кибернетики и важным звеном математического образования. Можно сказать, что дискретная математика есть совокупность математических дисциплин, изучающих свойства абстрактных дискретных объектов, т. е. свойства математических моделей объектов, процессов, зависимостей, существующих в реальном мире, которыми оперируют в различных областях знаний. Теория алгоритмов, теория множеств, теория графов, математическая логика закладывают прочный фундамент для изучения практически всех специализированных курсов, читаемых в технических университетах.

Цель изучения данных дисциплин — дать математическое обеспечение для современных компьютерных и информационных технологий.

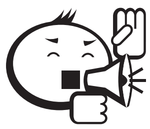
Материал этих дисциплин составляет базу для таких важнейших на сегодняшний день узкоспециализированных дисциплин, как «Теоретическая информатика», «Методы и алгоритмы принятия решений», «Функциональное и логическое программирование», «Структуры и организация данных для компьютера», «Конструирование программ», «Системный анализ и моделирование», «Теория искусственного интеллекта» и др. Все эти дисциплины «держатся на трёх китах»: логике, алгебре и графах. Систематическое изучение данного материала позволит узнать базовые математические модели и алгоритмы, которые в дальнейшем позволят профессионально решать множество задач в конкретных областях информатики и вычислительной техники. Полученные знания дадут возможность грамотно применять их для абстрактного проектирования логических структур и вычислительных процессов на графах.

Соглашения, принятые в книге

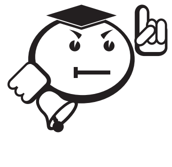
Для улучшения восприятия материала в данной книге используются пиктограммы и специальное выделение важной информации.



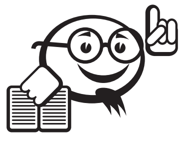
Этот блок означает определение или новое понятие.



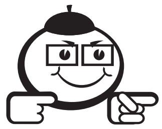
Этот блок означает внимание. Здесь выделена важная информация, требующая акцента на ней. Автор здесь может поделиться с читателем опытом, чтобы помочь избежать некоторых ошибок.



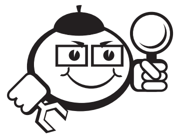
В блоке «На заметку» автор может указать дополнительные сведения или другой взгляд на изучаемый предмет, чтобы помочь читателю лучше понять основные идеи.



Эта пиктограмма означает теорему.

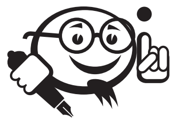


Эта пиктограмма означает лемму.



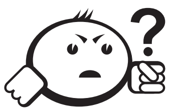
Пример

Эта пиктограмма означает пример. В данном блоке автор может привести практический пример для пояснения и разбора основных моментов, отраженных в теоретическом материале.



Выводы

Эта пиктограмма означает выводы. Здесь автор подводит итоги, обобщает изложенный материал или проводит анализ.



Контрольные вопросы по главе

Глава 1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ОТНОШЕНИЙ

1.1 Понятие множества

Понятие множества является основным, но трудно определяемым понятием, поэтому его можно только пояснить.

Интуитивное определение множества, принадлежит немецкому математику Георгу Кантору (1845–1918 гг.): «Под множеством M будем понимать любое собрание определенных и различимых между собою объектов, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются элементами множества M».

Принято элементы множества обозначать строчными буквами латинского алфавита, а само множество — прописной буквой.

В интуитивном определении множества, существенным является то обстоятельство, что собрание предметов само рассматривается как один предмет, мыслится как единое целое. Что касается самих предметов, которые входят во множество, то их природа может быть различной. Это множество целых чисел, множество точек плоскости, множество студентов в аудитории и т. д. Таким образом, канторовская формулировка позволяет рассматривать множества, элементы которых по той или иной причине нельзя точно указать (например, множество простых чисел, множество белых тигров и т. п.). Из этого следует, что множество может содержать неоднородные объекты. Можно объединить в одно множество и людей, и животных, и овощи.

Если элемент m принадлежит множеству M, то используется запись $m \in M$, в противном случае используется запись $m \notin M$.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным. Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Множество может быть задано различными способами: перечислением элементов (конечные множества) или указанием их свойств (при этом для задания множеств используют фигурные скобки).

Например, множество M цифр десятичного алфавита можно задать в виде $M = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ или $M = \{i \,/\, i\text{ — целое, } 0 \leqslant i \leqslant 9\}$, где справа от наклонной черты указано свойство элементов этого множества.

Множество M нечётных чисел можно записать в виде $M = \{m \,/\, m\text{ — чётное число}\}$.

Множество M_a называется подмножеством множества M (M_a включено в M) тогда и только тогда, когда любой элемент множества M_a принадлежит M:

$$M_a \subset M \leftrightarrow (m \in M_a \to m \in M),$$

где $\subset$ — знак включения подмножества; $a \to b$ означает: если a, то b; $a \leftrightarrow b$ означает: b, если и только если a. В частном случае множества M и M_a могут совпадать.

Невключаемое подмножество M_a в множество M обозначается:

$$M_a \not\subset M.$$

Множества M_a и M_b называются равными: $M_a = M_b$, если множество M_a является подмножеством множества M_b и множество M_b является подмножеством множества M_a.

Если множество M_a является подмножеством множества M, а множество M не является подмножеством множества M_a, то множество M_a называется собственным подмножеством множества M. Это можно обозначать:

$$M_a \subset\subset M.$$

Множества можно задавать графически с помощью диаграмм Эйлера—Венна. Например, множества $M_1 = \{a, b, c, d\}$ и $M_2 = \{e, f, c, g\}$ на рисунке 1.1, заданы диаграммами Эйлера—Венна.

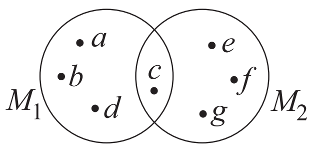


Рис. 1.1 – Пример представления множеств диаграммами Эйлера—Венна

1.2 Операции над множествами

Выполнение операций над множествами позволяет получать новые множества из уже существующих. Над множествами можно выполнять следующие основные операции:

- объединение
$$A \cup B := \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\};$$
- пересечение
$$A \cap B := \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\};$$

- разность

$$A \backslash B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\};$$

- симметрическая разность

$$A \Delta B \equiv A \div := (A \cup B) \backslash (A \cap B) = \{x \mid (x \in A \ \& \ x \notin B) \vee (x \notin A \ \& \ x \in B)\};$$

- дополнение

$$\overline{A} := \{x \mid x \notin A\}.$$

Операция дополнения подразумевает некоторый универсум (множество U, которое содержит $\overline{A}$):

$$\overline{A} := \{x \mid x \notin A\}.$$

Указанные операции можно пояснить следующим образом:

- *Объединением* множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами множества A или B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

- *Пересечением* множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого являются элементами обоих множеств A и B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B\},$$

  т.е выполняются включения $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ и $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Говорят, что два множества не пересекаются, если их пересечение — пустое множество.

- *Относительным дополнением* множества A до множества X называется множество $X \backslash A$ всех тех элементов множества X, которые не принадлежат множеству A:

$$X \backslash A = \{x \mid x \in X \,\&\, x \notin A\} \text{ (также называют разностью множеств } X \text{ и } A).$$

  Когда фиксирован универсум U, абсолютным дополнением множества A называется множество всех тех элементов x, которые не принадлежат множеству A:

$$A = \{x \mid x \in U \,\&\, x \notin A\}.$$

- *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество:

$$A \div B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Заметим, что дополнение множества $\overline{A} = U \backslash A$. Часто вместо $\overline{A}$ будем писать $\neg A$ или A'.

Первым стал использовать теперь общепринятые обозначения операций над множествами Джузеппе Пеано (1888 г.).

Для наглядного представления отношений между подмножествами какого-либо универсума используются диаграммы Эйлера. В этом случае множества обозначают областями на плоскости и внутри этих областей условно располагают элементы множества.

Часто все множества на диаграмме размещают внутри квадрата, который представляет собой универсум U и обозначается 1. Универсум — это семейство подмножеств множества U.

Если элемент принадлежит более чем одному множеству, то на диаграмме области, отвечающие таким множествам, должны перекрываться, чтобы общий элемент мог одновременно находиться в соответствующих областях, как это приведено на рисунках 1.2 и 1.3.

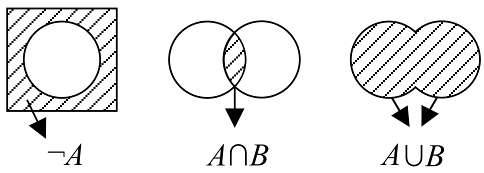


Рис. 1.2 – Диаграммы Эйлера—Венна, отображающие операции над множествами: $\neg A$ — дополнение множества A; $A \cap B$ — пересечение множеств; $A \cup B$ — объединение множеств

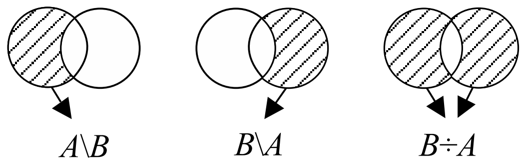


Рис. 1.3 – Диаграммы Эйлера—Венна, отображающие операции над множествами: разность множеств — $A \backslash B$ и $B \backslash A$; симметрическая разность множеств — $A \div B$

Относительный размер кругов либо других замкнутых областей не имеет значения, но лишь их взаимное расположение.

Безусловно, такие диаграммы могут играть в логике лишь ту роль, что чертежи в геометрии: они иллюстрируют, помогают представить и доказать, но сами ничего не доказывают.

1.3 Булевы выражения

Объединение, пересечение и дополнение обычно называются булевскими операциями, составленные из множеств с их помощью выражения — булевыми выражениями, значение такого выражения — булевой комбинацией входящих в него множеств, а равенство двух булевых выражений — булевыми тождествами.

Пример 1.1

Примеры булевых тождеств и их представление диаграммами Эйлера—Венна приведены на рисунках 1.4 и 1.5.

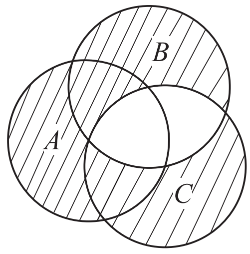


Рис. 1.4 – Булево тождество: $(A \cup B \cup C)\backslash(C \cap B) = (C \div B) \cup \big(A\backslash(A \cap B \cap C)\big)$

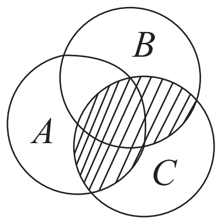
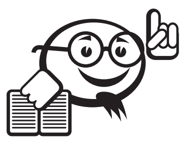


Рис. 1.5 – Булево тождество: $(A \cap C) \cup (B \cap C) = C\backslash\neg(A \cup B)$



Для любых подмножеств A, B, C и универсума U выполняются следующие основные булевские тождества (табл. 1.1):

Таблица 1.1 – Основные булевские тождества

1	$A \cup B = B \cup A$ (коммутативность $\cup$)	$A \cap B = B \cap A$ (коммутативность $\cap$)
2	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$)	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$)
3	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$)
4	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap U = A$
5	$A\neg \cup A = U$	$A\neg \cap A = \varnothing$
6	$A \cup A = A$ (идемпотентность $\cup$)	$A \cap A = A$ (идемпотентность $\cap$)

Контрольные вопросы по главе 1

1. Дайте определение множества, принадлежащее Георгу Кантору.
2. Напишите: элемент m принадлежит множеству M и элемент m не принадлежит множеству M.
3. Назовите операции, которые можно выполнять над множествами.
4. Что является результатом операций над множествами?
5. Для двух множеств A и B задайте операцию «разность».
6. Назовите способы задания множества, если его элементы принадлежат двум и более множествам.
7. Если два множества не пересекаются, то что является их пересечением?
8. Для множества $A \cup (B \cap C)$ запишите тождество:

   «дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$».
9. Для множества $A \cap (B \cup C)$ запишите тождество:

   «дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$».
10. Представьте диаграммой Эйлера—Венна множество $(A \cup B \cup C) \backslash (C \cap B)$.

Глава 2

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

2.1 Определение графа

Теория графов оперирует формальными моделями объектов, имеет дело со свойствами самих графов независимо от того, какова природа объектов, описываемых графами. Использование аппарата теории графов для разработки алгоритмов конструкторского и технологического проектирования схем ЭВА приводит к повышению эффективности и качества создаваемых объектов.

Понятие графа опирается на понятие множества. Графом можно назвать объект, состоящий из двух множеств: множества точек и множества линий, которые соединяют между собой все или часть этих точек.

Множество точек графа обозначается $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и называется множеством вершин. Суммарное число n всех вершин графа называется мощностью множества X данного графа и обозначается $|X| = n$.

Множество линий, соединяющих любые пары вершин (x_i, x_j), принадлежащих множеству X, называется множеством рёбер или дуг (если линии имеют направление) и обозначается:

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots, u_m\},$$

где u_k — ребро или дуга графа.

Суммарное число m всех рёбер графа называется мощностью множества рёбер графа и обозначается $|U| = m$.

Таким образом, графом можно считать математический объект, который обозначается $G = (X, U)$ и состоит из множества вершин X и множества рёбер или дуг U, находящихся между собой в некотором отношении.

В общем случае множество U можно представить в виде:

$$U = \overline{U} \cup U^0 \cup \overrightarrow{U},$$

где $\overline{U}$ — подмножество неориентированных линий, для которых не существенен порядок соединения вершин. Подмножество $\overline{U}$ называется подмножеством неориентированных рёбер. Каждое ребро $u_i \in \overline{U}$ определяется неупорядоченной парой вершин x, y, которые оно соединяет и записывается: $u_i = (x, y)$ или $u_i = (y, x)$. $\overrightarrow{U}$ — подмножество ориентированных линий, для которых существенен порядок соединения вершин. Подмножество $\overrightarrow{U}$ называется подмножеством дуг. Каждая дуга $u_i \in \overrightarrow{U}$ определяется упорядоченной парой (кортежем длины два) вершин x_k, y_l, которые дуга u_i соединяет, и записывается: $u_i = (x_k, y_l)$. Заметим, что $u_i = (x_k, y_l)$ и $u_j = (u_l, x_k)$ — различные дуги (рёбра) в графе G. U^0 — подмножество линий, каждая из которых выходит и входит в одну и ту же соответствующую этой линии вершину. U^0 — множество рёбер-петель.

Каждая петля u_i принадлежит множеству U^0 и определяется упорядоченной парой вида $u_i = (x_k, x_k)$.

Выводы

Граф состоит из вершин, которые на плоскости изображаются нумерованными кружками или точками, и рёбер, изображаемых линиями (со стрелками или без стрелок), которые соединяют некоторые из этих вершин. Однонаправленное соединение ребром двух вершин называется дугой. Двунаправленные или ненаправленные рёбра называются звеньями. Рёбра, соединяющие вершину саму с собой, называются петлями.

Рёбра, подходящие к вершине x, называются ***инцидентными данной вершине***. Соответственно говорят, что ***вершина*** x ***инцидентна рёбрам***, ***подходящим к ней***.

Количество рёбер, инцидентных вершине x, называется ***степенью вершины*** $s(x)$.

Вершина x называется изолированной, если её степень $s(x)$ равна нулю.

Если степени всех вершин равны k, то граф называется регулярным степени k.

Граф является конечным, если он имеет конечное число вершин и рёбер.

Бесконечным графом называется пара $\big(V(G), E(G)\big)$, где $V(G)$ — бесконечное множество элементов, называемое вершинами, а $E(G)$ — бесконечное семейство неупорядоченных пар элементов из $V(G)$, называемых ребрами.

Если оба множества $V(G)$ и $E(G)$ — счётны, то G называется счётным графом. Заметим, что наши определения исключают те случаи, когда $V(G)$ — бесконечно, а $E(G)$ — конечно. Такие объекты являются всего лишь конечными графами с бесконечным множеством изолированных вершин. Когда $E(G)$ — бесконечно, а $V(G)$ — конечно, такие объекты являются конечными графами с бесконечным числом петель или кратных ребер.

Вершинами являются числа $1, 2, \ldots, n$, а каждое действительное число x, удовлетворяющее условию $i < x < i + 1$, служит дугой из вершины i в вершину $i + 1$. Граф содержит конечное множество вершин и континуум рёбер (дуг).

Вершинами служат все действительные числа, и при фиксированном значении $\delta > 0$ вершины x и y соединены ребром (звеном или петлёй) тогда и только тогда, когда $|x - y| < \delta$. Каждому значению δ отвечает свой граф, у которого множества вершин и рёбер оба континуальны.

2.2 Классы графов

Класс орграфов (ориентированных графов). Это граф $G = (X, U)$, у которого множество звеньев (неориентированных рёбер) $\overline{U} = \varnothing$.

Класс неорграфов (неориентированных графов). Это граф $G = (X, U)$, у которого множество дуг — пусто.

Класс смешанных графов. Это граф $G = (X, U)$, у которого есть рёбра-дуги и рёбра-звенья:

$$\overline{U} \subset U, \ \vec{U} \subset U \text{ и } \overline{U} \cup \vec{U} \subseteq U.$$

Класс мультиграфов. Мультиграф — это граф $G = (X, U)$, у которого имеются параллельные (кратные) рёбра, т. е.

$$\exists x, y \in X \,|\, x u_k y, x u_m y, \ldots, x u_p y, u_k, u_m, \ldots, u_p \in U.$$

Для некоторых классов графов естественно определяется понятие полного графа. Полный граф содержит все рёбра, возможные при принадлежности графа данному классу и при неизменном множестве вершин.

Например, в случае p-графа полнота означает, что при каждой вершине имеется ровно p петель (если граф при вершинах содержит петли), а каждая пара различных вершин связана ровно p-рёбрами (среди них могут быть как звенья, так и дуги).

Граф общего вида, в котором любые две различные вершины всегда смежны, называется ***полным***.

Особо важную роль играют так называемые ***обыкновенные графы***. Граф этого класса характеризуется следующими четырьмя свойствами:

1) он конечен;
2) он является неориентированным, т. е. не содержит дуг;
3) он не содержит петель;
4) он не содержит «параллельных» («кратных») рёбер; иначе говоря, никакие две его вершины не могут соединяться более чем одним ребром (звеном).

Обыкновенный граф — это неориентированный униграф без петель.

....

Униграф — это граф, в котором смежные вершины связаны только одним неориентированным ребром.

Дополнением графа $L = (X, U)$ называется граф $\overline{L} = (X, U^*)$ с тем же множеством вершин X и множеством рёбер U^* —

$$U^* = \{\widetilde{xy}/x, y \in X \,\&\, x \neq y\}\backslash U.$$

....

Иначе говоря, это такой граф, в котором две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в исходном графе L.

Рассмотрим ещё одно важное в теории графов понятие — скелет графа.

В случае, когда при исследовании графа $L = (X.U; P)$ общего вида требуется не полная информация о нём, а лишь знание того, какие пары его различных вершин смежны, то прибегают к носителю такой информации — скелету графа L, который обозначим $\overline{L} = (X, \overline{U})$. Граф $\overline{L}$ относится к классу обыкновенных графов с множеством вершин таким же, что и в графе L, и новым множеством рёбер $\overline{U}$, полученных по следующим правилам:

- если в графе L есть петли, то они удаляются;
- если в графе L есть дуги, то производится дезориентация дуг;
- если в графе L есть кратные рёбра, то они заменяются одним эквивалентным неориентированным ребром.

Остальные рёбра также входят в множество рёбер $\overline{U}$.

Таким образом, множество рёбер $\overline{U}$ состоит из рёбер, полученных из множества U после выполнения описанных выше правил.

....

Деревом называется связный ациклический граф.

Граф без циклов называется ***ациклическим***, или ***лесом***.

....

2.3 Способы задания графов

Геометрический способ задания графов

Основой геометрического способа задания графа является рисунок, дающий визуальное изображение графа. Изображение графа в виде рисунка наглядно раскрывает содержательный смысл представляемого объекта. В этом способе вершины графа изображаются точками (кружками), а рёбра — линиями (со стрелками или без стрелок), концы которых подходят к вершинам графа.

Такое изображение графа ещё называют диаграммой графа.

Описание графа через предикат (инцидентор) P

Говорят, что задан граф $G = (X, U, P)$, если дано множество вершин X, множество ребер U и трёхместный предикат (инцидентор) P, определяющий, какую пару вершин x_i, x_j, принадлежащих множеству вершин X, соединяет ребро $u_k = (x_i, x_j)$. Инцидентор P удовлетворяет двум условиям:

1) инцидентор P определён на всех таких упорядоченных тройках элементов x, u, y, для которых $x, y \in X$ и $u \in U$;
2) $\forall u\, \exists x, y\ \{P(x, u, y)\ \&\ \forall x', y' [P(x', u, y') \Rightarrow (x = x'\ \&\ y = y') \vee (x = y'\ \&\ y = x')]\}$.

Матричный способ представления графов

Большинство задач автоматизации конструирования схем удобно решать при использовании матричного способа представления графов. Квадратная таблица $R = \|r_{i,j}\|_{n \times n}$ называется матрицей смежности, если её строки и столбцы соответствуют вершинам графа, а элементы $r_{i,j}$ образуются по правилу:

- $r_{i,j} = 1$, если вершина x_i соединена с вершиной x_j ребром, т. е. x_i смежна x_j;
- $r_{i,j} = 0$, в противном случае.

Заметим, что для мультиграфа и смешанного графа задают:

- $r_{i,j} = p$, если вершина x_i соединена с вершиной x_j p — числом рёбер;
- $r_{i,j} = 0$, если вершина x_i не соединена с вершиной x_j.

Очевидно, что для неорграфов $r_{i,j} = r_{j,i}$ и для их задания можно использовать треугольную матрицу R'.

Пример задания графа G (рис. 2.1) матрицей смежности R и треугольной матрицей смежности R'.

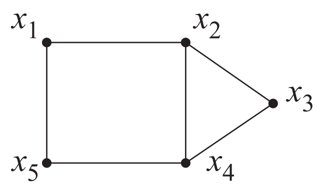


Рис. 2.1 – Граф G

Представление графа G матрицей смежности R имеет вид таблицы 2.1.

Таблица 2.1 – Матрица смежности R графа G

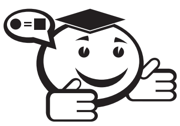
R	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2	1	0	1	1	0
X_3	0	1	0	1	0
X_4	0	1	1	0	1
X_5	1	0	0	1	0

Треугольная матрица смежности R' графа G имеет вид таблицы 2.2.

Таблица 2.2 – Треугольная матрица смежности R' графа G

R'	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0	0	1
X_2		0	1	1	0
X_3			0	1	0
X_4				0	1
X_5					0

Строки и столбцы матрицы R соответствуют вершинам графа. На пересечении i-й строки и j-го столбца ставится элемент $r_{i,j}$, соответствующий числу рёбер, соединяющих вершины x_i и x_j. Строки и столбцы матрицы R можно нумеровать числами натурального ряда, соответствующими индексам помеченных вершин. Петлям в графе соответствуют элементы $r_{i,i}$ главной диагонали матрицы R. Преимущество использования матриц смежности — это простота выполнения преобразований и операций над графами, как для конструктора, так и для ЭВМ.



Граф можно задавать также ***матрицей инциденций*** B, строки которой соответствуют вершинам графа, столбцы — рёбрам. Элементы $b_{i,j}$ матрицы B для неорграфа могут принимать значения (0 или 1):

- $b_{i,j} = 1$, если ребро u_j инцидентно вершине x_i;
- $b_{i,j} = 0$, если ребро u_j не инцидентно вершине x_i.

2.4 Числовые характеристики вершин графа

Каждая вершина x_i графа $G = (X, U)$ имеет числовую характеристику $s(x)$, которая называется степенью, или валентностью, вершины. Степень вершины $s(x_i)$ это целое, положительное число, равное количеству ребер, инцидентных вершине x_i.

Для ориентированных графов различают «полустепени исхода» и «полустепени захода». Это тоже числовые характеристики вершин, соответственно равные количеству дуг, исходящих из вершины и входящих в вершину.

2.5 Маршруты, цепи и циклы

Рассмотрим такие свойства графов, которые не меняются при произвольной ориентации звеньев графа, переориентации или дезориентации дуг (всех или некоторых).

Мы рассмотрим такие свойства графов общего вида $L = (X, U; P)$, которые полностью определяются предикатом $\widetilde{P}(x,u,y) \Leftrightarrow P(x,u,y) \vee P(y,u,x)$, называемым полуинцидентором (неоринцидентором) графа L.

О неорграфе $\widetilde{L} = (X, U; \widetilde{P})$ можно сказать, что он получен из L посредством дезориентации его дуг. В свою очередь, L можно получить из $\widetilde{L}$ ориентацией звеньев.

Конечная последовательность M элементов графа L: $M = x_0, u_1, x_1, u_2, x_2, \ldots, x_{k-1}, u_k, x_k$ $(k \geqslant 0)$, для которой истинно высказывание:

$$P'(x_0, u_1, x_1) \,\&\, P'(x_1, u_2, x_2) \,\&\ldots\&\, P'(x_{k-1}, u_k, x_k),$$

называется ***маршрутом*** из вершины x_0 в вершину x_k, или маршрутом, соединяющим вершину x_0 с вершиной x_k; в случае $x_0 = x_k$ имеем циклический маршрут при вершине x_0, или цикл. Число k носит название ***длины маршрута*** M. Иными словами, длина маршрута равняется числу рёбер, входящих в него.

Заметим, что маршрут — это не просто часть графа, т. к. порядок его обхода играет существенную роль.

Так, маршрут M_1:

$$M_1 = x_k, u_k, x_{k-1}, \ldots, x_2, u_2, x_1, u_1, x_0 \text{ при } k \geqslant 0$$

не совпадает с написанным выше маршрутом M, хотя и состоит из тех же самых элементов и с тем же отношением инцидентности.

Виды маршрутов

Маршрут $M = x_0, u_1, x_1, u_2, x_2, \ldots, x_{k-1}, u_k, x_k$ называется ***цепью***, если все рёбра $u_1, u_2, \ldots, u_k$ попарно различны. Цепь в случае, если $x_0 = x_k$, при $k \geqslant 1$, называется ***циклом***.

Цепь называется ***простой***, если все ее вершины $x_p, x_k, \ldots, x_t$ попарно различны. В случае, когда $x_p = x_t$, имеем ***простой цикл***, который, будучи цепью, в то же время не есть простая цепь.

Цепь, в которой начальная и конечная вершины не совпадают, но есть повторяющиеся вершины, называется ***циклической***.

Гамильтоновой цепью называется простая цепь, содержащая все вершины графа.

Гамильтоновым циклом графа называется простой цикл, содержащий все вершины графа. Граф, содержащий гамильтонов цикл, называется ***гамильтоновым графом***.

Эйлеровой цепью графа называется цепь, содержащая все рёбра графа. Каждое ребро входит в эйлеров цикл ровно один раз. Граф, содержащий эйлерову цепь, называется ***полуэйлеровым графом***. ***Эйлеровым циклом графа*** называется цепь, содержащая все рёбра графа, и каждое ребро входит в цикл ровно один раз. Граф, содержащий эйлеров цикл, называется ***эйлеровым***.

Всякий маршрут (в частности, всякая цепь) графа содержит хотя бы одну простую цепь, соединяющую ту же пару вершин. Всякий циклический маршрут нечетной длины содержит простой цикл нечетной длины. Всякий цикл содержит простой цикл.

Всякий кратчайший маршрут между двумя заданными вершинами графа есть простая цепь. Всякий цикл наименьшей длины при заданной вершине является простым.

2.6 Определение числа маршрутов длины «L» на графе

Маршрутом $\mu_{i,j}$ в графе $G = (X, U)$ называется конечная последовательность вершин и рёбер вида — $\mu_{0,l} = (x_0,\ u_1,\ x_1,\ u_2,\ x_2, \ldots, x_{l-1}, u_k, x_l)$, где x_0, x_l — соответственно начальная и конечная вершины маршрута $\mu_{0,l}$.

Очевидно, в конечном графе $G = (X, U)$ можно выделить только конечное число маршрутов. Длина маршрута $\mu_{i,j}$ равна числу рёбер, которые в него входят.

Часто требуется знать — сколько маршрутов заданной длины в графе G связывает вершину x_i с вершиной x_j.

Для определения маршрутов длины q в графе $G = (X, U)$ его матрицу смежности R возводят в степень, равную q. Тогда для каждого значения степени $q = 1, 2, \ldots, k$ значение элемента $(r_{i,j})_q$ матрицы R_q определяет количество маршрутов $\mu_{i,j}$ длиной, равной значению степени q.

Пример 2.1

Для графа $G = (X, U)$ (рис. 2.2) определить количество маршрутов длины, равной 2.

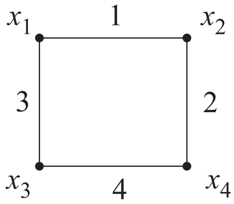


Рис. 2.2 – Граф $G = (X, U)$, где $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4\}$

Решение:

Зададим граф G его матрицей смежности R. Матрица смежности R имеет вид таблицы 2.3:

Таблица 2.3 – Матрица смежности R графа G

R	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	1	1	0
X_2	1	0	0	1
X_3	1	0	0	1
X_4	0	1	1	0

Возведем матрицу R в степень 2 (табл. 2.4):

Таблица 2.4 – Матрица смежности R графа G в степени 2

R^2	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	2	0	0	2
X_2	0	2	2	0
X_3	0	2	2	0
X_4	2	0	0	2

Значение каждого элемента $r_{i,j}$ матрицы R^2 равно числу маршрутов длины 2, ведущих из вершины x_i в вершину x_j.

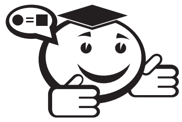
Например, $r^2_{3,2} = 2$ означает, что в графе имеются два маршрута длины 2, которые ведут из вершины x_3 в вершину x_2. Запишем их:

первый маршрут: $\mu_{3,2} = x_3, 3, x_1, 1, x_2$;

второй маршрут: $\mu_{3,2} = x_3, 4, x_4, 2, x_2$.

Операции на графах

Операция «удаление вершины».



При ***удалении вершины*** удаляются все инцидентные ей рёбра.

Пример 2.2

В графе $G = (X, U)$ *(рис. 2.3) удалить вершину* x_1.

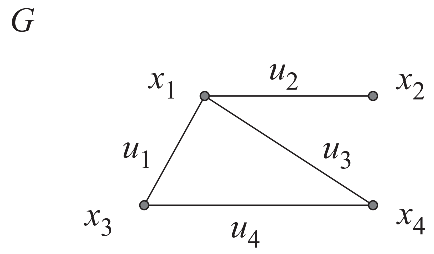


Рис. 2.3 – Граф $G = (X, U)$

Решение:

Результат выполнения данной операции приведён на рисунке 2.4.

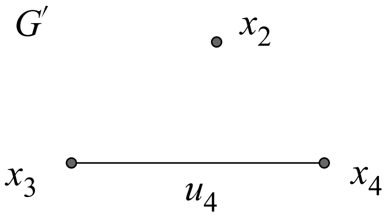


Рис. 2.4 – Граф G' получен из графа G удалением вершины x_1

Операция «удаление ребра».

При ***удалении ребра*** инцидентные ему вершины (концевые) не удаляются!

Пример 2.3

В графе $G = (X, U)$ *(рис. 2.3) удалить ребро* u_2.

Решение:

Результат выполнения данной операции — граф G'' (рис. 2.5).

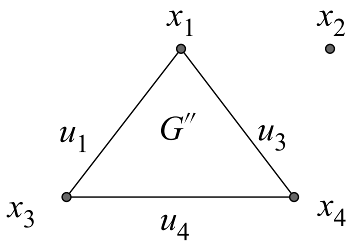
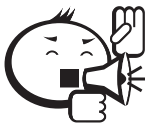
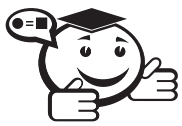


Рис. 2.5 – Граф G'', полученный из графа G удалением ребра u_2 вершины x_1

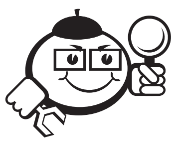


Если из графа требуется удалить некоторое множество вершин и рёбер, то эта процедура сводится к последовательному удалению каждой вершины отдельно и удалению отдельно каждого ребра.

Замыкание (отождествление) вершин.



Для любой заданной пары вершин V_i, V_j ***операция замыкания*** сводится к отождествлению этих вершин в новую вершину V_k, при этом все рёбра, инцидентные вершинам V_i и V_j, становятся инцидентными вершине V_k.



Пример 2.4

На графе $G = (X, U)$, представленном на рисунке 2.6, выполнить операцию «замыкания» вершин x_1 и x_2.

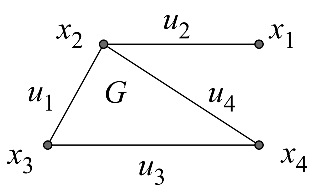


Рис. 2.6 – Граф $G = (X, U)$

Решение:

Граф G', полученный из графа G после «замыкания» вершин x_1 и x_2, представлен на рисунке 2.7, где вершина $x_k = (x_1 + x_2)$.

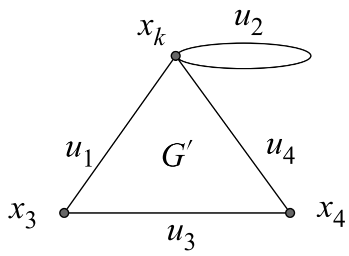


Рис. 2.7 – Граф G', полученный из графа G с помощью замыкания вершин x_1 и x_2

Стягивание ребра графа.

Результатом операции «***стягивания ребра***» u_j в графе G является граф G', полученный из графа G удалением из него ребра u_j и отождествлением его концевых вершин. Говорят, что граф G стягивается к графу H, если граф H можно получить из графа G последовательным стягиванием его рёбер.

Пример 2.5

В графе $G = (X, U)$ (рис. 2.8, а) выполнить операцию «стягивания» ребра u_2.

Решение:

Граф G_2 (рис. 2.8, *б*) получен операцией стягивания ребра u_2 в графе G_1. В графе G_2 вершина $x_k = (x_4 + x_2)$.

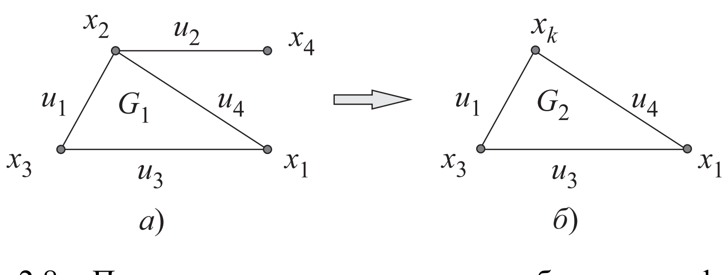
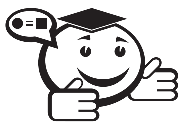


Рис. 2.8 – Пример операции стягивания ребра u_2 в графе G_1

Кольцевая сумма графов.



Кольцевая сумма графов представляет граф, который не имеет изолированных вершин и состоит из ребер, присутствующих либо в одном графе, либо во втором графе. Операция «кольцевая сумма графов» обозначается символом $\oplus$:

$$G = G_1 \oplus G_2.$$

Пример выполнения операции «кольцевая сумма графов» G_1 и G_2 показан на рисунке 2.9.

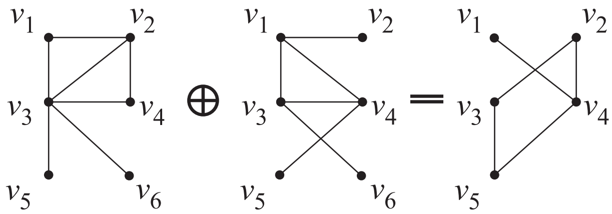
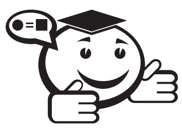
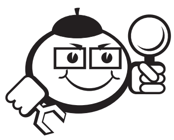


Рис. 2.9 – Пример операции «кольцевая сумма графов»

Пересечение графов.



Пересечение графов $G = (V, X)$ и $H = (U, Y)$ есть граф $G \cap H$, вершинами которого являются вершины, присутствующие одновременно и в графе G, и в графе H, а множество рёбер состоит только из рёбер, присутствующих одновременно и в графе G, и в графе H.



Пример 2.6

Граф G называется пересечением графов G_1, G_2, если

$$V_G = V_1 \cap V_2 \text{ и } U_G = U_1 \cup U_2.$$

Операция «пересечения» записывается следующим образом: $G = G_1 \cap G_2$.
Пример операции «пересечения» графов представлен на рисунке 2.10.

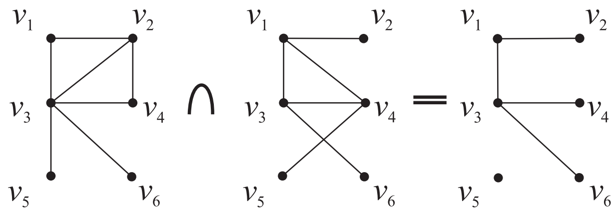
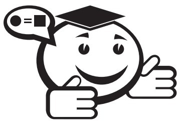


Рис. 2.10 – Операция «пересечение» графов

. . . .

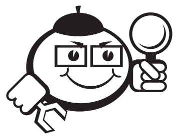
Объединение графов.



. . . .

Объединением графов $G = (V, X)$ и $H = (U, Y)$ называется граф $E = (V \cup U, X \cup Y)$.

. . . .



Пример 2.7

Выполнить операцию объединения графов $G(X,V)$ и $H(Y,U)$, представленных на рисунке 2.11.

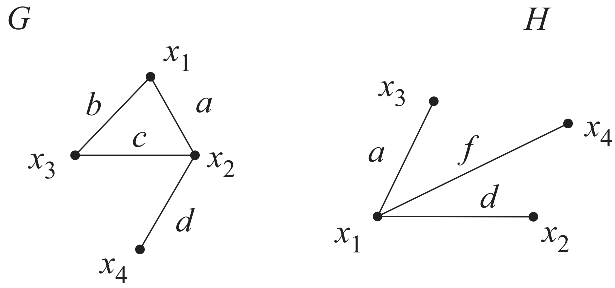


Рис. 2.11 – Графы — G и H

Решение:

Граф $E = (X \cup Y,\ V \cup U)$, полученный объединением графов G и H (рис. 2.12).

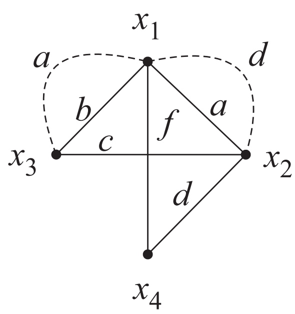
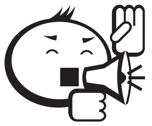


Рис. 2.12 – Граф E, полученный объединением графов G и H

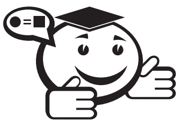
. . . .



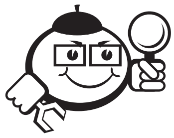
Операция объединения графов записывается: $E = G \cup H$.

2.7 Части графа

2.7.1 Подграф



Граф $G' = (X', U')$ называется ***подграфом графа*** $G = (X, U)$, если X' является подмножеством X $(X' \subset X)$, U' является подмножеством U $(U' \subset U)$ и обе вершины каждого ребра из U' принадлежат X'.



Пример 2.8

В графе G (рис. 2.13) выделить два подграфа.

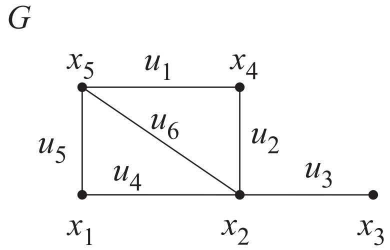


Рис. 2.13 – Граф G

Решение:

1. Граф G_1 (рис. 2.14) является подграфом графа G.
2. Граф G_2 (рис. 2.15) является подграфом графа G.

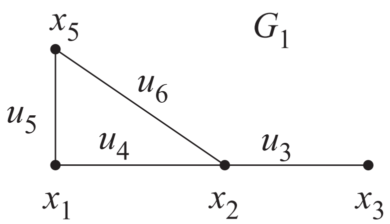


Рис. 2.14 – Граф G_1 — подграф графа G

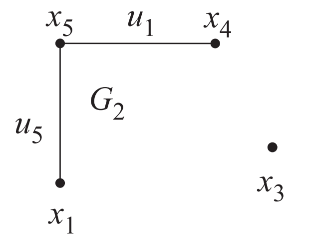
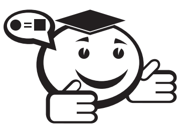


Рис. 2.15 – Граф G_2 — подграф графа G

. . . .

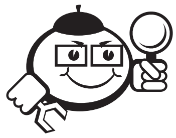
2.7.2 Частичный граф



. . . .

Граф $L'' = (X'', Y'')$ является ***частичным графом*** (***суграфом***) графа $L(X, U)$, если: $X'' = X$; U'' является подмножеством U, т. е. $U'' \subseteq U$.

. . . .



Пример 2.9

1. Граф G_3 (рис. 2.16) является частичным графом графа G (рис. 2.13).

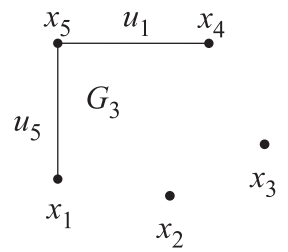


Рис. 2.16 – Граф G_3 — частичный от графа G (рис. 2.13)

2. Граф L_1 (рис. 2.18) является частичным графом графа L (рис. 2.17).

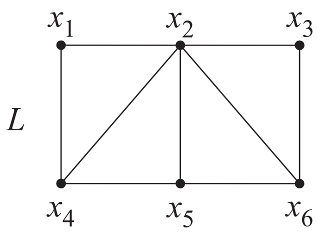


Рис. 2.17 – Граф L

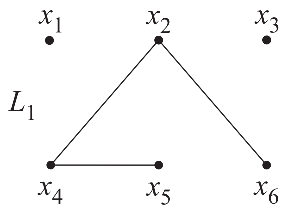


Рис. 2.18 – Граф L_1 — частичный граф от графа L

2.8 Метрика графа

Взвешенный граф

Задавая на вершинах и рёбрах графа $L = (X, U)$ функции p:

$$X \to M_p, \quad q\colon U > M_q,$$

где M_p и M_q — произвольные множества, получим ***взвешенный граф*** $L(p,q) = (X, U, p, q)$.

Пример 2.10

На множествах X и U можно задавать и более чем по одной функции или, напротив, задать функцию только на рёбрах.

Вес ребра — значение, поставленное в соответствие данному ребру взвешенного графа. Обычно, вес — вещественное число, которое можно интерпретировать как «длину» ребра.

Взвешенный граф — граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие некоторое значение (вес ребра).

К взвешенным графам принадлежат электрические схемы, сети коммуникаций, информационные и логические сети, графы автоматов, сетевые графики работ и многое другое. Ограничимся здесь отдельным вопросом, в котором наличие весов является идеей чистой теории графов: длины рёбер.

Пусть $L(q) = (X, U;\, q)$ — обыкновенный граф с весовой функцией q, относящей каждому ребру $u \in U$ действительное число $q(u)$ в качестве длины. Если M — маршрут на графе L, то сумма $q(u)$ по всем рёбрам маршрута M называется его q-длиной, а просто «длина» понимается как количество рёбер маршрута (каждое ребро графа нужно считать столько раз, сколько оно встречается в маршруте).

Число

$$\rho(x,y) = \min\{q(M)/M(M(x,y))\}, \tag{2.1}$$

где $M(x,y)$ — множество всех простых цепей из x в y называется расстоянием между вершинами $x,y \in X$ взвешенного графа $L(q)$; если $x = y$, то M — цепь нулевой длины и её длина $q(M) = 0$; если вершины x и y отделены в графе, то $\rho(x,y) = +\infty$.

Термин «расстояние» оправдан тем, что функция ρ, определённая посредством выражения (2.1), удовлетворяет трём аксиомам метрики (аксиомы Фрише):

$$\forall x,y \in X\big[\rho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y\big] \text{ (аксиома тождества)}, \tag{2.2}$$

$$\forall x,y \in X\big[\rho(x,y) = \rho(y,x)\big] \text{ (аксиома симметрии)}, \tag{2.3}$$

$$\forall x,y \in X\big[\rho(x,y) + \rho(y,z) = (x,z)\big] \text{ (аксиома треугольника)}, \tag{2.4}$$

т. е. ρ является метрикой на множестве вершин X.

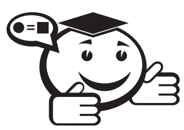
В частном случае, когда все $q(u) = 1$ и, значит, q — длина всякой цепи совпадает с её обычной длиной, метрика $\rho = \rho_{L^1}$ графа $L[1]$ называется естественной метрикой обыкновенного графа $L = (X, U)$.

Вершина $x_0 \in X$ графа $L = [q]$ называется центральной, если

$$\forall x \in X\big[\max \rho(x,y) \geqslant \max \rho(x_0,y)\big], \qquad x \in X,\ y \in X.$$

Вершина $x_0 \in X$ графа $G = [q]$ называется периферийной, если

$$\forall x \in X\big[\max \rho(x,y) \leqslant \max \rho(x_0,y)\big], \qquad x \in X,\ y \in X.$$



Величина

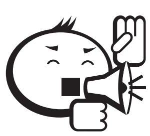
$$r(G) = \min \max \rho(x,y), \qquad x \in X,\ y \in X$$

носит название ***радиуса графа***.

Величина

$$d(G) = \max \rho(x,y), \qquad x,y \in X$$

называется ***диаметром графа*** $L(X, U)$.



У несвязного графа для любой пары вершин $x,y \in X$, $\max \rho(x,y) = +\infty$, поэтому каждая его вершина x является одновременно и центральной, и периферийной, а радиус и диаметр бесконечны.

Пример 2.11

Дан граф $L = (X, U)$ (рис. 2.19) с естественной метрикой ρ.

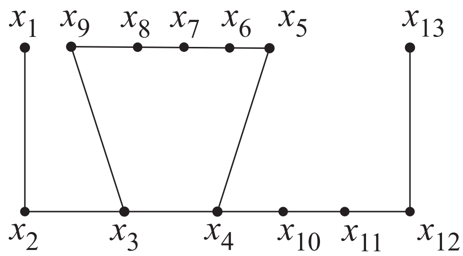


Рис. 2.19 – Граф $L(X, U)$, где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{13}\}$

У данного графа вершины x_4 и x_{10} — центральные, вершины x_1, x_7, x_8, x_{13} — периферийные, радиус $r(L) = 4$, диаметр $d(L) = 7$.

Алгоритм вычисления значений элементов матрицы метрики для графа общего вида

Для нахождения метрики $\rho = \rho_{L^1}$ графа $L = (X, U)$ достаточно знать его матрицу смежности R над булевой алгеброй $B = (0, 1)$, где элемент матрицы $r_{ij} = 1$, если вершины x_i и x_j — смежны, и $r_{ij} = 0$, в противном случае.

Все дальнейшие действия над элементами матрицы R выполняются по правилам алгебры логики Буля:

$$1 + 1 = 1; \quad 0 + 0 = 0; \quad 1 + 0 = 1; \quad 0 \cdot 0 = 0; \quad 1 \cdot 0 = 0.$$

Сопоставляя уже известные нам способы для установления существования в графе маршрутов длины l, можно утверждать, что при возведении в степень матрицы $S = R + E$, где E — единичная матрица той же размерности, что и размерность матрицы R, на некотором шаге возведения в степень получим: $S^k = S^{k+1}$, т. е. устойчивую матрицу S в степени «k».

Значения степеней k матрицы S^k: $k = \{1, 2, 3, \ldots, t\}$ равны длинам простых кратчайших цепей, связывающих вершины x_i и x_j.

Таким образом, последовательно возводя в степень $k = \{1, 2, 3, \ldots, t\}$ матрицу S, до получения устойчивой матрицы S^k можно определить расстояния между всеми вершинами графа $L = (X, U)$, построив матрицу метрики графа L.

Алгоритм построения матрицы метрики графа

Введём обозначения, которые будут использоваться в алгоритме построения матрицы метрики (матрицы отклонений):

- $L = (X, U)$ — граф;
- R — матрица смежности заданного графа L;
- E — единичная матрица;
- M — матрица метрики;
- матрица смежности R графа L с элементами логического типа:

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } x_i,\ x_j \text{ — смежны;} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

- S — матрица $S = R + E$.

Значения элементов $m_{i,j}$ матрицы M определяются за несколько итераций по результатам последовательного возведения матрицы $S = (E + R)$ в степень k, где $k = \{1, 2, 3, \ldots, t\}$ до получения устойчивой матрицы S^k. Матрица S^k называется устойчивой, если $S^k = S^{k+1}$.

Шаг 1. Задаём матрицу метрики $M = (m_{i,j})_{n\times n}$. Размерность матрицы M равна размерности матрицы R. Все элементы $m_{i,j}$ матрицы M не определены.

Шаг 2. Начальное значение степени k матрицы S равно «1»: $k = 1$. $\forall m_{ii}$ присваиваем значение «0», на основании 1-ой аксиомы Фрише.

Шаг 3. Всем элементам $m_{i,j}$, значения которых не определены, присвоить значение степени k, если соответствующие им элементы матрицы $S^k \neq 0$. (Значения элементов $m_{i,j}$ определяются только один раз.)

Шаг 4. Повышаем степень k матрицы S: $k = k + 1$.

Шаг 5. Проверяем, является ли матрица S^{k-1} устойчивой.

Если матрица S^{k-1} — неустойчивая, то переходим к шагу 3.

Иначе — переходим к шагу 6.

Шаг 6. Всем элементам $m_{i,j}$ матрицы M, значения которых остались неопределенными, присваиваем значение ∞ (бесконечность).

Шаг 7. Матрица метрики $M = (m_{i,j})$ построена. Конец алгоритма.

Примечание: Элементам $\{m_{i,j}\}$ значения присваиваются только один раз. Следовательно, если значение элемента $m_{i,j}$ уже определено, то оно больше не меняется.

Радиус графа определяется по матрице метрики следующим способом: в каждой строке матрицы M выделяется значение максимального элемента.

Наименьшее из выделенных значений — есть величина радиуса графа.

Диаметр графа также определяется по матрице метрики M следующим способом: в каждой строке матрицы M выделяется значение максимального элемента. Наибольшее из выделенных значений — есть величина диаметра графа.

2.9 Структурный анализ графов

Задача структурного анализа графов является одной из центральных задач теории графов и имеет широкое применение при решении фундаментальных теоретических проблем в программировании и прикладных задачах при анализе объектов математических моделей.

Данная задача связана с базовыми понятиями: связность графа, компонента связности графа, число компонент связности, полный граф, максимальные полные подграфы (клика) и максимальные пустые подграфы, скелет графа. Рассмотрим эти понятия.

Связность графа

Говорят, что две вершины в графе $G = (X, U)$ ***связаны***, если существует (простая) цепь, соединяющая их. Отношение связности вершин является ***эквивалентностью***. Классы эквивалентности по отношению связности называются ***компонентами связности***. Число компонент связности графа G будем обозначать $k(G)$. Граф G является ***связным*** тогда и только тогда, когда $k(G) = 1$. Если $k(G) > 1$, то G — ***несвязный граф***. Обозначим число вершин и число рёбер графа G соответственно через $\rho(G)$ и $q(G)$. Граф, состоящий только из изолированных вершин (в котором $k(G) = \rho(G)$ и $q(G) = 0$), называется ***вполне несвязным***.

Скелет $G^\wedge$ ***графа*** G получается путём отбрасывания в графе G всех петель и заменой кратных рёбер одним эквивалентным, а также дезориентацией имеющихся дуг.

Говорят, что в графе G ***вершина покрывает инцидентные ей рёбра***, а ребро покрывает инцидентные ему вершины.

Множество вершин графа G, покрывающее все рёбра, называется *вершинным покрытием*. Наименьшее число вершин во всех вершинных покрытиях называется числом вершинного покрытия и обозначается $\alpha_0(G)$.

Множество таких рёбер, которые покрывают все вершины, называется *рёберным покрытием*. Наименьшее число рёбер во всех рёберных покрытиях называется числом рёберного покрытия и обозначается $\alpha_1(G)$.

Подграф L' называется ***максимальным пустым подграфом*** графа $L = (X, U)$, если L' не является собственным подграфом никакого большего максимального пустого подграфа данного графа L.

Подграф L'' называется ***максимальным полным подграфом*** графа $L = (X, U)$, если L'' не является подграфом никакого большего максимального полного подграфа графа L.

Подмножество $X_k \subseteq X$ вершин неорграфа $G = (X, U)$ называется ***кликой***, если $G_k = (X_k, \Gamma_k)$ полный подграф (без петель) некоторого неорграфа $G = (X, \Gamma)$, соответствующего графу $G = (X, U)$.

Клика $X_{k\,\max}$ называется максимальной, если соответствующий ей подграф $G_{k\,\max}$ строго не содержится ни в каком другом полном подграфе графа G.

Алгоритм нахождения всех максимальных пустых и всех максимальных полных подграфов (максимальных клик) в графе общего вида

Задача выявления всех максимальных полных и максимальных пустых подграфов в заданном графе $L = (X, U; P)$ общего вида легко сводится к случаю обыкновенных графов.

Поэтому для практического выявления всех максимальных полных и максимальных пустых подграфов в произвольном неорграфе достаточно уметь выявлять все максимальные полные и максимальные пустые подграфы в обыкновенных графах.

Рассмотрим алгоритм выявления всех максимальных пустых подграфов в неорграфе общего вида, основанный на работах Х. Магу и Дж. Вэйсмана.

Шаг 1. Для графа $L = (X, U; P)$ общего вида построить его скелет.

Шаг 2. Построить матрицу инциденций A графа $\overline{L} = (X, \overline{U})$ с элементами a_{ij}, где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $n = |X|$ — число вершин и $m = |\overline{U}|$ — число рёбер в графе $\overline{L} = (X, \overline{U})$.

Шаг 3. Ввести систему логических переменных $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, подчинив её условиям, вытекающим из законов булевой алгебры:

$$x_i^2 = x_i, \quad x_i + 1 = 1,$$

а также законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Шаг 4. Матрицу инциденций A преобразовать в матрицу A_x и составить произведение Π_L:

$$A_x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_1 & \ldots & a_{1m}x_1 \\ a_{21}x_2 & a_{22}x_2 & \ldots & a_{2m}x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_n & a_{n2}x_n & \ldots & a_{nm}x_n \end{pmatrix},$$

$$\Pi_L = \Pi_L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i,$$

где j-й сомножитель произведения Π_L есть сумма двух слагаемых, соответствующих тем двум вершинам, которые в графе L соединены j-м ребром.

Шаг 5. Преобразовать выражение произведения Π_L к бесскобочному виду и привести его к минимальной форме, применяя законы дистрибутивности, ассоциативности, коммутативности и закон поглощения:

$$\text{а) } a + a \cdot b = a; \quad \text{б) } (a + b)(a + c)\ldots(a + p) = a + b \cdot c \ldots p,$$

где $a, b, c, \ldots, p$ — логические переменные, принимающие значения 0; 1, выполняя при этом условия, описанные в шаге 3. В результате выполненных преобразований выражение Π_L будет иметь минимальную форму и представлять выражение суммы произведений переменных из множества $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, т. е. многочлен. Обозначим его Σ_L.

Шаг 6. Для каждого слагаемого многочлена Σ_L выделить переменные, которые в него не входят, но входят в множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$. Эти переменные порождают максимальные пустые подграфы данного графа L, так как соответствующие им вершины в графе L образуют максимальные пустые подграфы.

Пример 2.12

В графе $L = (X, U; P)$, *изображённом на рисунке 2.20, используя рассмотренный алгоритм, выделить все максимальные пустые подграфы.*

Матрица смежности B графа L (рис. 2.20) содержит элементы b_{ij}, *равные:*

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{55} = 0; \quad b_{44} = 1; \quad b_{12} = 2; \quad b_{13} = 1; \quad b_{14} = 0; \quad b_{15} = 0;$$
$$b_{21} = 2; \quad b_{23} = 0; \quad b_{24} = 2; \quad b_{25} = 0; \quad b_{31} = 1; \quad b_{32} = 0; \quad b_{34} = 0; \quad b_{35} = 3;$$
$$b_{41} = 0; \quad b_{42} = 2; \quad b_{43} = 0; \quad b_{45} = 1; \quad b_{51} = 0; \quad b_{52} = 0; \quad b_{53} = 3; \quad b_{54} = 1.$$

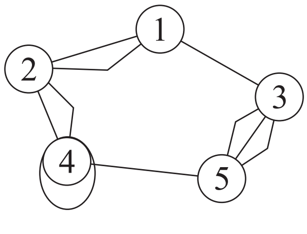


Рис. 2.20 – Граф $L = (X, U; P)$

Решение:

Шаг 1. Для графа L строим скелет L^1 (рис. 2.21).

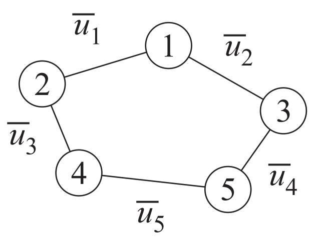


Рис. 2.21 – Скелет графа L

Шаг 2. Граф L^1 зададим его матрицей инциденций A (табл. 2.5).

Таблица 2.5 – Матрица инциденций A

		$\overline{u}_1$	$\overline{u}_2$	$\overline{u}_3$	$\overline{u}_4$	$\overline{u}_5$
$A =$	1	1	1	0	0	0
	2	1	0	1	0	0
	3	0	1	0	1	0
	4	0	0	1	0	1
	5	0	0	0	1	1

Шаг 3. Введём логические переменные $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ в количестве, равном числу вершин в графе L^1, и матрицу A преобразуем в матрицу A_x (табл. 2.6).

Шаг 4. Составим выражение для произведения Π_L:

$$\Pi_L = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_5)(x_4 + x_5).$$

Таблица 2.6 – Матрица A_x

		$\overline{u}_1$	$\overline{u}_2$	$\overline{u}_3$	$\overline{u}_4$	$\overline{u}_5$
$A_x =$	1	x_1	x_1	0	0	0
	2	x_2	0	x_2	0	0
	3	0	x_3	0	x_3	0
	4	0	0	x_4	0	x_4
	5	0	0	0	x_5	x_5

Шаг 5. Преобразуем выражения Π_L к минимальной форме:

$$\Pi_L = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_5)(x_4 + x_5) =$$

(перемножаем скобки первую со второй и третью с пятой)

$$= (x_1 + x_2x_3)(x_4 + x_2x_5)(x_3 + x_5) =$$

(перемножаем скобки первую со второй)

$$= (x_1x_4 + x_1x_2x_5 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5)(x_3 + x_5) =$$

(перемножаем скобки)

$$= x_1x_3x_4 + x_1x_4x_5 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_5 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_2x_3x_5 + x_2x_3x_5 =$$

(минимизируем полученное выражение, применяя законы булевой алгебры)

$$= x_1x_3x_4 + x_1x_4x_5 + x_1x_2x_5 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5.$$

Преобразование выражения Π_L закончено. Получена минимальная форма полинома: $\Sigma_L = x_1x_3x_4 + x_1x_4x_5 + x_1x_2x_5 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5$.

Шаг 6. Выделим для каждого слагаемого полинома его дополнение до множества переменных $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$:

$$S = \{(x_2, x_5);\ (x_2, x_3);\ (x_3, x_4);\ (x_1, x_5);\ (x_1, x_4)\}.$$

Полученные дополнения порождают максимальные пустые подграфы графа L^1 и заданного графа L.

Выводы

Алгоритм Магу—Вэйсмана может быть применён и для выявления в графе $L = (X, U; P)$ общего вида всех максимальных полных подграфов. Для этого необходимо построить для заданного графа L его скелет — граф L^1, а для графа L^1 построить дополнительный граф $\overline{L}$ (определение дополнительного графа дано в теме 2.1 данного пособия). Получить дополнительный граф легко, если исходный граф задать матрицей смежности его вершин, в которой всем элементам, равным нулю, присвоить значение «1», а всем элементам, значения которых не равны нулю, присвоить значение «0».

Далее для полученного графа $\overline{L}$ с помощью алгоритма Магу—Вэйсмана (рассмотренного выше) выявляем все максимальные пустые подграфы. Эти подграфы являются максимальными полными подграфами для графов L^1 и L.

Пример 2.13

В графе $L=(V,U,P)$, приведённом на рисунке 2.20, выделить все максимальные полные подграфы.

Решение:

Шаг 1. Строим скелет L^1 (рис. 2.21) графа L.

Шаг 2. Для графа L^1 строим его дополнительный граф L'', представленный на рисунке 2.22, в котором с помощью алгоритма Магу—Вэйсмана выделим все максимальные пустые подграфы.

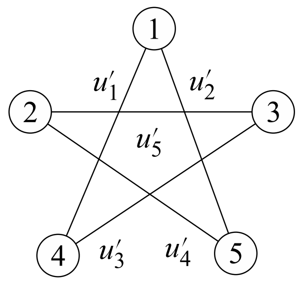


Рис. 2.22 – Граф $L'' = (X, U')$, где $X = \{1,2,3,4,5\}$, $U' = \{u_1', u_2', u_3', u_4', u_5'\}$

Приведём окончательный результат решения данной задачи — полином графа L'':

$$\Sigma_L = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_5 + x_2x_4x_5 + x_3x_4x_5$$

и дополнения для его слагаемых: (x_4,x_5); (x_3,x_5); (x_4,x_2); (x_1,x_3); (x_1,x_2), которые порождают все максимальные пустые подграфы графа $\overline{L}$ и максимальные полные подграфы заданного графа $L = (V, U; P)$.

2.9.1 Раскраска графов. Правильная раскраска, хроматическое число

Под ***раскраской графа*** понимают приписывание его вершинам (рёбрам) какого-либо цвета.

Если в графе $G = (X, U)$ его вершины (рёбра) раскрашены так, что смежные вершины (рёбра) окрашены в разные цвета, то такую раскраску называют правильной.

Если на правильную раскраску затрачено p цветов, то граф называется p-хроматическим.

Наименьшее натуральное число p, для которого граф является p-хроматическим, называется хроматическим числом графа и обозначается $\gamma(G)$.

Для решения задачи правильной раскраски графа $G = (X, U)$ и определения его хроматического числа можно применить алгоритм Магу—Вейсмана, который подробно изложен в структурном анализе графов.

Раскраска графа с помощью метода Магу—Вейсмана выполняется в два этапа.

На первом этапе определяются подмножества вершин графа G, которые можно раскрасить одним цветом.

На втором этапе определяется хроматическое число графа $\gamma(G)$.

Для определения подмножества вершин, которые можно раскрасить одним цветом, в графе $G = (X, U)$ с помощью метода Магу—Вейсмана находятся все максимальные пустые подграфы $G_1 = (X_1, U_1), G_2 = (X_2, U_2), G_3 = (X_3, U_3), \ldots, G_i = (X_i, U_i), \ldots, G_k = (X_k, U_k)$.

Очевидно, что вершины, принадлежащие одному подмножеству X_i, можно раскрашивать одним цветом. Наибольшее число цветов P, необходимое для правильной раскраски вершин графа равно числу максимальных пустых подграфов данного графа.

Так как множества вершин $X_1, X_2, X_3, \ldots X_i, \ldots, X_k$ максимальных пустых подграфов могут пересекаться, то число P, как правило, больше хроматического числа $\gamma(G)$.

Алгоритм определения хроматического числа $\gamma(G)$ с использованием метода Магу—Вейсмана:

Шаг 1. Упорядочить все максимальные пустые подмножества $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_i, \ldots, X_k$ графа G в порядке возрастания их кардинальных чисел — $|X_i|$.

Шаг 2. Выбрать подмножество X_i, имеющее наибольшее значение кардинального числа — $\max|X_i|$.

Шаг 3. Присвоить цвет (допустим, синий) всем вершинам $x_t \in \max X_i$.

Шаг 4. Вычеркнуть из других подмножеств вершины, которым присвоен цвет.

Шаг 5. Исключить из дальнейшего рассмотрения подмножество X_i.

Шаг 6. Если семейство пустых подмножеств $X_1, X_2, X_3, \ldots X_i, \ldots, X_k$ пусто, то перейти к шагу 9, иначе — к шагу 7.

Шаг 7. Из оставшихся подмножеств $X_1, X_2, X_3, \ldots X_i, \ldots, X_k$ выбрать следующее $\max|X_s|$, где $s \in I$: $I = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, и присвоить вершинам, входящим в него, цвет, который ещё не использовался.

Шаг 8. Для $\max|X_s|$ выполнить действия, описанные в шагах (4, 5, 6, 7), принимая $i = s$.

Шаг 9. Определить хроматическое число графа $\gamma(G)$: подсчитать полученное число подмножества вершин, «окрашенных » в разные цвета.

$\gamma(G)$ = количество цветов, потребовавшихся для раскраски в ходе выполнения всех действий, описанных в шагах (1–8).

Пример 2.14

Найти раскраску вершин графа $G = (X, U)$ (рис. 2.23).

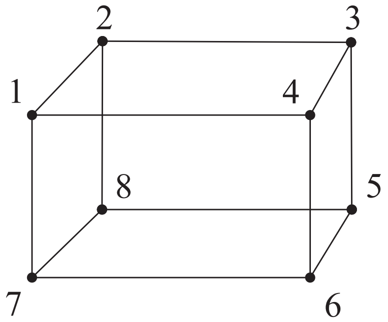


Рис. 2.23 – Граф $G = (X, U)$

Решение:

1-й этап. Находим все максимальные пустые подграфы графа $G = (X, U)$ с помощью алгоритма Магу—Вейсмана.

1. Составляем произведение P_G:

$$P_G = \prod_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i,$$

где a_{ij} — элемент матрицы инциденций графа G; $a_{ij} = (0, 1)$; $x_i \in X$ — новые образующие, подчиняющиеся условиям:

$$(x_i)^2 = x_i,\ (x_i)^2 + 1 = 1,\ x_i + 1 = 1,\ 1 + 1 = 1,\ 1 + 0 = 1$$

и законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, на основании которых преобразуем выражение P_G к минимальной бесскобочной форме.

$$P_G = (x_1 + x_2)(x_1 + x_4)(x_1 + x_7)(x_3 + x_2)(x_3 + x_4)(x_3 + x_5) \times$$
$$\times (x_6 + x_4)(x_6 + x_5)(x_6 + x_7) \times (x_8 + x_2)(x_8 + x_5)(x_8 + x_7) =$$
$$= (x_1 + x_2x_4x_7)(x_3 + x_2x_4x_5)(x_6 + x_4x_5x_7)(x_8 + x_2x_5x_7) = \ldots =$$
$$= x_1x_3x_6x_8 + x_1x_2x_3x_5x_6x_7 + x_1x_3x_4x_5x_7x_8 + x_2x_4x_5x_7 + x_1x_2x_4x_5x_6x_8 + x_2x_3x_4x_6x_7x_8.$$

2. Для каждого слагаемого преобразованного выражения P_G запишем его дополнение до полной системы образующих $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 8$ —

$$x_2x_4x_5x_7;\ x_4x_8;\ x_2x_6;\ x_1x_3x_6x_8;\ x_3x_7;\ x_1x_5.$$

Получили полный обзор всех максимальных пустых подграфов графа G.

2-й этап. Переходим к раскрашиванию вершин графа G.

Будем кодировать цвета арабскими символами: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Всем вершинам, принадлежащим одному максимальному пустому подграфу и ещё не раскрашенным, приписываем один цвет. Таким образом, для правильной раскраски вершин графа G требуется шесть цветов, т. е. $p = 6$.

Вывод. Граф G является 6-хроматическим.

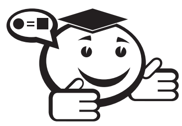
3-й этап. Определяем хроматическое число $\gamma(G)$ графа G.

1. Упорядочим полученные множества вершин в порядке убывания их кардинальных чисел: $x_2x_4x_5x_7$; $x_1x_3x_6x_8$; x_4x_8; x_2x_6; x_3x_7; x_1x_5.
2. Припишем вершинам множества (x_2, x_4, x_5, x_7) цвет «1» (цвет выбирается произвольно).
3. Удалим раскрашенные вершины из всех множеств и оставшиеся множества упорядочим в порядке убывания их мощности: (x_1, x_3, x_6, x_8); x_8; x_6; x_3; x_1.
4. Припишем вершинам множества x_1, x_3, x_6, x_8 цвет «2».
5. Удалим раскрашенные вершины из всех множеств.

Получаем пустое множество.

Вывод. Это говорит о том, что все вершины графа G — раскрашены. Для раскраски потребовалось всего два цвета, т. е. хроматическое число $\gamma(G)$ графа G равно двум: $\gamma(G) = 2$.

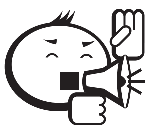
2.9.2 Компоненты связности графа



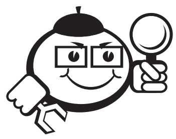
Граф $G(X, U)$ ***связен***, если любые его две вершины можно соединить простой цепью.

Подграф G' графа G называется ***компонентой связности графа*** G, если:

1) подграф G' связен;
2) подграф G' обладает свойством максимальности, т. е. если G'' — некоторый другой связный подграф графа G и $G' \subset \subset G''$, то графы G' и G'' совпадают.



Иными словами, компонента связности — это наибольший связный подграф данного графа.



Пример 2.15

Граф $G = (X, U)$ (рис. 2.24) содержит две компоненты связности: G' с вершинами $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ и G'' с вершинами (x_6, x_7, x_8, x_9).

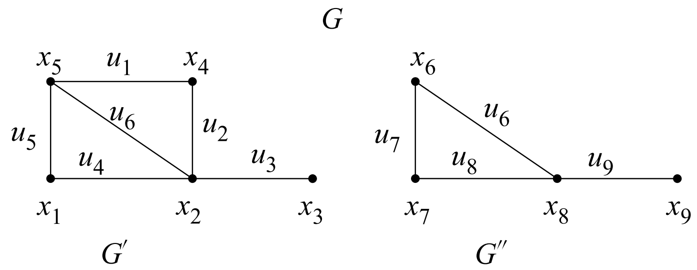


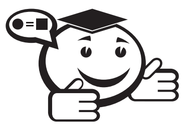
Рис. 2.24 – Граф G содержит две компоненты связи: G' и G''

. . . .

Способ определения числа компонент связности графа.

При помощи матрицы смежности графа G можно определить число компонент связности данного графа. Для этого определим операцию элементарной склейки вершин в мультиграфе и выясним, как эта операция преобразует матрицу смежности.

. . . .



Мультиграф $G' = (X', U')$ можно получить из мультиграфа $G = (X, U)$ при помощи пошагового выполнения ***операции элементарной склейки вершин*** x_i и x_j из множества X, если:

1) $X' = \big(X \backslash \big(\{x_i\} \cup \{x_j\}\big)\big) \cup \{z\}$, где $z \notin X$;
2) $(x_m, x_l, n) \in U'$, где $(m, l \neq i, j)$, n — номер ребра (x_m, x_l),

тогда и только тогда, когда $\big((x_m, x_l), n\big) \in U$, и $(x_m, z, n) \in U'$, где $(m \neq i, j)$.

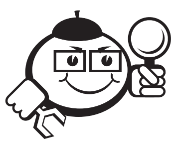
Здесь z — «новая» вершина G', полученная от склеивания вершин в графе G.

Из условий 1, 2 следует, что склеиваются только те пары вершин, которые являются концами одного и того же ребра. Ориентация рёбер на операцию склеивания не влияет.

Очевидно, что после каждого выполнения операции «склеивания» количество вершин множества X' уменьшается на единицу, а количество рёбер и их идентификационные номера остаются неизменными, т.е. $|U'| = |U|$.

Иными словами, при склейке вершин x_i и x_j склеиваются только концы дуг, совпадающие с x_i и x_j, а сами дуги сохраняются.

. . . .



Пример 2.16

В графе G (рис. 2.25) поэтапно выполнить операцию склеивания вершин.

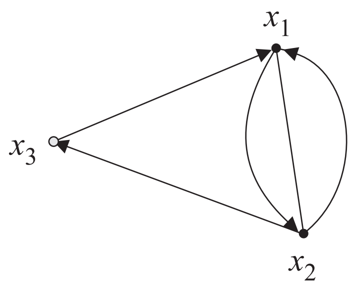


Рис. 2.25 – Граф G

Решение:

1-этап. В графе G склеиваем вершины x_1 и x_2. Получаем граф G' (рис. 2.26), где вершина $x_k = x_1 + x_2$.

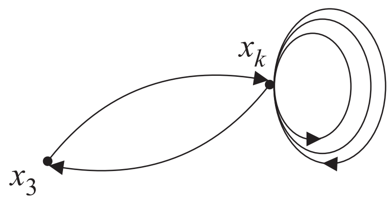


Рис. 2.26 – Граф G', полученный из графа G склеиванием вершин x_1 и x_2

2-этап. В графе G' склеиваем вершины x_3 и x_k. Получаем граф G'' (рис. 2.27), где вершина $x' = x_3 + x_k$.

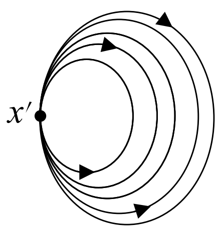


Рис. 2.27 – Граф G'' получен из графа G' склеиванием вершин x_3 и x_k

Выводы

Очевидно, поэтапное попарное склеивание вершин графа, принадлежащих одной и той же компоненте связности, не изменяет количества компонент связности.

Процедура склеивания вершин графа должна выполняться поэтапно для каждой пары вершин, из множества тех вершин, к которым можно применять данную процедуру. После каждого склеивания какой-либо пары вершин получается «новый» граф, в котором нарушен естественный порядок нумерации вершин, в силу того, что количество вершин в новом графе на одну меньше числа вершин в графе, из которого он получен, и появляется вершина с неопределённым номером.

Для восстановления естественной нумерации графа можно применить следующий способ.

Обозначим $|X|$ через n. Это число вершин графа $G^{(k)}$, полученного на k-й итерации склеивания вершин, где $k = 0, 1, \ldots, t$. Перенумеруем вершины графа G', полученного элементарной склейкой x_i и x_j, следующим способом.

Номера вершин, начиная с первого до $i - 1$, сохраняют свои значения. Номера вершин, начиная с $i + 1$ до $j - 1$, уменьшают свои значения на единицу, номера остальных вершин уменьшают значения на две единицы.

«Новой» вершине x' присваивается номер $(n - 1)$.

Так вершины графа G' (рис. 2.26) получат следующие номера: вершина x' — номер 2; вершина x_3 — номер 1. Единственная вершина x'' графа G'' (рис. 2.27) получит номер «1».

Если исходный граф $G(X, U)$ задан матрицей смежности, то значения элементов матрицы смежности нового графа G'', полученного в результате склеивания какой-либо пары вершин из множества X, можно получить, выполняя следующие вычисления.

Обозначим через $f(k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n - 2)$ старый номер вершины с новым номером k. Тогда матрица $\|a'_{ijk}\|$ нового графа строится по матрице $\|a_{ij}\|$ графа по формулам:

$$a'_{lk} = a_{f(l)f(k)} \quad (l, k \leqslant n - 2),$$

$$a'_{n-1k} = a_{if(k)} + a_{lf(k)} \quad (k \leqslant n - 2),$$

$$a'_{l,n-1} = a_{f(l)i} + a_{f(l)j} \quad (l \leqslant n - 2),$$

$$a'_{n-1,n-1} = a_{ii} + a_{ji} + a_{jj}.$$

Для графов G и G' имеем соответственно матрицы смежности A, A':

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}; \quad A' = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Процедура «склеивания» вершин графа продолжается до тех пор, пока это возможно. Если в матрице смежности полученного мультиграфа отличны от нуля лишь элементы, стоящие на главной диагонали, то число компонент связности исходного графа равно числу этих ненулевых элементов. Если же матрица смежности исходного графа становится вырожденной, то это означает, что граф содержит лишь одну компоненту связности.

Матрица смежности графа G'' (рис. 2.27), который получен из графа G (рис. 2.25) с помощью поэтапного применения операции склеивания вершин, является вырожденной, следовательно, граф G *содержит только одну компоненту связности*.

Выводы

Изложенный способ позволяет построить алгоритм для подсчёта числа компонент связности по матрице смежности «нового» графа, полученного на последней итерации процедуры склеивания вершин.

Алгоритм для вычисления числа компонент связности графа.

Шаг 1. Найти ненулевой элемент матрицы смежности, не стоящий на главной диагонали. Если он существует, перейти к шагу 2, если нет, то перейти к шагу 3.

Шаг 2. Произвести над матрицей операцию, отвечающую склейке вершин x_i и x_j, перейти к шагу 1.

Шаг 3. Подсчитать количество p строк матрицы, содержащих ненулевые элементы на главной диагонали. Результат: число компонент связности графа равно p.

Контрольные вопросы по главе 2

1. Способы задания графов.
2. Классификация графов.
3. Что определяет метрика графа?
4. Чему равно расстояние между вершинами в графе?
5. Компоненты связности графа (определение).
6. Маршрут в графе (определение). Способы вычисления длины маршрута в графе.
7. Определение связанного графа.
8. Понятие компоненты связанности графа.
9. Части графа.
10. Операции над графами. Унарные операции на графе: правило удаления вершин и рёбер в графе, стягивание вершин по ребру, замыкания вершин.
11. Раскраска графа. Правильная раскраска вершин и рёбер графа. Хроматическое число графа.
12. Вершинные характеристики графа.
13. Внешне устойчивое множество графа.
14. Внутренне устойчивое множество графа.

Глава 3

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ

3.1 Максимальное паросочетание в двудольном графе

Двудóльный граф, или ***биграф́***, — это математический термин теории графов. Обыкновенный граф $L = (X, U)$ называется двудольным (или биграфом), если множество его вершин X можно представить в виде двух непересекающихся подмножеств X' и X'' так, чтобы никакие вершины из одного и того же подмножества не были смежны, т. е.

$$X = X' \cup X''; \quad X' \cap X'' = \varnothing$$
$$\text{и } \forall x, y \in X\left[\widetilde{xy} \in U \Rightarrow \left(x \in X' \,\&\, y \in X''\right) \vee \left(x \in X'' \,\&\, y \in X'\right)\right].$$

Часто двудольный граф записывают в виде $L = (X', X'', U)$.

Матрица смежности двудольного графа полностью определяется своей прямоугольной подматрицей, строки которой отвечают вершинам множества X', а столбцы — X''.

Двудольный граф $K_m = (X, Y, W)$, в котором $|X| = |Y| = |W|$ и никакие два ребра не смежны, называется паросочетанием. Отображение Δ, которое каждой вершине множества X относит вершину множества Y, здесь является взаимно однозначным соответствием между этими множествами.

Одной из важных в прикладном отношении задач теории графов является задача нахождения наибольшего паросочетания, которая формулируется следующим образом: для данного графа L найти наибольшее натуральное число $m = \pi(L)$, при котором существует паросочетание K_m, являющееся частью L.

Если L — двудольный граф, то под его паросочетанием понимается часть $K_m = (Y', Y'', W')$, удовлетворяющая условию: $Y' \subseteq X' \mathbin{\&} Y'' \subseteq X''$ и $W' \; |Y'| = |Y''| = |W'|$, и для любых $w_j, w_i \in W'$ справедливо: $w_j \cap w_i = \varnothing$.

Определить $\pi(L)$ — это значит выяснить, какое наибольшее количество вершин множества X' можно взаимно однозначно отобразить в X'' при помощи рёбер из W.

. . . .

Теорема Кёнига—Орэ:

Все множество X' биграфа (X', X'', U) можно взаимно однозначно отобразить в X'' при помощи рёбер U тогда и только тогда, когда

$$\forall A \subseteq X' \big(|\Delta A| \geqslant |A|\big).$$

Здесь ΔA — подмножество вершин множества X', смежных с вершинами из A.

. . . .

. . . .

Свойством, лежащим в основе определения двудольного графа, может обладать любой, не только обыкновенный, граф. Именно, граф $L(X, U; P)$ называется бихроматическим (или двудольным), если множество X его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества так, чтобы никакие две вершины одного и того же подмножества были бы несмежны.

. . . .

Из определения бихроматического графа следует, что все его вершины можно раскрасить двумя цветами так, что смежные вершины будут покрашены в разные цвета.

Выводы

Очевидно, что граф является бихроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит петель, а его скелет есть двудольный граф.

. . . .

3.2 Венгерский алгоритм нахождения максимального паросочетания в двудольном графе

Венгерский алгоритм (авторы — Эгервари 1931, Кун 1953) предназначен для решения так называемых задач о назначении, которые в свою очередь в своем простейшем виде сводятся к нахождению наибольшего паросочетания у заданного двудольного графа.

Рассмотрим венгерский алгоритм на следующем примере.

Пример 3.1

Пусть имеется девять иностранных групп туристов $T_1, \ldots, T_9$, причем гости группы T_1 говорят на языке А, гости T_2 — на Б, T_3 — на В, T_4 — на А, T_5 — на Б, T_6 — на Г, T_7 — на Е, T_8 — на Г, T_9 — на Д; в свою очередь бюро «Интурист» располагает в данный момент десятью свободными переводчиками $П_1, \ldots, П_{10}$, владеющими такими иностранными языками: $П_1$ — языком (А,В); $П_2$ — (А,Г); $П_3$ — (А); $П_4$ — (Б,В,Е); $П_5$ — (А,В); $П_6$ — (А); $П_7$ — (Г,Д); $П_8$ — (Б,Д); $П_9$ — (Б,Г,Е); $П_{10}$ — (А,Б). Необходимо взаимно однозначно прикрепить переводчиков к группам, чтобы в первую очередь было обслужено возможно большее число групп.

Построим двудольный граф $L = (X_1, X_2, U)$ (рис. 3.1), в котором вершинам множества X_1 соответствуют переводчики $П_1, П_2, \ldots, П_{10}$, вершинам X_2 — группы туристов $T_1, T_2, \ldots, T_9$. Смежность вершины $П_i \in X_1$ с вершиной $T_i \in X_2$ означает владение i-го переводчика языком j-ой группы. Требуется найти в L паросочетание с наибольшим количеством $\pi(L)$ рёбер.

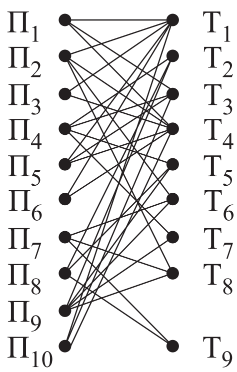


Рис. 3.1 – Двудольный граф $L = (X_1, X_2, U)$

Теорема Кёнига—Орэ позволяет вычислить наибольшее значение $\pi(L)$ паросочетания:

$$\pi(L) = |X_1| - \max\left(|A| - |\Delta A|\right),$$

где ΔA — подмножество вершин множества X_2, смежных с вершинами из $A \subseteq X_1$.

Для решения данной задачи представим граф L (рис. 3.1) матрицей смежности $B = (b_{ij})$ (табл. 3.1).

Строки матрицы B соответствуют элементам множества X_1 (переводчики), столбцы — элементам множества X_2 (туристы).

Элементы $b_{ij} = \{0, 1\}$; $b_{ij} = 1$, если i-й переводчик может обслуживать j-ю группу туристов, $b_{ij} = 0$, в противном случае.

Таблица 3.1 – Матрица смежности графа L

B	Т$_1$	Т$_2$	Т$_3$	Т$_4$	Т$_5$	Т$_6$	Т$_7$	Т$_8$	Т$_9$
П$_1$	1		1	1					
П$_2$	1			1		1		1	
П$_3$	1			1					
П$_4$		1	1		1		1		
П$_5$	1		1	1					
П$_6$	1			1					
П$_7$						1		1	1
П$_8$		1			1				1
П$_9$		1			1	1	1	1	
П$_{10}$	1		1	1					

Алгоритм решения состоит в следующем. Пусть некоторое паросочетание $K = (Y_1, Y_2, V)$ уже построено (в начальный момент это пустое паросочетание, $V = \varnothing$). Ребра графа L, принадлежащие V, назовем «сильными», а ребра из $U\backslash V$ — «слабыми». Вершину, инцидентную сильному ребру, будем называть насыщенной, а вершину, не инцидентную сильному ребру, — ненасыщенной.

Под «чередующейся цепью» будем понимать простую цепь, в которой слабые рёбра строго чередуются с сильными; такую цепь назовем тонкой. Примем, что её длина отрицательна, если начальная и конечная вершины — обе ненасыщенные.

Ясно, что при наличии у графа L с заданным паросочетанием K хотя бы одной тонкой чередующейся цепи Q можно вместо K построить новое паросочетание K', содержащее на одно ребро больше. Для этого надо все слабые ребра цепи Q сделать сильными, а сильные — слабыми, не трогая рёбер вне Q. Иначе говоря, надо удалить из множества V все те рёбра, которые принадлежат цепи Q, и к остатку добавить рёбра Q, принадлежащие $U\backslash V$. В свою очередь, если у графа L с паросочетанием K' опять есть тонкая чередующаяся цепь, то аналогично предыдущему можно получить паросочетание K'', имеющее уже на два ребра больше исходного.

Оказывается, что если на каком-то этапе тонких чередующихся цепей больше нет, то полученное паросочетание K^* — наибольшее, т. е. содержит ровно $\pi(L)$ ребер.

Процедура поиска тонкой чередующейся цепи в графе с заданным паросочетанием состоит в следующем: выбираем в X_1 любую ненасыщенную вершину и строим из нее чередующуюся цепь, отмечая штрихом пройденные рёбра и не выбирая их в дальнейшем. Попав в уже пройденную вершину или такую вершину из X_1, которая не инцидентна ни одному еще не пройденному слабому ребру, возвращаемся на один шаг, отмечаем ребро вторым штрихом и пытаемся проложить чередующуюся цепь иначе и т. д. В результате процесс либо оборвется в ненасыщенной вершине множества X_2 и мы получим искомую цепь (она состоит из рёбер, отмеченных ровно одним штрихом), либо этот процесс приведёт нас в исходную вершину и тогда надо начать аналогичный поиск с другой ненасыщенной вершины множества X_1.

В нашем конкретном примере всё решение выглядит следующим образом.

1. Задаём произвольно паросочетание $K = \{(\text{П}_3\text{Т}_1),\ (\text{П}_2\text{Т}_4)\}$.

2. Фиксируем насыщенные вершины — $П_3, П_2$ и $Т_1, Т_4$.
3. Строим тонкую чередующуюся цепь Q: $П_1 - Т_1 - П_3 - Т_4 - П_2 - Т_8$, которая начинается и заканчивается в ненасыщенных вершинах $П_1$ и $Т_8$ и содержит сильные рёбра $(П_3 - Т_1)$ и $(П_2 - Т_4)$.
4. Переименуем рёбра построенной тонкой цепи: теперь рёбра $(П_3 - Т_1)$ и $(П_2 - Т_4)$ — слабые, а рёбра $(П_1 - Т_1), (П_3 - Т_4), (П_2 - Т_8)$ соответственно стали сильными, вершины $П_1, Т_8$ — насыщенные. Новое паросочетание K' содержит уже три ребра.
5. Находим в графе новые ненасыщенные вершины $Т_3$ и $П_7$, которые смежны насыщенным концевым вершинам построенной тонкой цепи
$$П_1 - Т_1 - П_3 - Т_4 - П_2 - Т_8.$$
6. Строим новую тонкую чередующуюся цепь Q: $Т_3 - П_1 - Т_1 - П_3 - Т_4 - П_2 - Т_8 - П_7$, которая содержит сильные рёбра $(П_1 - Т_1), (П_3 - Т_4), (П_2 - Т_8)$.
7. Переименуем рёбра построенной тонкой чередующейся цепи: теперь рёбра $(П_1 - Т_1), (П_3 - Т_4), (П_2 - Т_8)$ — слабые, а рёбра $(Т_3 - П_1), (Т_1 - П_3), (Т_4 - П_2), (Т_8 - П_7)$ — сильные. Новое паросочетание K'' содержит уже четыре ребра.
8. Присоединим к построенной тонкой чередующейся цепи $Т_3 - П_1 - Т_1 - П_3 - Т_4 - П_2 - Т_8 - П_7$ ещё два ребра: $(Т_3 - П_4)$ и $(П_7 - Т_6)$ и над новой чередующейся цепью $Q = П_4 - Т_3 - П_1 - Т_1 - П_3 - Т_4 - П_2 - Т_8 - П_7 - Т_6$ выполним преобразование, аналогичное тому, которое описано в п.п. 4–7, увеличив таким образом паросочетание K'' ещё на одно ребро. Новое паросочетание K_v включает сильные рёбра — $(П_4, Т_3), (П_1, Т_1), (П_3, Т_4), (П_2, Т_8), (П_7, Т_6)$.

Увеличить длину построенной цепи Q, проходящей через вершины $П_4, Т_3, П_1, Т_1, П_3, Т_4, П_2, Т_8, П_7, Т_6$, нельзя, так как среди ненасыщенных вершин из множества $X \backslash V$, принадлежащих разным подмножествам (X_1, X_2), нет инцидентных концевым вершинам цепи Q.

Увеличить построенное паросочетание K_v можно добавлением к нему цепей длины, равной 1, т. е. рёбер $(П_8, Т_9)$ и $(П_9, Т_5)$ или $(П_9, Т_7)$ и $(П_8, Т_9)$. Тогда количество рёбер $\pi(L)$ паросочетания K_v станет равно 7.

$$Q = П_4, Т_3, П_1, Т_1, П_3, Т_4, П_2, Т_8, П_7, Т_6, П_9, Т_5, П_8, Т_2 \text{ (табл. 3.2)}.$$

В таблице 3.2 показана матрица смежности B графа L, где знаком «+» помечены насыщенные вершины графа и элементы b_{ij}, соответствующие сильному ребру, т. е. ребру паросочетания K_v, значком «*» помечены концевые вершины чередующейся цепи Q, знаком «–» помечены элементы b_{ij}, соответствующие слабому ребру, т. е. ребру, которое не входит в паросочетания K_v.

Из матрицы видно, что увеличить построенное паросочетание нельзя, так как оставшиеся ненасыщенные вершины инцидентны разным рёбрам.

Однако согласно теореме Кёнига–Холла для данного графа $\pi(L) = 8$. Действительно, если мы в построенной тонкой чередующейся цепи Q ребро $(П_4, Т_3)$ заменим ребром $(П_5, Т_3)$, то сможем построить другую чередующуюся цепь Q, которая проходит через вершины $П_5, Т_3, П_1, Т_1, П_6, Т_4, П_2, Т_6, П_7, Т_8, П_9, Т_5$ (табл. 3.3, рис. 3.2).

Таблица 3.2 – Матрица смежности B графа L

	T_1+	T_2^*	T_3+	T_4+	T_5+	T_6^*	T_7	T_8+	T_9
$П_1+$	1+		1−	1					
$П_2+$	1			1−		1		1+	
$П_3+$	1−			1+					
$П_4^*$		1	1+		1		1		
$П_5$	1		1	1					
$П_6$	1			1					
$П_7+$						1+		1−	1
$П_8+$		1+			1−				1
$П_9+$		1			1+	1−	1	1	
$П_{10}$	1			1					

Таблица 3.3 – Матрица смежности B графа L

B	T_1+	T_2^*	T_3+	T_4+	T_5+	T_6^*	T_7	T_8+	T_9
$П_1$	1+		1−	1					
$П_2$	1			1−		1+		1	
$П_3$	1			1					
$П_4$		1	1		1		1		
$П_5^*$	1		1+	1					
$П_6$	1−			1+					
$П_7$						1−		1+	1

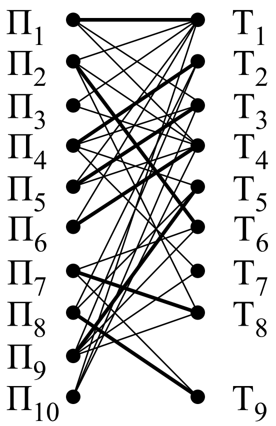


Рис. 3.2 – Наибольшее паросочетание K_v, выделенное в двудольном графе $L = (X_1, X_2, U)$

Из матрицы B (табл. 3.3) видно, что увеличить тонкую чередующуюся цепь Q нельзя, но в графе остались ненасыщенные вершины, инцидентные одному и тому же ребру, которые можно добавить к искомому паросочетанию K_v.

Это рёбра $(П_8, T_9)$, $(П_4, T_2)$.

. . . .

Выводы

В результате получаем наибольшее паросочетание K_{ν} (рис. 3.2), в которое входят рёбра: $(\text{П}_5,\text{Т}_3),(\text{П}_1,\text{Т}_1),(\text{П}_6,\text{Т}_4),(\text{П}_2,\text{Т}_6),(\text{П}_7,\text{Т}_8),(\text{П}_9,\text{Т}_5),(\text{П}_8,\text{Т}_9),(\text{П}_4,\text{Т}_2)$.

На рисунке 3.2 рёбра искомого наибольшего паросочетания K_{ν} обозначены жирными линиями.

3.3 Оптимальные потоки в транспортных/информационных сетях

Теория транспортных и информационных сетей возникла при решении задач, связанных с организацией перевозки грузов и передачей информации. Тем не менее понятие потока на транспортной сети и алгоритм нахождения потока наибольшей величины, критерий существования потока, насыщающего выходные дуги сети, оказались плодотворными для многих других прикладных и теоретических вопросов комбинаторного характера.

Введём основные понятия теории.

Сетью называется ориентированный связный граф $G=(V,U)$, в котором отсутствуют петли и существует одна и только одна вершина $v_0\in V$, такая, что множество $\Gamma^{-1}v_0=\varnothing$, т. е. степень захода вершины v_0 равна 0, и существует одна и только одна вершина $z\in V$, такая, что множество $\Gamma z=\varnothing$, т. е. степень исхода вершины z равна 0. Вершина v_0 называется истоком (вход) сети, вершина z называется — стоком (выход) сети.

Каждой дуге $u\in U$ сети сопоставлено целое положительное число $c(u)$, которое называется пропускной способностью дуги.

Пусть U_v^- — множество дуг, заходящих в вершину v, а U_v^+ — множество дуг, выходящих из вершины v. Целочисленная неотрицательная функция $\varphi(u)$, определенная на множестве U дуг графа G, называется ***потоком***, если она удовлетворяет следующим требованиям:

$$\sum_{u\in U_v^-}\varphi(u)=\sum_{u\in U_v^+}\varphi(u)\ \ (v\neq v_0,\ v\neq z),$$

$$\text{для всех } v\in V\backslash\{v_0,z\};\quad \text{для всех } u\in U.$$

Задача о максимальном потоке.

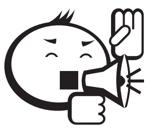
Группу задач топологического анализа составляют задачи на распределение сетевых потоков. Это задача о максимальном потоке, в содержание которой оказываются взаимосвязанными топология сети, пропускные способности каналов связи или транспортных коммуникаций и распределение сетевых потоков. Подбирая определенным образом значение сетевых потоков и исходя из заданного распределения пропускных способностей каналов, можно получить единственно возможное максимальное для заданной топологии значение общего суммарного потока в сети. В этом случае, очевидно, ресурсы сетевой связи используются наиболее полно и эффективно.

Задача о максимальном потоке формулируется следующим образом: пусть задано исходное распределение потоков по дугам графа, отображающего топологическую структуру сети, а также пропускные способности дуг. Необходимо найти максимально возможное для данной сети значение суммарного потока между источниками и стоками, т. е. определить, как увеличить поток, если он не достиг этого значения. Применительно к рассматриваемой задаче используется одно из важных положений теории потоков, которое сформулировано и доказано в виде теоремы Фордом и Фалкерсоном. Согласно этой теореме максимально возможное значение суммарного потока на конечных дугах равно минимальной пропускной способности выбранного разреза. При этом под пропускной способностью разреза понимается сумма пропускных способностей дуг, образующих разрез.

В символической форме записи соотношение, отражающее содержание теоремы Форда—Фалкерсона, выглядит следующим образом:

$$\sum_{i \in B} \sum_{j \in \widetilde{B}} \varphi(v_i, v_j) = \sum_{i \in B} \sum_{j \in \widetilde{B}} c(v_i, v_j),$$

где $\varphi(v_i, v_j)$ — значение потока по дугам заданного графа; $c(v_i, v_j)$ — пропускная способность дуги; B — множество вершин подграфа, образующих разрез; $\widetilde{B}$ — дополнение множества B до множества V.



Множество B вершин подграфа, образующих разрез всегда содержит вершину z (сток) и никогда не содержит вершину v_0 (исток).

Разрез $R(G)$ сети включает множество дуг $U' \subset U$ сети, исходящих из вершин множества $\widetilde{B}$ и входящих в вершины множества B.

Доказательство теоремы Форда—Фалкерсона строится методом от противного на следующих предположениях: граф имеет две характерные вершины — исток и сток, а разрез $R(G)$ вершины графа делит на два взаимодополняющих множества B и $\widetilde{B}$.

Допустим, что на графе задан максимальный поток Ф, а сток z не отделен от множества вершин B разрезом, т. е. $z \in B$. Тогда из определения разреза и при данном условии следует, что существует хотя бы один путь из истока v_0 в сток — вершину z, для которого должны выполняться условия:

- для прямых дуг пути $(v_0 - z) : — \varphi(v_i, v_j) < c(v_i, v_j)$;
- для обратных дуг пути $(v_0 - z) : — \varphi(v_i, v_j) > 0$.

Это свидетельствует о том, что поток на сети не является максимальным и его величину можно увеличить, насыщая отдельные дуги по путям, идущим от истока к стоку.

Иначе, если задан разрез, то он своими дугами однозначно определяет максимально возможный, проходящий через них поток. Очевидно, разрез $(v_0 - z)$ минимальной общей пропускной способностью дуг задает максимально возможный для данного графа поток от истока v_0 к стоку z.

Алгоритм Форда—Фалкерсона.

Для транспортной/информационной сети важно найти такие минимальные разрезы и оценить соответствующие им значения максимального потока. Это можно осуществить с помощью алгоритма Форда—Фалкерсона.

Принцип, лежащий в основе алгоритма Форда—Фалкерсона, заключается в том, чтобы найти все возможные насыщенные пути (цепи), ведущие от v_0 к z.

С этой целью последовательно, начиная с вершины x_0, просматриваются сначала все смежные ей $\{v_i\}$ вершины. Из множества дуг $\{(v_0, v_i)\}$, соединяющих v_0 с $\{v_i\}$, выбирают одну, у которой значение потока ближе всех подходит к значению насыщения. Помечают вершину v_i знаком, показывающим, что она была просмотрена, и приписывают ей величину δ, на которую можно увеличить поток по дуге, ведущей в эту вершину. Затем просматривают все последующие смежные с v_i вершины $\{v_j\}$ и останавливаются на той, в которую ведёт дуга с потоком, ближайшим к значению насыщения. По этой дуге переходят в соответствующую вершину v_j. Делают пометки вершин и идут далее в направлении вершины z. Если путь, на котором будут отмечены все пройденные вершины, приведёт в вершину z, то это говорит о том, что найден один из путей, наиболее близкий к насыщению. Нужно довести поток по нему до насыщения, увеличивая тем самым поток на графе. Значение, на которое можно увеличить поток, находится как минимальное δ из множества отмеченных значений в пройденных по данному пути вершинах. Для выяснения вопроса, является ли полученный таким образом поток максимальным или нет, необходимо просмотреть все другие возможные пути, ведущие от x_0 к z. Для этого необходимо возвратиться в x_0 и повторить описанные выше действия, но идти следует по еще не помеченным вершинам. В результате выполнения этих действий можно столкнуться с двумя вариантами:

1) пройденный путь снова приводит от x_0 к z, т. е. удается найти ненасыщенные пути и, значит, можно увеличить потоки на их дугах;
2) придя в некоторую вершину, обнаружить, что все смежные с ней вершины помечены и, следовательно, больше путей, ведущих к z, нет. Это указывает на то, что на сети G получен максимальный поток.

Согласно теореме Форда и Фалкерсона значение полученного максимального потока можно вычислить, выделив дуги разреза $R(G)$ с минимальной пропускной способностью и просуммировав их пропускные способности.

Пример 3.2

Пример решения задачи о максимальном потоке с помощью алгоритма Форда—Фалкерсона

Пусть задана сеть $G = (X, U)$ (рис. 3.3), на дугах u_{ij} которой в скобках обозначены значения пропускных способностей дуг — $c(u)$.

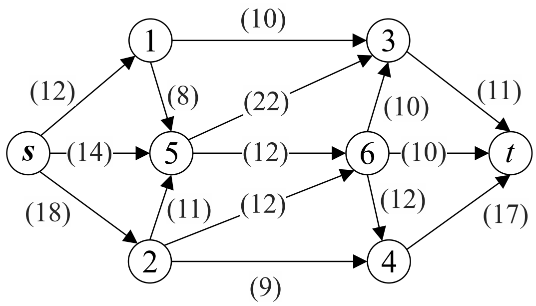


Рис. 3.3 – Сеть G

1. Зададим на сети нулевой поток (на всех дугах величина потока φ_{ij} равна 0). Нулевой поток — это начальный допустимый поток на сети. Значение потока на каждой дуге u_{ij} будем указывать за скобками пропускной способности дуги: $c(u_{ij})\varphi(u_{ij})$. Значение потока, равное «0», не указываем.

2. Выбираем на сети (произвольно) путь, ведущий из вершины s в вершину t: $s \to 1 \to 5 \to 6 \to t$ (рис. 3.4).

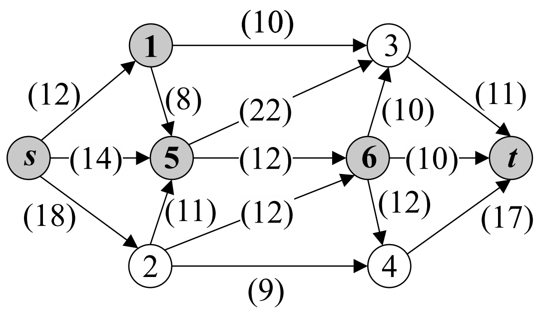


Рис. 3.4 – Сеть G

3. Вычисляем значения $\{\delta_{ij} = c(u_{ij}) - \varphi(u_{ij})\}$ на каждой дуге пути: $s \to 1 \to$ $\to 5 \to 6 \to t$ и выбираем минимальное из них. $\min\delta_{ij} = 8$ (так как $\varphi(u_{ij}) = 0$ на всех дугах данного пути). На величину $\min\delta_{ij} = 8$ увеличиваем поток на каждой дуге пути $s \to 1 \to 5 \to 6 \to t$. Дуга (1,5) становится «насыщенной», так как поток на ней стал равен 8 (рис. 3.5).

4. Выбираем следующий путь, ведущий из s в t: $s \to 1 \to 3 \to t$ (рис. 3.6), и для него вычисляем значение $\min\delta_{ij}$ (аналогично тому, как это делалось в п. 3). $\min\delta_{ij} = 4$.

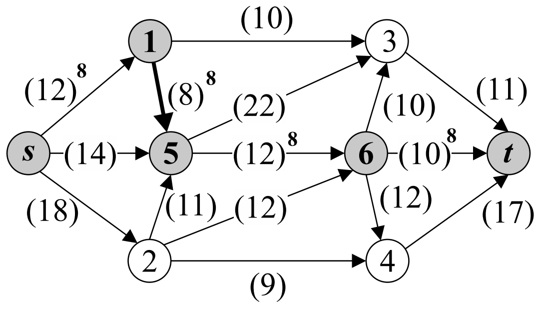


Рис. 3.5 – Сеть G

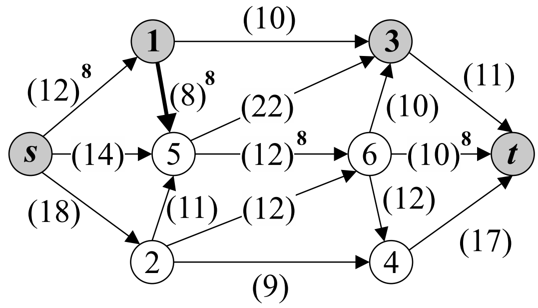


Рис. 3.6 – Сеть G

Увеличиваем величину потока на каждой дуге пути $s \to 1 \to 3 \to t$ на 4. Отмечаем насыщенную дугу $(s,1)$ (рис. 3.7).

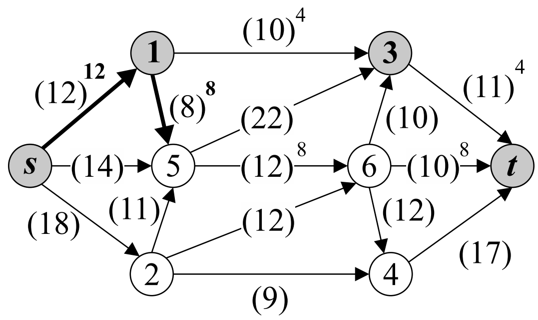


Рис. 3.7 – Сеть G

5. Выбираем следующий путь, ведущий из s в t: $s \to 5 \to 6 \to t$ (рис. 3.8).

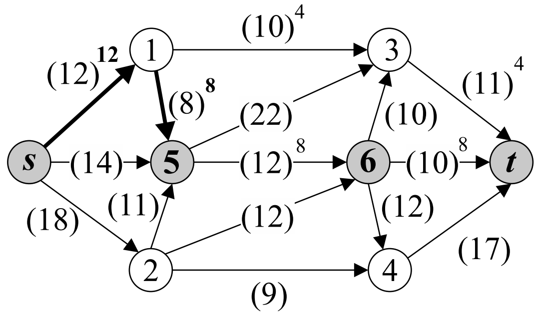


Рис. 3.8 – Сеть G

Увеличиваем величину потока на каждой дуге пути $s \to 5 \to 6 \to t$.
Насыщенной становится дуга $(6, t)$ (рис. 3.9).

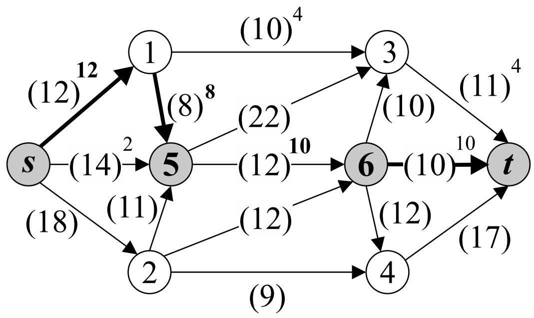


Рис. 3.9 – Сеть G

6. Дальнейшие аналогичные действия, связанные с увеличением потока на сети, отражены на рисунках 3.10–3.18. Все оставшиеся вычисления и выкладки предлагается провести самостоятельно в качестве упражнения.

Для однозначности, отметим лишь последовательность рассматриваемых путей: $s \to 5 \to 3 \to t$ (рис. 3.10–3.12); $s \to 2 \to 6 \to 4 \to t$ (рис. 3.13–3.14); $s \to 2 \to 4 \to t$ (рис. 3.15–3.18).

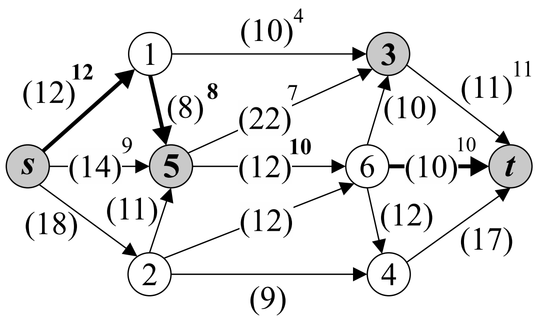


Рис. 3.10 – Сеть G

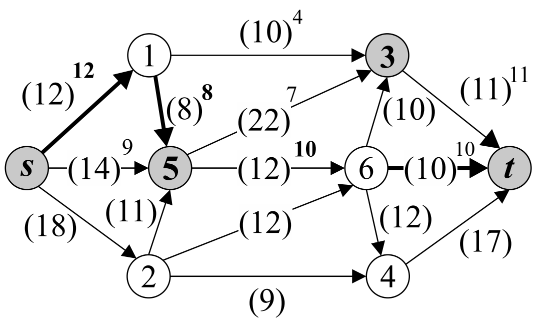


Рис. 3.11 – Сеть G

Путь $s \to 2 \to 6 \to 4 \to t$ (рис. 3.13–3.14).
Путь $s \to 2 \to 4 \to t$ (рис. 3.15–3.18).

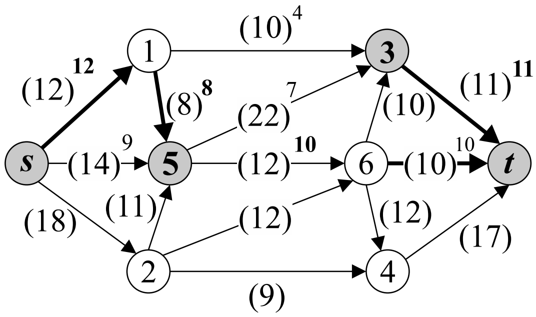


Рис. 3.12 – Сеть *G*

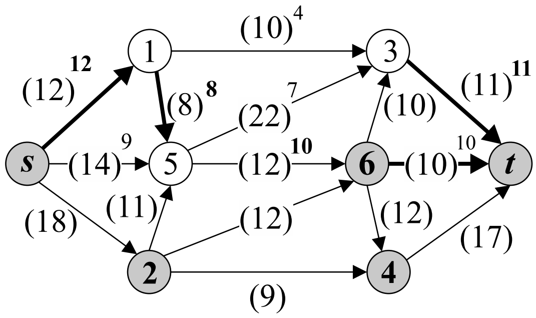


Рис. 3.13 – Сеть *G*

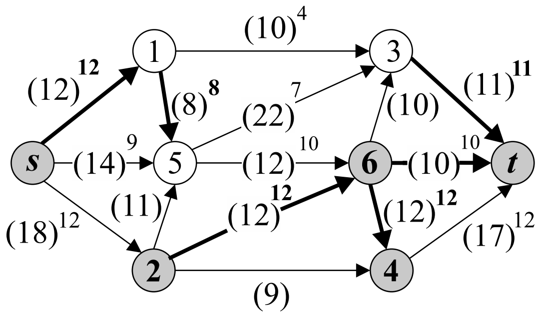


Рис. 3.14 – Сеть *G*

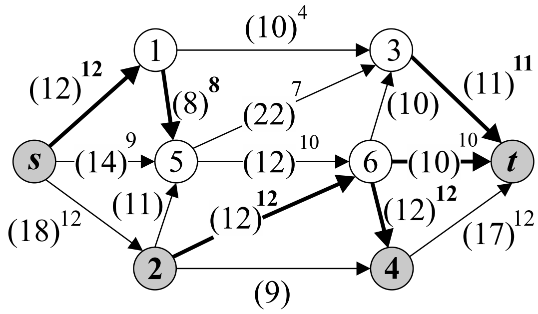


Рис. 3.15 – Сеть *G*

7. Выполнив действия, связанные с увеличением допустимого потока в сети от вершины *s* к вершине *t*, переходим к построению минимального разреза сети *T*.

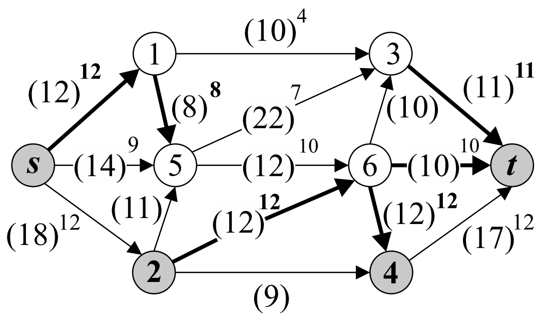


Рис. 3.16 – Сеть G

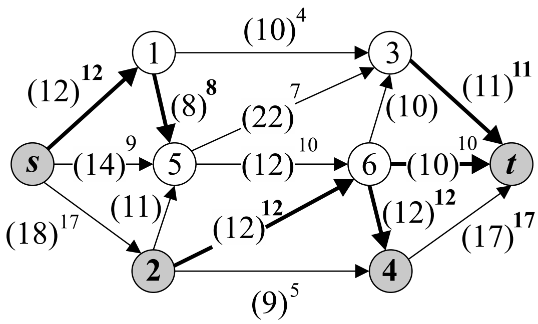


Рис. 3.17 – Сеть G

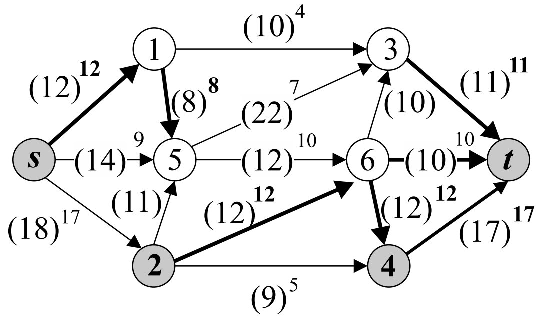


Рис. 3.18 – Сеть G

Алгоритм нахождения минимального разреза сети.

Процедура «пометок вершин».

Начальное состояние: все вершины не имеют пометок.

Вершине s приписывается пометка.

Всем вершинам $x_i \in \{\Gamma_s\}$, для которых дуга (s, x_i) не насыщена: $c_{si} > \varphi_{si}$ присваиваются пометки.

Всем вершинам $x_k \in \{\Gamma_{xi}\}$, для которых дуга (x_i, x_k) не насыщена: $c_{ij} > \varphi_{ij}$ присваиваются пометки.

В ходе присвоения пометок вершинам сети возможны две ситуации:

1. Удалось присвоить пометку вершине t, из чего следует, что в сети есть путь от вершины s к вершине t, все дуги которого не насыщены. Следовательно,

поток на сети может быть увеличен за счёт его увеличения на пути $s,\ldots,t$ (с помощью рассмотренного выше алгоритма).

2. Не удалось присвоить пометку вершине t. Следовательно, на сети получен максимальный поток и для его вычисления возможно построить минимальный разрез.

На рисунке 3.19 приведён результат пометок вершин для рассматриваемой сети:

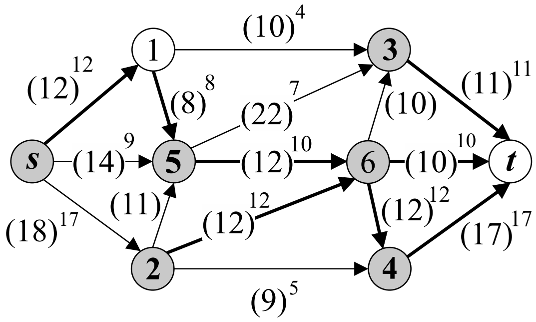


Рис. 3.19 – Сеть G

Определение дуг минимального разреза.

По результату алгоритма пометок, когда невозможно пометить вершину t (сток), определяем дуги минимального разреза: это дуги, начала которых находятся в помеченных вершинах, а концы — в непомеченных вершинах.

В нашем примере это дуги $u_{s,1}$; $u_{5,6}$; $u_{2,6}$; $u_{3,t}$; $u_{4,t}$ (см. рис. 3.20).

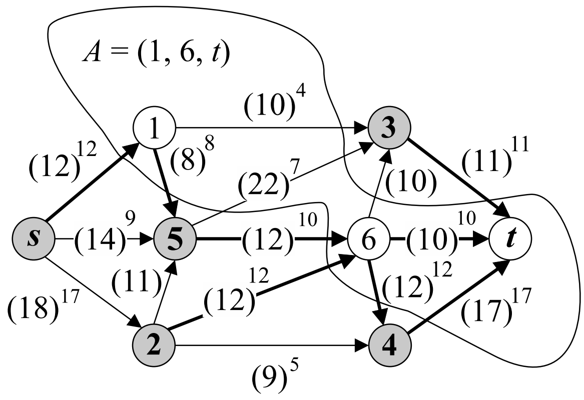


Рис. 3.20 – Сеть G

Таким образом, минимальный разрез данной сети $T = (u_{s,1};\ u_{5,6};\ u_{2,6};\ u_{3,t};\ u_{4,t})$.
Вычисление величины максимального потока $\Phi_{\max}$:

$$\Phi_{\max} = c_{s,1} + c_{5,6} + c_{4,t} + c_{2,6} + c_{3,t} = 12 + 10 + 17 + 12 + 11 = 62.$$

Допустимый поток максимальной величины на заданной сети G — найден.

Контрольные вопросы по главе 3

1. Определение двудольного графа.
2. Определение бихроматического графа.
3. Какой граф называется «паросочетанием»?
4. Свойства бихроматических графов.
5. Какие графы являются 1-хроматическими?
6. Определение транспортной сети.
7. Что является ограничением потока в транспортной сети?
8. Чему равна величина максимального потока в транспортной сети?

Глава 4

ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

4.1 Переключательные функции. Способы задания

Переключательной функцией (ПФ) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется однозначное отображение вектора $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, каждая переменная x_i $(x_i \in X)$ которого принимает значение из множества $\{0, 1, \ldots, k_i - 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ в множество f, $f \in \{0, 1, \ldots, k_f - 1\}$.

В случае если $k_1 = k_2 = \ldots = k_i = \ldots = k_n = k_f = k$, получаем определение k-значной функции; в пределе, когда $k = 2$ — определение булевой функции.

ПФ можно задавать:

- табличным способом;
- теоретико-графовым;
- аналитическим способом.

Табличными способами являются одномерные и двумерные таблицы. Одномерная таблица, определяющая функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеет размеры:

$$\prod_{i=1}^{n} k_i \times (n+1),$$

где $\prod_{i=1}^{n} k_i$ — количество строк, которые взаимно однозначно соответствуют векторам $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $(n+1)$ — количество столбцов; из них n столбцов взаимно однозначно соответствуют предметным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $(n+1)$-й столбец — функциональной переменной f.

Пример 4.1

Пусть $x_1 \in \{0,1,2\}$; $x_2 \in \{0,1\}$; $x_3 \in \{0,1\}$; $f \in \{0,1,2,3\}$. Определим переключательную функцию с помощью одномерной таблицы 4.1.

Таблица 4.1 – ПФ $-f(x_1, x_2, x_3)$

	x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
1	0	0	0	3
2	0	0	1	3
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	2
6	1	0	1	3
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1
9	2	0	0	1
10	2	0	1	1
11	2	1	0	0
12	2	1	1	3

Мощность $P(x_1, x_2, \ldots, x_n, f)$ переключательных функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n, f) = K_f^{\prod_{i=1}^{n} k_i}.$$

Пусть: если $\forall x_i \in \{0,1\}$ — то для $i = \overline{1,2}$ количество наборов: $2^2 = 4$, количество (мощность) функций: $2^{2^2} = 16$.

Двумерная таблица, определяющая переключательную функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, строится в результате разбиения переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на два подмножества: подмножество строчных переменных X_a и подмножество столбцевых переменных X_b; в клетке (i,j) записывается соответствующее значение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Такие таблицы называют *таблицами Вейча*.

Для примера 4.1 таблица Вейча для функции f имеет вид (табл. 4.2):

Таблица 4.2 – Таблица Вейча для ПФ $f(x_1, x_2, x_3)$

x_1	x_2x_3			
	00	01	10	11
0	3	3	1	0
1	2	3	0	1
2	1	1	0	3

При теоретико-графовом задании переключательной функции используются категории (классы):

- мографа $G^M(f)$ (модельный граф),
- гиперграфа $H_B(f)$,
- графа Кёнига $K(f)$,
- гиперкуба $H(f)$.

Рассмотрим их.

Задание переключательной функции мографом.

Задание переключательной функции мографом $G^M(f)$ связано с одномерной таблицей (см. табл. 4.1).

Каждая вершина v_i мографа взаимно однозначно соответствует первичному терму $v_i \leftrightarrow x_i^\sigma$, $\sigma_i = 0, 1$; f_j^σ, $\sigma_j = 0, 1, 2$.

Взаимно однозначно идентифицируем строки одномерной таблицы $0\ldots00, 0\ldots01, \ldots$ как $1, 2, 3, \ldots, 12$.

Вершина f^k соединяется с вершиной x_i^k, если f^k и x_i^k входят в одинаковые наборы.

Пример 4.2

Задание переключательной функции $f(x_1, x_2, x_3)$ мографом (рис. 4.1):

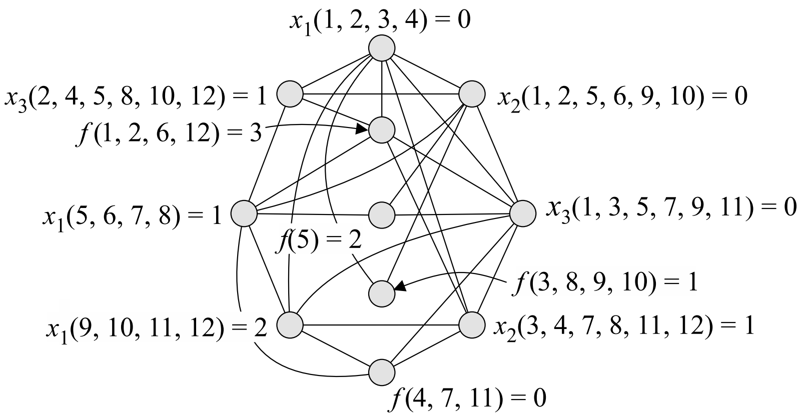


Рис. 4.1 – Мограф переключательной функции $f(x_1, x_2, x_3)$

Задание переключательной функции гиперграфом.

Гиперграф $H_B(f)$, задающий функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, по существу является диаграммой Эйлера.

Пример 4.3

Фрагмент гиперграфа $H_B(f)$, определяющий первые два значения рассмотренной выше функции $f(x_1,x_2,x_3)$ (табл. 4.1), представлен на рисунке 4.2.

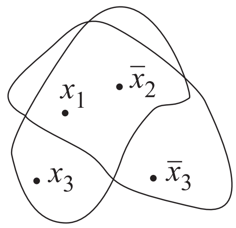


Рис. 4.2 – Фрагмент гиперграфа $H_B(f)$

Очевидно, что при большом числе строк соответствующей одномерной таблицы геометрическое представление гиперграфа функции не обеспечивает должной наглядности. В этом случае его целесообразнее представлять модифицированной матрицей инциденций.

Задание переключательной функции гиперкубом.

Гиперкуб $H(f)$ — каждый вектор X функции $f(x)$ взаимно однозначно сопоставляется вершине гиперкуба, и две вершины смежны, если соответствующие им векторы отличаются в одном и только одном разряде ровно на 1.

Значение переменной называют *фазой*.

Каждая вершина гиперкуба взвешена значением функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

В i-м ярусе, если счёт начинать с «0», будут векторы, сумма фаз переменных которых равна i. Для рассматриваемой функции $f(x_1,x_2,x_3)$ гиперкуб $H(f)$ представлен на рисунке 4.3.

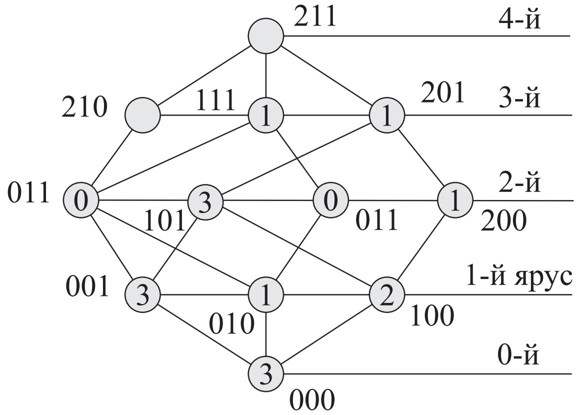


Рис. 4.3 – Гиперграф ПФ $f(x_1,x_2,x_3)$, таблица 4.1

Количество вершин в каждом ярусе можно подсчитать по формуле (4.1)[1]:

$$\sum_i \left(n_j! \cdot \left(\prod_{\sum l_i = 2} n(l_i)! \right)^{-1} \right)_j . \tag{4.1}$$

Так, количество вершин во втором ярусе равно: n_j — количество разрядов, в которых могут встречаться символы 1,1; $n_j = 3$, $n(l_i) = 2$ (так как «1» встречается сразу в двух разрядах). Символ «2» может встречаться только в одном разряде — $n_j = 1$, $n(l_i) = 1$ ($n(l_i)$ — количество символов). Отсюда имеем:

$$3! \cdot (2!)^{-1} + 1! \cdot (1!)^{-1} = 3 + 1 = 4.$$

Рассчитаем количество вершин в первом ярусе. Первому ярусу соответствуют вершины, которые взвешены значениями функции $f(x_1, x_2, x_3) = \{3, 1, 2\}$.

Выпишем из таблицы 4.1 вектора, соответствующие этим значениям:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3 \ \{(000),\ (001),\ (101),\ (211)\}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \ \{(010),\ (111),\ (200),\ (201)\}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2 \ \{(100)\}$$

Применяя формулу (4.1), учитываем, что вектора вершин смежных должны отличаться только в одном разряде и всего на «1» и сумма фаз переменных векторов равна i (i — номер фазы; фаза — это значение переменной).

Определяем данные для формулы (4.1):

$$\sum_i \left(n_j! \left(\prod n(l_i)! \right)^{-1} \right),$$

$i = 1$, $n_j = 3$ (так как кортеж имеет длину $l = 3$ — количество разрядов, в которых встречается «1»); каждый разряд содержит только «1», которая может повторяться $n(l_i)$ раз; $n(l_i) = 2$ («1» только в одном разряде).

Будем размещать символы 0,0 в $n_j = 3$ разрядах. Тогда $n(l_i) = 2$. Теперь количество вершин определяется по формуле:

$$\sum_i \left(n_j! \left(\prod n(l_i)! \right)^{-1} \right) = \left(n_j! \left(\prod n(l_i)! \right)^{-1} \right) = 3! \cdot (2!)^{-1} = 3,$$

так как $i = 1$, то число вершин первого яруса равно 3 ($i = 1$, так как рассматриваем только одну комбинацию символов: «0,0»).

Количество вершин третьего яруса:

- символ «2» — в одном разряде, $n_j = 1$, $n(l_i) = 1$;
- символ «0,1» — в двух разрядах, $n_j = 2$, $n(l_i) = 2$;
- символ «1,1,1» — один раз;
- $\sum_{i=3} \left(n_2! \left(n(l_i)! \right)^{-1} \right) = 1! \cdot (1!)^{-1} + 2! \cdot (2!)^{-1} + 1 = 3.$

[1] Количество размещений из n по l элементов с повторениями.

Задание переключательной функции графом Кёнига.

Для задания ПФ графом Кёнига используется таблица Вейча (табл. 4.2).

Каждая вершина яруса взаимно однозначно сопоставляется вектору, определяемому соответствующими переменными.

Ребро, соединяющее вершину одного яруса с вершиной другого, соответствует вектору $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который определяет значение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для геометрического отображения значения функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ каждому ребру поставим в соответствие число-значение, которое принимает $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на соответствующем наборе значений переменных.

Для рассматриваемой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ граф Кёнига представлен на рисунке 4.4.

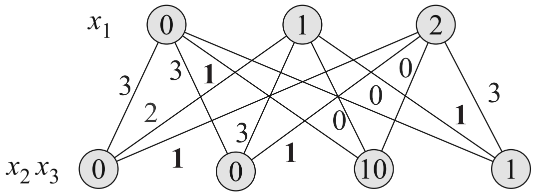
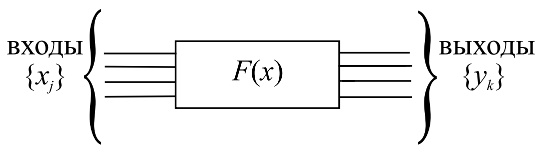


Рис. 4.4 – Граф Кёнига

4.2 Булевы функции (БФ)

1. ***Булева функция*** — это функция, аргументы которой и сама функция принимают значения на множестве $B = \{0, 1\}$, элементами которого являются формальные символы 1 и 0, интерпретируемые как «да» и «нет».

2. ***Булева функция*** — это математическая модель дискретных устройств переработки информации:



- На вход устройства подаётся одна комбинация, которой закодирована некоторая информация, на выходе получают другую комбинацию.
- Количество наборов комбинаций переменных — 2^n, где n — число переменных.
- Количество различных БФ — 2^{2^n}.

Множество всех булевых функций одной переменной представлено в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Булевы функции одного аргумента

x	БФ(0)	БФ(x)	БФ($\overline{x}$)	БФ(1)
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	f_0	f_1	f_2	f_3

Булева функция иначе называется *логической функцией* или *переключательной функцией*. БФ можно задавать теми же способами, что и любую переключательную функцию.

4.3 Аналитическое представление булевых функций

Логическая функция может быть задана формулой, содержащей символы переменных, знаки операций и скобки, либо суперпозицией, содержащей вместо переменных функции, определяющие их.

Логическая функция может быть задана эквивалентными формулами.

Например:

$$f_8 : x_1 \downarrow x_2 \text{ (функция Пирса)}, \quad f_8 = \overline{x_1 \vee x_2} \quad \text{или} \quad f_8 = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2;$$

$$f_{14} : x_1 | x_2 \text{ (функция Шеффера), или } f_{14} = \overline{x_1 \wedge x_2}\, x_1 \quad \text{или} \quad f_{14} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2.$$

Рассмотрим способы получения эквивалентных формул для представления булевых функций.

Переключательная функция называется монотонной, если при любом возрастании набора значения этой функции не убывают (наборы 0; 1 и 1; 0 несравнимы).

f_2 — немонотонна, так как на (1; 0) она равна «1», а на (1; 1) — «0»; f_3 — монотонна; f_5 — монотонна.

Пусть дано множество исходных функций (конечное или бесконечное)

$$\sum \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}.$$

Символы переменных будем считать формулами глубины «0». Формула F имеет глубину $k+1$, если F имеет вид

$$f_i(F_1, F_2, \ldots, F_{n_i}),$$

где $f_i \in \sum$, n_i — число аргументов f_i, а $F_1, F_2, \ldots, F_{n_i}$ — формулы, максимальная из глубин которых равна k. $F_1, F_2, \ldots, F_{n_i}$ — подформулы F, f_i — внешняя или главная операция формулы F. Все подформулы формул $F_1, F_2, \ldots, F_{n_i}$ также называются подформулами F.

Пример 4.4

1. $f_2(x_1,x_2,x_3)$ — формула глубины 1,
2. $f_3\big(f_1(x_3,x_1),f_2(x_1,f_3(x_1,x_2))\big)$ — формула глубины 3, так как она содержит одну подформулу глубины 2 — $f_2(x_1,f_3(x_1,x_2))$ — и две — глубины 1 — $f_1(x_3,x_1)$ и $f_3(x_1,x_2)$.

Пусть: f_1 — дизъюнкция, f_2 — конъюнкция, f_3 — сложение по модулю 2.
Тогда $f_3\big(f_1(x_3,x_1),f_2(x_1,\ f_3(x_1,\ x_2))\big)$ запишется: $(x_3 \vee x_1) \oplus \big(x_1 \wedge (x_1 \oplus x_2)\big)$.

. . . .

Правила подстановки формулы вместо переменной.

При подстановке формулы F вместо переменной x все вхождения переменной x в исходное соотношение должны быть заменены одновременно формулой F.

Пример 4.5

Сделаем подстановку в формулу $x \vee \overline{x} = 1$, подставив в неё вместо переменной x формулу F.

Соотношение $F \vee \overline{F} = 1$ получено по правилу подстановки и верно для любых F.

Соотношение $F \vee \overline{x} = 1$ получено с нарушением правила подстановки и для некоторых F *может быть неверным*.

Правило подстановки позволяет получать из исходных соотношений новые *эквивалентные соотношения*.

. . . .

Во всякой алгебре, в том числе и в булевой алгебре, равенство $F_1 = F_2$ означает, что формулы F_1 и F_2 описывают один и тот же элемент алгебры, то есть одну и ту же логическую функцию. Если какая-либо формула F содержит подформулу F_1, то замена F_1 на F_2 не изменяет элемента булевой алгебры f, над которым производится операция в формуле F.

Формула F'', полученная такой заменой, эквивалентна F. Это утверждение представляет собой *правило замены подформул*. Оно позволяет получать формулы, эквивалентные данной.

Рассмотрим разницу между правилами подстановки и замены.

При подстановке:

- переменная заменяется на формулу;
- формула может быть любой, но требуется её одновременная подстановка во все вхождения переменной.

При замене:

- любая подформула может быть заменена, но не на любую другую, а только на *эквивалентную*. При этом замена всех *вхождений* исходной подформулы не обязательна.

Пример 4.6

Пусть имеется эквивалентность $F_1 = F_2$, где F_1 и F_2 содержат переменную x. Если вместо всех вхождений x в F_1 и F_2 подставить произвольную формулу F, то получаются новые формулы F_1' и F_2', причём не обязательно $F_1 = F_1'$; $F_2 = F_2'$, однако между собой F_1' и F_2' будут эквивалентны.

Возьмём:

$$\underbrace{\overline{x_1 x_2}}_{F_1} = \underbrace{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}_{F_2}. \tag{4.2}$$

Подставим $\overline{x}_1 x_3$ вместо x_1.

Получим:

$$\underbrace{\overline{\overline{\overline{x}_1 x_3}\, x_2}}_{F_1'} = \underbrace{\overline{\overline{x}_1 x_3} \vee \overline{x}_2}_{F_2'}. \tag{4.3}$$

Причём F_1 не эквивалентна F_1';

F_2 не эквивалентна F_2';

однако F_1' эквивалентна F_2'.

Если в правой части (4.3) $\overline{\overline{x}_1 x_3}$ заменить формулой $\overline{\overline{x}}_1 \vee \overline{x}_3$, эквивалентной ей в силу ($\overline{x_1 x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$), а в полученной подформуле $\overline{\overline{x}}_1$ заменить на эквивалентную формулу x_1 (в силу $\overline{\overline{x}} = x$), то все формулы в построенной цепи преобразований — $\overline{\overline{\overline{x}_1 x_3}\, x_2} \Rightarrow \overline{\overline{x}_1 x_3} \vee \overline{x}_2 \Rightarrow \overline{\overline{x}}_1 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 \Rightarrow x_1 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_2$ эквивалентны. Это и есть эквивалентные преобразования.

Эквивалентные преобразования при доказательстве эквивалентности формул более эффективны, нежели их вычисления на наборах значений аргументов (переменных).

Основные правила эквивалентных преобразований.

В булевой алгебре принято опускать скобки в случаях:

1) при последовательном выполнении нескольких «$\wedge$» или «$\vee$» (например, вместо $x_1(x_2 x_3)$ пишут $x_1 x_2 x_3$);
2) если они являются внешними скобками у «$\vee$»-и. Например, вместо $\big(x_1(x_2 \vee x_3) \vee (x_4 x_5)\big)$ пишут $x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_4 x_5$.

Упрощение формул (получение эквивалентных формул, содержащих меньшее число символов).

Рассмотрим основные законы, определяющие эти операции:

1. Закон поглощения

$$x \vee xy = x; \; x(x \vee y) = x.$$

Доказательство:

а) $x \vee xy = x \,\&\, 1 \vee xy = x(1 \vee y) = x \,\&\, 1 = x$,

б) $x(x \vee y) = xx \vee xy = x \vee xy = x$.

2. Закон склеивания

$$xy \vee x\overline{y} = x.$$

3. Закон обобщённого склеивания

$$xz \vee y\overline{z} \vee xy = xz \vee y\overline{z}.$$

Доказательство: применим склеивание в *обратную сторону* (расщепление) и поглощение:

$$xz \vee y\overline{z} \vee xy = xz \vee y\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{z} = xz \vee y\overline{z}.$$

4. Закон Порецкого

$$x \vee \overline{x}y = x \vee y.$$

Доказательство:

$$x \vee \overline{x}y = xy \vee x\overline{y} \vee \overline{x}y = xy \vee x\overline{y} \vee xy \vee \overline{x}y = x \vee y.$$

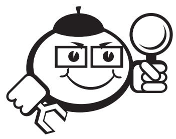
Приведение булевых функций к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) и к совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ).

Элементарными конъюнкциями называются конъюнкции переменных или их отрицаний, в которых каждая переменная или её отрицание встречается не более одного раза.

ДНФ называется формула, имеющая вид дизъюнкции элементарных конъюнкций (ДНФ функции может быть не единственной).

Приведение к ДНФ.

1. С помощью двойного отрицания $(\overline{\overline{x}} = x)$ и правил де Моргана все отрицания «спускаются» до переменных.
2. Раскрываются скобки (применяя свойства): а) $xx = x$; б) $x \vee x = x$ (идемпотентность); в) $x\overline{x} = 0$ (закон противоречия) и г) $x \vee \overline{x} = 1$ (закон исключённого третьего).
3. Удаляются лишние конъюнкции и повторения переменных.
4. Удаляются константы (применяя свойства констант).



Пример 4.7

Привести к ДНФ выражение $xy \vee \overline{x}(y \vee xz)\left(\overline{x(\overline{y} \vee z) \vee yz}\right)$.

Решение:

1) преобразуем выражение $\left(\overline{(x(\overline{y} \vee z) \vee yz)}\right)$;

$\overline{x(\overline{y} \vee z) \vee yz} = \left(\overline{x(\overline{y} \vee z)}\right) \cdot \overline{yz} = \left(\overline{x} \vee (\overline{\overline{y} \vee z})\right) \cdot (\overline{y} \vee \overline{z}) = (\overline{x} \vee \overline{\overline{y}} \cdot \overline{z})(\overline{y} \vee \overline{z}) = (\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee$ $\vee\, y\overline{y}\,\overline{z} \vee y\overline{z}) = (\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee y\overline{z})$;

2) подставим полученное выражение в исходное и продолжим преобразования:

$xy \vee (\overline{x}y \vee x\overline{x}z)(\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee y\overline{z}) = xy \vee \overline{x}y(\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee y\overline{z}) = xy \vee \overline{x}y\overline{y} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} = xy \vee \overline{x}y\overline{z} =$ $= y(x \vee \overline{x}\,\overline{z}) = y(x \vee x\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{z}) = yx \vee y\overline{z}.$

Приведение булевых выражений к СДНФ.

Всякую ДНФ можно привести к СДНФ расщеплением конъюнкций, которые содержат не все переменные $(xy = xyz \vee xy\overline{z})$, например: $xy \vee \overline{x}y\overline{z} = xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z}$.

4.3.1 Булева алгебра функций и эквивалентные преобразования в ней

Все эквивалентные преобразования в булевой алгебре проводятся с помощью основных эквивалентных соотношений (законов):

1) ассоциативность;
2) коммутативность;
3) дистрибутивность:
   а) относительно дизъюнкции;
   б) относительно конъюнкции;
4) идемпотентность $x \cdot x = x; x \vee x = x$;
5) закон двойного отрицания $\overline{\overline{x}} = x$;
6) свойства констант 0 и 1:
   а) $x \cdot 1 = x$; б) $x \vee 1 = 1$; в) $\overline{0} = 1$;
   б) $x \cdot 0 = 0$; д) $x \vee 0 = x$; е) $\overline{1} = 0$;
7) правила де Моргана
   а) $\overline{x_1\ x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$;
   б) $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$;
8) закон противоречия $x \cdot \overline{x} = 0$;
9) закон исключённого третьего $x \vee \overline{x} = 1$.

Данные эквивалентные соотношения отличаются тем, что:

1) они не выводимы друг из друга — убедиться в их справедливости можно, используя стандартный метод доказательства эквивалентности формул, т. е. построение таблиц истинности;
2) этих соотношений достаточно для выполнения любых эквивалентных преобразований логических формул.

Упрощение формул.

Наряду с основными соотношениями для упрощения формул также используются эквивалентные соотношения, выводимые из основных с помощью эквивалентных преобразований:

- поглощение
  а) $x \vee xy = x$; б) $x(x \vee y) = x$;
- склеивание
  $xy \vee x\overline{y} = x$;

- обобщённое склеивание
  $xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z}$;
  $x \vee \bar{x}y = x \vee y$.

Правила приведения к ДНФ.

Элементарная конъюнкция — это конъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Примеры ДНФ.

1) $yz \vee xy \vee xz \vee x\bar{y}\,\bar{z}$;
2) $\bar{y}z \vee \bar{x}y \vee xz \vee \bar{x}y\bar{z}$.

Все процедуры приведения к ДНФ основаны на законах булевой алгебры и сводятся к следующему:

1) все отрицания «спустить» до переменных;
2) раскрыть скобки с помощью основных эквивалентных преобразований;
3) удалить лишние конъюнкции и повторения переменных в конъюнкциях с помощью основных законов булевой алгебры (идемпотентность, противоречия, исключённого третьего);
4) удалить константы, применяя закон «свойства констант 0 и 1».

Процедура приведения к КНФ.

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

КНФ называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Пример булевой функции, заданной в КНФ:

$$(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

Процедура приведения булевой функции от ДНФ к КНФ:

1. Применить к формуле правило двойного отрицания:
   $F = \overline{\overline{K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m}}$ и привести $\overline{K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m}$ к ДНФ $K_1' \vee K_2' \vee \ldots \vee K_p'$, где $K_1' \vee K_2' \vee \ldots \vee K_p'$ — элементарные конъюнкции. Тогда: $F = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m = \overline{\overline{K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m}} = \overline{K_1' \vee K_2' \vee \ldots \vee K_p'}$.
2. С помощью правил де Моргана освободиться от второго отрицания и преобразовать отрицания элементарных конъюнкций в элементарные дизъюнкции $D_1, D_2, \ldots, D_p$. Тогда

$$F = \overline{K_1' \vee K_2' \vee \ldots \vee K_p'} = \overline{K}_1 \cdot \overline{K}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{K}_p = D_1 D_2 \ldots D_p.$$

4.3.2 Представление переключательных функций в виде многочленов

Конституентой «1» называется переключательная функция n аргументов, которая принимает значение «1» только на одном наборе аргументов. Число различных конституент «1» среди функций n аргументов равно 2^n. Так, для $n = 2$ это f_1, f_2, f_4 и f_8.

Обычно конституенты «1» выражают через произведение всех аргументов, каждый из которых входит в произведение либо x_i, либо $\overline{x}_i$.

Теорема Жегалкина.

Любая переключательная функция может быть представлена в виде полинома

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n + \ldots + a_{n+1} x_1 x_2 + \ldots + a_n x_1 x_2 \ldots x_n, \quad (4.4)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — некоторые константы, равные «0» или «1». Знак $\oplus$ означает операцию сложения по модулю 2:

- $x \oplus 0 = x$;
- $x \oplus 1 = \overline{x}$;
- $x \oplus x = 0$ (если чётное число переменных);
- $x \oplus x \oplus x = x$ (если нечётное число переменных);
- $x \oplus y = y \oplus x$;

$$x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y.$$

При записи конкретной функции коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ выпадают, так как члены, при которых $a_i = 0$, можно опустить, а коэффициенты, равные 1, — не писать.

Доказательство. Пусть задана произвольная переключательная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, равная «1» на некоторых наборах с номерами $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Очевидно, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно записать:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K_{m_1} + K_{m_2} + \ldots + K_{m_p} = 1, \quad (4.5)$$

где K_{m_i} — конституента «1».

Так, для набора с номером m_i получаем

$$K_{m_1} + K_{m_2} + \ldots + K_{m_i} + \ldots + K_{m_p} = 0 + 0 + \ldots + 1 + \ldots + 0 = 1.$$

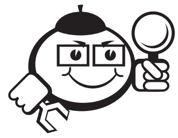
От формулы (4.5) легко перейти к формуле (4.6), если представить K_{m_i} в виде произведений и заменить все переменные с отрицаниями, используя соотношения $\overline{x} = x \oplus 1$ (так как отрицания не входят в (4.4)).

Пусть $K_i = \overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4$. Получим $K_i = (x_1 \oplus 1) x_2 x_3 (x_4 \oplus 1)$. Далее, используя соотношения для конъюнкции:

$$\begin{cases} x \cdot 0 = 0; \\ x \cdot 1 = x; \\ x \cdot x = x; \\ x \cdot x \cdot \ldots \cdot x = x; \\ xy = yx; \\ \overline{x}x = 0; \\ x(y + z) = xy + xz - \text{дистрибутивность,} \end{cases} \quad (4.6)$$

и приводя подобные члены в соответствии с соотношениями (4.6)–(4.7):

$$\underbrace{x \oplus x \oplus \ldots \oplus x}_{n} = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ четном,} \\ 1, & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (4.7)$$



Пример 4.8

Представить в виде полинома Жегалкина функцию $f_{14}(x,y)$.

$$f_{14} = \overline{x}\,\overline{y} \vee x\overline{y} \vee \overline{x}y.$$

Решение:

$f_{14} = K_0 \oplus K_1 \oplus K_2 = \overline{x}\,\overline{y} \oplus \overline{x}y \oplus x\overline{y} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus (x+1)y \oplus x(y+1) = 1 \oplus x \oplus x \oplus$ $\oplus\, y \oplus y \oplus xy \oplus xy \oplus xy = 1 \oplus xy.$

4.4 Функционально полные системы

Система функций $\sum$ называется функционально полной системой, если любая логическая функция может быть представлена формулой над $\sum$, т. е. являться суперпозицией функций из $\sum$.

Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой, т. е. как суперпозиция дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Действительно, для всякой логической функции, кроме константы «0», таким представлением может служить её СДНФ. (*Дизъюнкция конституент «1», равных «1» на тех же наборах, что и заданная функция, называется СДНФ переключательной функции*.)

Константу «0» также можно представить булевой формулой $x\overline{x}$.

Из теоремы следует, что система $\sum = \{\&,\ \vee,\ \neg\}$ является функционально полной:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K_{j1} \vee K_{j2} \vee \ldots \vee K_{jm},$$

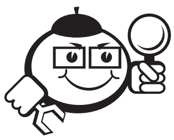
где K_{ji} — это наборы переменных, где функция принимает значение «1». СДНФ функции f представляет собой разложение функции по всем n переменным.

Согласно принципу двойственности, справедливому в алгебре Буля, имеем следующий вывод: любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть представлена в виде конъюнкции дизъюнкций её аргументов на тех наборах их значений, на которых $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значение «0». Таким представлением булевой функции служит *совершенная конъюнктивная нормальная форма* (СКНФ).

Представление булевых функций двух аргументов в формах СДНФ и СКНФ приведены в таблице 4.4.

Таблица 4.4 – Представление булевых функций двух аргументов в формах СДНФ и СКНФ

x	**0**	**0**	**1**	**1**	**СДНФ**	**СКНФ**
y	**0**	**1**	**0**	**1**		
$f_0(x,y)$	0	0	0	0	не имеет	$(x\vee y)(x\vee\bar{y})(\bar{x}\vee y)\cdot(\bar{x}\vee\bar{y})$
$f_1(x,y)$	0	0	0	1	xy	$(x\vee y)(x\vee\bar{y})(\bar{x}\vee y)$
$f_2(x,y)$	0	0	1	0	$x\cdot\bar{y}$	$(x\vee y)(x\vee\bar{y})(\bar{x}\vee\bar{y})$
$f_3(x,y)$	0	0	1	1	$x\cdot\bar{y}\vee xy$	$(x\vee y)(x\vee\bar{y})$
$f_4(x,y)$	0	1	0	0	$\bar{x}y$	$(x\vee y)(\bar{x}\vee y)(\bar{x}\vee\bar{y})$
$f_5(x,y)$	0	1	0	1	$\bar{x}y\vee xy$	$(x\vee y)(\bar{x}\vee y)$
$f_6(x,y)$	0	1	1	0	$\bar{x}y\vee x\bar{y}$	$(x\vee y)(\bar{x}\vee\bar{y})$
$f_7(x,y)$	0	1	1	1	$\bar{x}y\vee x\bar{y}\vee xy$	$x\vee y$
$f_8(x,y)$	1	0	0	0	$\bar{x}\cdot\bar{y}$	$(x\vee\bar{y})(\bar{x}\vee y)(\bar{x}\vee\bar{y})$
$f_9(x,y)$	1	0	0	1	$\bar{x}\cdot\bar{y}\vee xy$	$(x\vee\bar{y})(\bar{x}\vee y)$
$f_{10}(x,y)$	1	0	1	0	$\bar{x}\cdot\bar{y}\vee x\bar{y}$	$(x\vee\bar{y})(\bar{x}\vee\bar{y})$
$f_{11}(x,y)$	1	0	1	1	$\bar{x}\cdot\bar{y}\vee x\bar{y}\vee xy$	$(x\vee\bar{y})$
$f_{12}(x,y)$	1	1	0	0	$\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}y$	$(\bar{x}\vee y)(\bar{x}\vee\bar{y})$
$f_{13}(x,y)$	1	1	0	1	$\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}y\vee xy$	$\bar{x}\vee y$
$f_{14}(x,y)$	1	1	1	0	$\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}y\vee x\bar{y}$	$\bar{x}\vee\bar{y}$
$f_{15}(x,y)$	1	1	1	1	$\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}y\vee x\bar{y}\vee xy$	не имеет



Пример 4.9

Пример приведения логической функции к форме СДНФ

Логическую функцию $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \sim \neg x_2) \to \big((x_1 \vee x_3)\ \&\ x_2\big)$ *представить булевой формулой — в виде СДНФ.*

Решение:

1. Функция $f(x_1,x_2,x_3)$ задана не булевой формой.
2. По исходной формуле восстановим её таблицу истинности.
3. По таблице истинности составим СДНФ заданной функции:

$$f(x_1\ x_2\ x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3.$$

4.5 Минимизация булевых функций

Под минимизацией (упрощением) БФ понимаются такие тождественные преобразования её формулы, которые приводят к уменьшению числа вхождений аргументов.

В пределе эти преобразования дают минимальную форму.

Под вхождением аргументов понимается суммарное число аргументов, входящих в данную формулу, вместе с их повторами.

Пример 4.10

Дана функция: $f = ABC + ABC + BC + AC$.

Функция f *зависит от трёх аргументов, но имеет десять вхождений аргументов.*

4.5.1 Алгебраический метод упрощения булевых функций

Алгебраический метод упрощения булевых функций основан на эквивалентных преобразованиях булевых (*логических*) функций.

Пример 4.11

Пример применения метода упрощения булевых функций

$$f(x,y,z) = xy \vee \overline{x}(y \vee xz)\left(\overline{x(\overline{y} \vee z) \vee yz}\right) =$$

$$= xy \vee (\overline{x}y \vee \overline{x}xz) \cdot \overline{x(\overline{y} \vee z)} \cdot \overline{yz} = xy \vee \overline{x}y\left(\overline{x} \vee \overline{(\overline{y} \vee z)}\right) \cdot \overline{yz} =$$

$$= xy \vee \overline{x}y(\overline{x} \vee y\overline{z}) \cdot (\overline{y} \vee \overline{z}) = xy \vee \overline{x}y(\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee y\overline{y}\,\overline{z} \vee y\overline{z}\,\overline{z}) =$$

$$= xy \vee \overline{x}y(\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee y\overline{z}) = xy \vee \overline{x}y(\overline{x}\,\overline{y} \vee y\overline{z}) = xy \vee \overline{x}y\overline{z} = y(x \vee \overline{x}\,\overline{z}) =$$

$$= y(x \vee \overline{z}) = xy \vee y\overline{z}.$$

Эквивалентные преобразования логических функций.

Основные эквивалентные соотношения (законы) в булевой алгебре:

1) ассоциативность;
2) коммутативность;
3) дистрибутивность:
   а) относительно дизъюнкции;
   б) относительно конъюнкции;
4) идемпотентность $x \cdot x = x$; $x \vee x = x$;
5) закон двойного отрицания $\overline{\overline{x}} = x$;
6) закон действия с константами 0 и 1:
   а) $x \cdot 1 = x$;
   б) $x \vee 1 = 1$;

в) $\overline{0} = 1;\ \overline{1} = 0;$

г) $x \cdot 0 = 0;$

д) $x \vee 0 = x;$

е) $x \vee \overline{x} = 1;\ x \,\&\, \overline{x} = 0;$

7) правила де Моргана:

а) $\overline{x_1\, x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2;$

б) $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2;$

8) закон противоречия $x \cdot \overline{x} = 0;$

9) закон исключённого третьего $x \vee \overline{x} = 1.$

Эти эквивалентные соотношения отличаются тем, что:

1) они не выводимы друг из друга — убедиться в их справедливости можно, используя стандартный метод доказательства эквивалентности формул;
2) этих соотношений достаточно для выполнения любых эквивалентных преобразований логических формул.

Наряду с основными соотношениями для упрощения формул также используются эквивалентные соотношения, выводимые из основных с помощью эквивалентных преобразований:

- Закон Порецкого: $x \vee \overline{x}y = x \vee y;$
- Закон поглощения: а) $x \vee x = x;$ б) $x(x \vee y) = x;$
- Правило «склеивания»: $xy \vee x\overline{y} = x;$
- Обобщённое склеивание: $xz \vee y\overline{z} \vee xy = xz \vee y\overline{z}.$

Пример 4.12

Пример упрощения формул с помощью эквивалентных соотношений

$$f = A + \overline{A}B + BC + AC = A(1 + C) + \overline{A}B + BC = A + \overline{A}B + BC.$$

Число вхождений переменных уменьшилось до пяти.

Можно продолжить упрощение, применяя «вторую» группу эквивалентных соотношений, выводимых из основных с помощью эквивалентных преобразований:

$$f = A + \overline{A}B + BC = A \cdot 1 + \overline{A}B + BC = A \cdot (B + \overline{B}) + \overline{A}B + BC =$$
$$= A \cdot B + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + B \cdot C + AB = B + A + B \cdot C = A + B(1 + C) = A + B.$$

Рассмотренный способ алгебраической минимизации требует большого опыта в проведении эквивалентных преобразований и является достаточно трудоёмким в реализации.

Для минимизации сложных функций есть более эффективный способ нахождения минимальной формы, не требующий изощрённой изобретательности в применении эквивалентных преобразований. Это метод Квайна. Основу метода Квайна составляет теорема «*склеивания*».

Введём новые определения: минтерм, импликанта, простая импликанта, элементарное произведение.

Пример 4.13

Пусть задана функция f четырёх аргументов, принимающая значения «1» на следующих минтермах:

$$f = (0, 1, 3, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15).$$

Запишем эти минтермы в алгебраической форме — $f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD$.

Выполним первый этап минимизации.

Начиная с крайнего левого минтерма в алгебраической записи функции f, каждый минтерм сравниваем со всеми остальными, находящимися правее него, и (если это возможно) применяем правило «склеивания».

Результат операции *склеивания* записываем в отдельную строку.

Пронумеруем минтермы (*для удобства работы с ними*) —

$$f = \overset{1}{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}} + \overset{2}{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D} + \overset{3}{\overline{A}\,\overline{B}CD} + \overset{4}{\overline{A}BC\overline{D}} + \overset{5}{\overline{A}BCD} + \overset{6}{A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}} + \overset{7}{AB\overline{C}\,\overline{D}} + \overset{8}{AB\overline{C}D} + \overset{9}{ABC\overline{D}} + \overset{10}{ABCD}.$$

1-й склеивается со 2-м и с 6-м; получаем конъюнкции — $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$.

2-й склеивается с 3-м; получаем конъюнкцию — $\overline{A}\,\overline{B}D$.

3-й склеивается с 5-м; получаем конъюнкцию — $\overline{A}CD$.

4-й склеивается с 5-м и с 9-м; получаем конъюнкции — $\overline{A}BC$; $BC\overline{D}$.

5-й склеивается с 10-м; получаем конъюнкцию — BCD.

6-й склеивается с 7-м; получаем конъюнкцию — $A\overline{C}\,\overline{D}$.

8-й склеивается с 10-м; получаем конъюнкцию — ABD.

9-й склеивается с 10-м; получаем конъюнкцию — ABC.

Запишем результат первого этапа минимизации —

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + BC\overline{D} + \overline{A}BC + BCD + A\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{D} + AB\overline{C} + ABD + ABC.$$

Второй этап алгоритма.

Сравниваем полученные конъюнкции, аналогично тому, как это делалось на первом этапе применительно к минтермам, и выписываем результат:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + BC + AB + A\overline{C}\,\overline{D}.$$

Склеивающихся конъюнкций больше нет. Получена *сокращённая нормальная форма заданной функции f*.

Карты Вейча и диаграммы Карно.

Карты Вейча и диаграммы Карно широко применяются для различных преобразований БФ.

Рассмотрим карту Вейча 2-х аргументов (рис. 4.5 и 4.6).

	A	
B	3	1
	2	0

Рис. 4.5 – Карта Вейча с номерами минтермов

	A	
B	AB	$\bar{A}B$
	$A\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$

Рис. 4.6 – Карта Вейча с аналитической записью минтермов

Вокруг карты размещены переменные. За каждой переменной строго отведена своя зона, помеченная чертой. Оставшаяся зона по каждой стороне карты закреплена за *инверсной* переменной.

Карта Вейча 3-х аргументов с указанием минтермов в их аналитической записи приведена на рисунке 4.7.

	A	A		
B	$AB\bar{C}$	ABC	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
		C	C	

Рис. 4.7 – Карта Вейча булевых функций 3-х аргументов

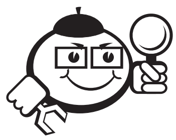
Правила минимизации БФ с использованием карт Карно.

1. В карте Карно группы единиц (для получения ДНФ) и группы нулей (для получения КНФ) необходимо обвести четырехугольными контурами. Внутри контура должны находиться только одноименные значения функции. Этот процесс соответствует операции склеивания или нахождения импликант данной функции.
2. Количество клеток внутри контура должно быть целой степенью двойки (1, 2, 4, 8, 16…).
3. При проведении контуров крайние строки карты (верхние и нижние, левые и правые), а также угловые клетки считаются соседними (для карт до 4-х переменных).
4. Каждый контур должен включать максимально возможное количество клеток. В этом случае он будет соответствовать простой импликанте.

5. Все единицы (нули) в карте (даже одиночные) должны быть охвачены контурами. *Любая единица* (нуль) может входить в контуры произвольное количество раз.
6. Множество контуров, покрывающих все 1 (0) функции, образуют тупиковую ДНФ (КНФ).
7. В элементарной конъюнкции (дизъюнкции), которая соответствует одному контуру, остаются только те переменные, значение которых не изменяется внутри обведенного контура.

Примечание:

- Переменные булевой функции входят в *элементарную коньюнкцию* (для значений функции 1) без инверсии, если их значение на соответствующих координатах равно 1, и с инверсией — если 0.
- *Для значений булевой функции, равных* 0, записываются *элементарные дизъюнкции*, куда переменные входят без инверсии, если их значение на соответствующих координатах равно 0, и с инверсией — если 1.



Пример 4.14

В соответствии с правилами минимизации БФ с использованием карт Карно, требуется выделить группы единиц с помощью контуров.

Выделим первый контур S_1 с единицами:

x_3x_4 / x_1x_2	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

S_1

Для выделенного контура S_1 запишем функцию F_1 в форме СДНФ:

$$F_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 = \bar{x}_1x_3x_4 + \bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = x_3x_4.$$

Запишем импликанту функции F_1:

$$F_1 = x_3x_4.$$

Выделим второй контур с единицами:

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

S_2

Для выделенного контура S_2 запишем функцию F_2 в форме СДНФ:

$$F_2 = x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3x_4 = x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2\overline{x}_4 \vee$$
$$\vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 = x_1x_2 \vee x_1x_2 = x_1x_2.$$

Выделим импликанту функции F_2:

$$F_2 = x_1x_2.$$

Продолжая процедуру выделения контуров до тех пор, пока это возможно, получим в итоге шесть контуров, отвечающих сформулированным выше требованиям:

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

S_2

Минимальная функция F будет иметь вид:

$$F = F_1 \vee F_2 \vee F_3 \vee F_4 \vee F_5 \vee F_6 = x_3x_4 \vee x_1x_2 \vee x_2x_4 \vee x_1x_4 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3.$$

Контрольные вопросы по главе 4

1. Какая функция называется переключательной?
2. Какая функция называется булевой?
3. Способы задания булевых функций.
4. Методы минимизации булевых функций.
5. Основные законы булевой алгебры.

Глава 5

КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика, или комбинаторный анализ, — это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конфигурации из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией. Можно сказать, что целью комбинаторного анализа является изучение комбинаторных конфигураций, в частности вопросы их существования, алгоритмы построения, решение задач на перечисление. Примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения и сочетания; блок-схемы и латинские квадраты.

Возникновение основных понятий и развитие комбинаторики шло параллельно с развитием других разделов математики (алгебры, теории чисел, теории вероятностей), с которыми комбинаторный анализ тесно связан. Математикам Древнего Востока были известны: формула, выражающая число сочетаний через биноминальные коэффициенты, и формула бинома Ньютона с натуральным показателем n. Рождение комбинаторного анализа как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля и П. Ферми по теории азартных игр. Эти труды, составившие основу теории вероятностей, одновременно содержали принципы определения числа комбинаций элементов конечного множества.

Большой вклад в развитие комбинаторных методов был сделан Г. Лейбницем, Я. Бернулли, Л. Эйлером. С 50-х годов прошлого столетия интерес к комбинаторике возродился благодаря бурному развитию кибернетики, дискретной математики, теории планирования, информатики. В теории вероятностей формулы комбинаторики широко используются для подсчета числа исходов опыта.

5.1 Основные формулы комбинаторики

Основной принцип комбинаторики.

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий, причем первое действие можно выполнить P_1 способами, второе — P_2 способами и т. д., тогда все k действий можно выполнить следующим числом способов

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_k.$$

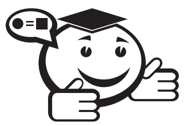
Все базовые формулы комбинаторики выводятся как следствия из этого основного правила.

Сочетания.

Пусть W — множество из n элементов. Произвольное (*неупорядоченное*) k-элементное подмножество множества из n элементов называется *сочетанием из n элементов по k*. Например, сочетаниями из трёх элементов по два являются следующие неупорядоченные подмножества множества $\{a,b,c\}$: $\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$.

Число сочетаний из n элементов по k вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$



Множество называется ***упорядоченным***, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n (n — число элементов множества) так, что различным элементам соответствуют различные числа. Всякое конечное множество можно сделать упорядоченным, если, например, переписать все элементы множества в некоторый список $(a,b,c,\ldots)$, а затем поставить в соответствие каждому элементу номер места, на котором он стоит в списке. Очевидно, что каждое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным способом. Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Перестановки.

Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (т. е. могут быть получены из того же самого множества), называются *перестановками* этого множества. Например, перестановками множества $A = \{a,b,c\}$ являются упорядоченные множества

$$(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a).$$

Найдем число различных способов, которыми может быть упорядочено данное множество, т. е. число перестановок множества A. Пусть множество A имеет n элементов. Обозначим число его перестановок через P_n. Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n!.$$

Доказательство 1. Выберем некоторый элемент a из множества A. Рассмотрим все перестановки, в которых a имеет номер 1. Число таких перестановок будет равно числу перестановок из $n-1$ элементов множества A, которые остаются после исключения из множества элемента a. Поэтому число перестановок, для которых a имеет номер 1, равно P_{n-1}. Обозначим через M множество всех перестановок множества A, а через M_a — множество перестановок, в которых a имеет номер 1. Тогда

$$M = M_a \cup M_b \cup \ldots \cup M_f,$$

где $a, b, \ldots, f$ — все элементы множества A. Поскольку никакие 2 множества из множеств $M_a, M_b, \ldots, M_f$ не имеют общих элементов (напомним, что элементы этих множеств — перестановки, в различных множествах на первом месте стоят различные элементы, следовательно, и соответствующие перестановки будут различными), то $N(M) = N(M_a) + N(M_b) + \ldots + N(M_f)$. Следовательно,

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n!.$$

Доказательство 2. Будем последовательно выбирать элементы множества A и размещать их в определенном порядке на n местах. На первое место можно поставить любой из n элементов. После того как заполнено первое место, на второе место можно поставить любой из оставшихся $n-1$ элементов и т. д. По правилу умножения все n мест можно заполнить $n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = n!$ способами. Следовательно, множество A из n элементов можно упорядочить $n!$ способами:

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n = n!$$

Размещения.

Упорядоченное k-элементное подмножество множества из n элементов называется размещением из n элементов по k. Например, размещениями из трёх элементов по два являются следующие упорядоченные подмножества множества (a, b, c): $(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$. Число размещений из n элементов по k равно

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A_{mn} = P_m C_{mn}.$$

Замечание. Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т. д., то число перестановок с повторениями

$$P_n(n_1, n_2, \ldots) = \frac{n!}{(n_1! n_2! \ldots)},$$

где $n_1 + n_2 + \ldots = n$.

5.2 Комбинаторика и теоретико-вероятностные задачи

Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий T. Например, если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре ниже $0°$, то событие «вода в сосуде находится в твёрдом состоянии» есть достоверное. В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий T.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий T. Например, событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий T предыдущего примера.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий T может либо произойти, либо не произойти.

Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись. Поэтому событие «при бросании монеты выпал «герб» — случайное. Каждое случайное событие, в частности выпадение «герба», есть следствие действия очень многих случайных причин (это — сила, с которой брошена монета, форма монеты и другие). Невозможно учесть влияние на результат всех этих причин, поскольку число их очень велико и законы их действия неизвестны. Теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единичное событие или нет, — она просто не в силах это сделать. Иначе обстоит дело, если рассматриваются случайные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий T. Установлено, что достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила.

Правило суммы.

Суммой $A + B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий.

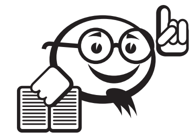
Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m + n$ способами.

Например, если из орудия произведены два выстрела и A — попадание при первом выстреле, B — попадание при втором выстреле, то $A + B$ — попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

Если два события A и B — несовместные, то $A + B$ — событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий. Например, событие $A+B+C$ состоит в появлении одного из следующих событий: A, B, C, A и B, A и C, B и C, A и B и C.

Пусть события A и B — несовместные, причем вероятности этих событий известны. Как найти вероятность того, что наступит либо событие A, либо событие B? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения.



Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Доказательство. Пусть n — общее число возможных элементарных исходов испытания; m_1 — число исходов, благоприятствующих событию A; m_2 — число исходов, благоприятствующих событию B.

Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события A, либо события B, равно $m_1 + m_2$. Следовательно,

$$P(A + B) = \frac{(m_1 + m_2)}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}.$$

Так как $m_1/n = P(A)$ и $m_2/n = P(B)$, то получим $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

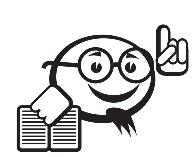
$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Доказательство. Рассмотрим три события: A, B и C. Так как рассматриваемые события попарно несовместны, то появление одного из трех событий, A, B и C, равносильно наступлению одного из двух событий, $A + B$ и C, поэтому в силу указанной теоремы

$$P(A + B + C) = P\left[(A + B) + C\right] = P(A + B) + P(C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Для произвольного числа попарно несовместных событий доказательство проводится методом математической индукции.

Полная группа событий.



Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу, равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

Доказательство. Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1. \tag{5.1}$$

Любые два события полной группы несовместны, поэтому можно применить теорему сложения:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{5.2}$$

Сравнивая (5.1) и (5.2), получим

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Правило произведения.

Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

Произведение событий. *Произведением двух событий* A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Например, если A — деталь годная, B — деталь окрашенная, то AB — деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если A, B, C — появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то ABC — выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Условная вероятность. Во введении случайное событие определено как событие, которое при осуществлении совокупности условий S может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S, не налагается, то такую вероятность называют *безусловной*; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют *условной*. Например, часто вычисляют вероятность события B при дополнительном условии, что произошло событие A. Заметим, что и безусловная вероятность, строго говоря, является условной, поскольку предполагается осуществление условий S.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Исходя из классического определения вероятности, формулу $P_A(B) = P(AB)/P(A)$ $\big(P(A) > 0\big)$ можно доказать. Это обстоятельство и служит основанием для следующего общего (применимого не только для классической вероятности) определения.

Условная вероятность события B при условии, что событие A уже наступило, по определению, равна

$$P_A(B) = P(AB)/P(A) \quad \big(P(A) > 0\big).$$

Рассмотрим два события: A и B. Пусть вероятности $P(A)$ и $P_A(B)$ известны. Как найти вероятность совмещения этих событий, т. е. вероятность того, что появится и событие A и событие B? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \tag{5.3}$$

Доказательство. По определению условной вероятности,

$$P_A(B) = P(AB)/P(A).$$

Отсюда

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

Замечание. Применив формулу (5.3) к событию BA, получим

$$P(BA) = P(B)P_B(A),$$

или, поскольку событие BA не отличается от события AB,

$$P(AB) = P(B)P_B(A). \tag{5.4}$$

Сравнивая формулы (5.3) и (5.4), заключаем о справедливости равенства

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A). \tag{5.5}$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n),$$

где $P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$ является вероятностью события A_n, вычисленной в предположении, что события $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ наступили. В частности, для трех событий

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C).$$

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т. е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т. д.

Пусть вероятность события B не зависит от появления события A.

Событие B называют *независимым от события A*, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B). \tag{5.6}$$

Подставив (5.6) в соотношение (5.5) предыдущего параграфа, получим

$$P(A)P(B) = P(B)P_B(A).$$

Отсюда

$$P_B(A) = P(A),$$

т. е. условная вероятность события A в предположении что наступило событие B, равна его безусловной вероятности. Другими словами, событие A не зависит от события B.

Итак, если событие B не зависит от события A, то событие A не зависит от события B; это означает, что *свойство независимости событий взаимно*.

Для независимых событий теорема умножения $P(AB) = P(A)P_A(B)$ имеет вид

$$P(AB) = P(A)P(B), \tag{5.7}$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Равенство (5.7) принимают в качестве определения независимых событий.

Два события называют *независимыми*, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют *зависимыми*.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Замечание 1. Если события A и B независимы, то независимы также события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Действительно, $A = A\overline{B} + AB$.

Следовательно,

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB) \text{ или } P(A) = P(A\overline{B}) + P(A)P(B).$$

Отсюда

$$P(A\overline{B}) = P(A)\left[1 - P(B)\right] \text{ или } P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}),$$

т. е. события A и B независимы.

Независимость событий $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ является следствием доказанного утверждения.

Несколько событий называют *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы. Например, события A, B, C попарно независимы, если независимы события A и B, A и C, B и C.

Для того чтобы обобщить теорему умножения на несколько событий, введем понятие независимости событий в совокупности.

Несколько событий называют независимыми в совокупности (или просто *независимыми*), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных. Например, если события A_1, A_2, A_3, независимы в совокупности, то независимы события A_1 и A_2, A_1 и A_3, A_2 и A_3; A_1 и A_2A_3, A_2 и A_1A_3, A_3 и A_1A_2. Из сказанного следует, что если события независимы в совокупности, то условная вероятность появления любого события из них, вычисленная в предположении, что наступили какие-либо другие события из числа остальных, равна его безусловной вероятности.

Подчеркнем, что если несколько событий независимы попарно, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности. В этом смысле требование независимости событий в совокупности сильнее требования их попарной независимости.

Поясним сказанное на примере.

Пример 5.1

Пусть в урне имеется 4 шара, окрашенные: один — в красный цвет (A), один — в синий цвет (B), один — в черный цвет (C) и один — во все эти три цвета (ABC). Чему равна вероятность того, что извлеченный из урны шар имеет красный цвет?

Так как из четырех шаров два имеют красный цвет, то $P(A) = 2/4 = 1/2$. Рассуждая аналогично, найдем $P(B) = 1/2$, $P(C) = 1/2$. Допустим теперь, что взятый шар имеет синий цвет, т. е. событие B уже произошло. Изменится ли вероятность того, что извлеченный шар имеет красный цвет, т. е. изменится ли вероятность события A? Из двух шаров, имеющих синий цвет, один шар имеет и красный цвет, поэтому вероятность события A по-прежнему равна $1/2$. Другими словами, условная вероятность события A, вычисленная в предположении, что наступило событие B, равна его безусловной вероятности. Следовательно, события A и B независимы. Аналогично придем к выводу, что события A и C, B и C независимы. Итак, события A, B и C попарно независимы.

Независимы ли эти события в совокупности? Оказывается, нет. Действительно, пусть извлеченный шар имеет два цвета, например синий и черный. Чему равна вероятность того, что этот шар имеет и красный цвет? Лишь один шар окрашен во все три цвета, поэтому взятый шар имеет и красный цвет. Таким образом, допустив, что события B и C произошли, приходим к выводу, что событие A обязательно наступит. Следовательно, это событие достоверное и вероятность его равна единице. Другими словами, условная вероятность $P_{BC}(A) = 1$ события A не равна его безусловной вероятности $P(A) = 1/2$. Итак, попарно независимые события A, B, C не являются независимыми в совокупности.

Приведем теперь следствие из теоремы умножения.

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Доказательство. Рассмотрим три события: A, B и C. Совмещение событий A, B и C равносильно совмещению событий AB и C, поэтому

$$P(ABC) = P(AB \cdot C).$$

Так как события A, B и C независимы в совокупности, то независимы, в частности, события AB и C, а также A и B. По теореме умножения для двух независимых событий имеем:

$$P(AB \cdot C) = P(AB)P(C) \text{ и } P(AB) = P(A)P(B).$$

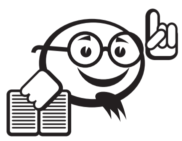
Итак, окончательно получим

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

Для произвольного n доказательство проводится методом математической индукции.

Замечание. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то и противоположные им события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$ также независимы в совокупности.

Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.



Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n.$$

Доказательство. Обозначим через A событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. События A и $\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n$ (ни одно из событий не наступило) противоположны, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n) = 1.$$

Отсюда, пользуясь теоремой умножения, получим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n)$$

или

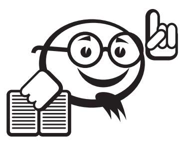
$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n.$$

Частный случай. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = l - q^n.$$

Противоположные события.

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое принято обозначать $\overline{A}$.



Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Доказательство базируется на том, что противоположные события образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице (см. Теорему о полной группе событий).

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p, то вероятность другого события обозначают через q. Таким образом, в силу предыдущей теоремы $p + q = 1$.

Замечание 2. При решении задач на отыскание вероятности события A часто выгодно сначала вычислить вероятность противоположного события, а затем найти искомую вероятность по формуле $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Контрольные вопросы по главе 5

1. Определение и формула перестановок.
2. Определение и формула размещений.
3. Определение и формула размещений с повторениями.
4. Определение и формула сочетаний.
5. Студенту необходимо сдать 3 экзамена (хвоста) за 7 дней. Сколькими способами это можно сделать, при условии, что в один день сдается 1 экзамен?
6. В группе студентов 9 студенток и 8 студентов. Для проведения вечера необходимо выбрать пару ведущих. Сколько вариантов выбора существует?
7. Телефонный номер состоит из пяти цифр. Найти вероятность того, что:
   а) все цифры различны;
   б) все цифры нечетные.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии изложены основные понятия теории множеств, теории графов, комбинаторики и переключательных функций. Основные вопросы теории изложены в доступной и наглядной форме, что способствует более лёгкому их восприятию. Материал пособия также содержит примеры типовых задач и алгоритмы их решения. В данном учебном пособии материал изложен по блочному принципу. Это позволяет объект изучения рассматривать как единое целое относительно ряда характеристик.

Таким образом, учебное пособие позволит студентам приобрести определённые навыки и умения практического профессионального применения методов теории графов и комбинаторики, ориентированные на компьютерные технологии.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

[1] Хаггарти Род. Дискретная математика для программистов : учеб. пособие для вузов : пер. с англ. / Род. Хаггарти. — 2-е изд., доп. — М. : Техносфера, 2005. — 393 с.

[2] Макоха А. Н. Дискретная математика : учеб. пособие для вузов / А. Н. Макоха. — М. : Физматлит, 2005. — 368 с.

[3] Шапорев С. Д. Математическая логика. Курс лекций и практических занятий : учеб. пособие для вузов / С. Д. Шапорев. — БХВ-Петербург, 2005. — 410 с.

[4] Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов : учеб. пособие для вузов / Ф. А. Новиков. — 2-е изд. — СПб. ; М. ; Нижний Новгород : Питер, 2007. — 363 [5] с. : ил.

Дополнительная литература

[5] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов / С. В. Яблонский. — 4-е изд. — М. : Высшая школа, 2002. — 384 с.

[6] Оре Ойстин. Теория графов / О. Оре ; пер. с англ. И. Н. Врублевской ; ред. пер. Н. Н. Воробьев. — 2-е изд., стереотип. — М. : Наука, 1980. — 336 с.

[7] Костюкова Н. И. Графы и их применение. Комбинаторные алгоритмы для программистов : учеб. пособие / Н. И. Костюкова. — М. : Интернет-Университет Информационных Технологий, 2007 ; М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. — 310 с.

[8] Гаврилов Г. П. Сборник задач по дискретной математике : учеб. пособие для вузов / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. — М. : Наука, 1977. — 368 с.

ГЛОССАРИЙ

Биекция — это отображение, которое является одновременно и сюръективным, и инъективным. При биективном отображении каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого множества, при этом определено обратное отображение, которое обладает тем же свойством. Поэтому биективное отображение называют ещё *взаимно-однозначным* отображением (соответствием), одно-однозначным отображением.

Бихроматический граф — граф, у которого $\chi(G) = 2$, где $\chi(G)$ — хроматическое число графа G.

Изоморфизм графов $G = (V_G, U_G)$ и $H = (V_H, U_H)$ — это *биекция* между множествами вершин графов $f\colon V_G \longrightarrow V_H$ такая, что любые две вершины u и v графа G смежны тогда и только тогда, когда вершины $f(u)$ и $f(v)$ смежны в графе H.

Импликанта. Булева функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ является *импликантой* булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если для любого набора переменных, на котором $g = 1$, справедливо $f = 1$.

Инъективность. Функция называется *инъективной* (или, коротко, *инъекция*), если каждому элементу множества X сопоставлен один и только один элемент множества Y.

K-хроматический граф. Граф G называется *k-хроматическим*, если $\chi(G) = k$.

Конечный граф — это граф $G = (X, U)$, у которого количество его вершин $|X|$ конечно.

Конъю́нкция — логическая операция по своему применению максимально приближенная к союзу «и». Синонимы: *логи́ческое «И», логи́ческое умноже́ние*, иногда просто «*И*». Конъюнкция может быть бинарной логической операцией, то есть иметь два операнда, *тернарной* операцией, то есть иметь три операнда, или *n-арной* операцией, то есть иметь n операндов. В записи, по аналогии с умножением в алгебре, знак логического умножения в конъюнкции может быть пропущен: ab.

Метрика — функция, определяющая расстояние в метрическом пространстве.

Метри́ческое простра́нство — множество, в котором определено расстояние между любой парой элементов.

Минтерм — булева функция, принимающая истинное значение лишь при одной-единственной комбинации. Последовательность составления формы СНДФ: по строке таблицы истинности составляют логическое выражение, которое является произведением (конъюнкция) всех входных переменных с отрицанием или без него. Эти элементарные произведения, в которых содержатся все переменные, называются *конституентами* или *минтермами*. Минтермы составляются только для тех строчек таблицы истинности, в которых выходная переменная принимает значения логической единицы (или логического нуля).

Паросочетание — двудольный граф, в котором всякие два ребра не являются смежными.

Плотный граф — это полный граф, у которого при каждой вершине имеется петля.

Полный граф — это граф, у которого любые две вершины соединены ребром.

Пустой граф — это граф $G = (X, U)$, состоящий только из изолированных вершин, т. е. граф, не содержащий ни одного ребра $\left(|U| = 0\right)$.

Сложная система — это собирательное название систем, состоящих из большого числа взаимосвязанных элементов.

Сюръективность. Функция f называется *сюръективной* (или, коротко, *сюръекция*), если каждому элементу множества прибытия может быть сопоставлен хотя бы один элемент области определения.

То́ждество (в математике) — равенство, выполняющееся на всём множестве значений входящих в него переменных (равенство, верное при любых значениях переменных).

Функция. В самом общем виде, функция — это «закон», по которому каждому элементу одного множества (называемому областью определения) ставится в соответствие некоторый элемент другого множества (называемого областью значений).

Хроматическое число графа G — минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины G так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Обозначается $\chi(G)$.

Элементарное произведение — конъюнкт, в который любая переменная входит не более одного раза.

Учебное издание

Жигалова Елена Федоровна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Корректор Осипова Е. А.
Компьютерная верстка Кузнецова Ю. О.

Подписано в печать 26.08.14. Формат 60x84/8.
Усл. печ. л. 11,63. Тираж 300 экз. Заказ

Издано в ООО «Эль Контент»
634029, г. Томск, ул. Кузнецова д. 11 оф. 17
Отпечатано в Томском государственном университете
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40
Тел. (3822) 533018.