

Федеральное агентство по образованию

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

**Кафедра компьютерных систем в управлении и  
проектировании (КСУП)**

**Е.Ф. Жигалова**

# **ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА**

## **Часть 2**

**Учебное пособие**

**2004**

Корректор: Осипова Е.А.

**Жигалова Е.Ф.** Дискретная математика. Часть 2: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2004. – 102 с.

В пособии на общей теоретической основе изложены основные понятия и определения теории графов и комбинаторики, рассмотрены математический аппарат, постановки задач и универсальные методы их решения.

К пособию прилагаются электронные версии обучающих программ базовых алгоритмов задач теории графов.

Пособие рассчитано на студентов технических университетов.

© Жигалова Елена Федоровна, 2004

© Томский межвузовский центр  
дистанционного образования, 2004

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
1 Теоретические основы комбинаторного анализа .....	7
1.1 Основные определения .....	10
1.2 Простейшие задачи перечисления.....	16
1.3 Метод производящих функций.....	19
1.3.1 Экспоненциальная производящая функция.....	24
1.3.2 Производящие функции и рекуррентные соотношения.....	26
1.4 Метод включения и исключения .....	30
1.5 Системы различных представителей .....	34
2 Основы теории графов .....	38
2.1 Основные определения .....	38
2.2 Задание графов с помощью матриц.....	40
2.3 Основные типы графов .....	42
2.4 Обыкновенные графы. Графы Кенига. Графы Бержа .....	43
2.5 Части с экстремальными свойствами в графах .....	53
3 Связность графов .....	60
3.1 Маршруты, цепи и циклы .....	60
3.2 Отделимость и соединимость. Компоненты связности .....	67
3.3 Метрика графа .....	69
3.4 Обходы графа.....	71
3.4.1 Алгоритм Флёри нахождения эйлера цикла .....	73
3.4.2 Цикломатическое число .....	74
3.5 Графы без циклов .....	75
3.5.1 Алгоритм Степанеца, Влэдуца нахождения каркаса графа.....	76
3.5.2 Анализ цикломатических свойств графа по матрице инцидентий .....	77
3.5.3 Определение числа каркасов .....	78
4 Ориентированные графы.....	80
4.1 Маршруты на ориентированном графе.....	80
4.1.1 Транзитивные и квазитранзитивные графы.....	82
4.1.2 Транзитивное замыкание .....	83
4.2 Бикомпоненты графа.....	84
4.2.1 Базы вершин. Ядра.....	86
4.2.2 Алгоритм Рудяну нахождения ядер графа.....	88

5 Раскраска графов.....	91
5.1 Раскраска вершин графа .....	91
5.1.1 Нахождение минимальной раскраски путём использования соцветных вершин.....	93
5.1.2 Алгоритм Витавера нахождения минимальной раскраски вершин .....	94
5.2 Определение хроматического числа плоского графа.....	99
5.2.1 Проблема четырёх красок.....	101

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Предмет теории графов и комбинаторики**

Выделение теории графов и комбинаторной теории в самостоятельные дисциплины обусловлено бурным развитием математической логики, машинной математики, автоматике, кибернетики, теории информации, математической экономики, теории игр, исследования операций, математической лингвистики и других наук, где, в отличие от классического анализа непрерывных величин, на первый план выдвигаются рассуждения и построения дискретно-комбинаторного характера. Именно дискретный характер быстро растущего числа важных практических и теоретических задач самого разнообразного конкретного содержания и различной степени сложности привел к значительным трудностям при анализе и решении данных задач. На пути преодоления этих трудностей возникло большое разнообразие остроумных индивидуальных приемов и методов. Острая необходимость в систематизации этих методов, более глубоком их рассмотрении и разработке на этой основе универсальных методов послужили основой для становления теории графов и комбинаторики. Совместное рассмотрение этих дисциплин обусловлено их тесной взаимосвязью, определенной значительным взаимным проникновением методов и языка обеих теорий, общей теоретической основы большинства рассматриваемых задач.

Чтобы яснее представить область приложения теории графов и комбинаторики, приведем несколько примеров.

1. Теория электрических цепей – одна из наиболее старых областей применения графов. Здесь решаются задачи анализа и синтеза электрических цепей.

2. Теория логических сетей, релейно-контактных схем, автоматов. Характерным для использования графов в данных областях является то, что наряду с применением методов теории графов широко используется язык теории графов. Представление задач на языке графов делает их более наглядными, позволяет глубже и быстрее понять суть задач.

3. Теория транспортных сетей. Опираясь на теорию графов, теория транспортных сетей представляет один из эффективных

методов теоретического исследования и практического решения широкого класса задач на графах.

4. Теория игр во многих случаях существенно выгадывает, когда ее построение ведется на языке теории графов.

5. Графы широко используются в математической лингвистике, теории кодирования, в машиностроении, физике, химии и пр.

Среди задач комбинаторной теории выделяются следующие группы задач.

1. Задачи на размещение. Эта группа задач рассматривает способы расположения на плоскости объектов, обладающих свойством дальнего действия.

2. Задачи о покрытиях и заполнениях. В них отыскивают числа и способы возможных покрытий заданной плоской фигуры площадками определенных форм и размеров или заполнений заданных пространственных фигур меньшими телами заданных форм и размеров.

3. Задачи о маршрутах. К ним относятся задачи о коммивояжере. Как правило, это задачи на оптимизацию.

4. Комбинаторные задачи теории графов. В теории графов особенно велика роль задач и методов комбинаторного характера. В этой связи можно отметить задачу раскраски графов, рассечение ребер графов, перечисление графов определенной структуры и др.

5. Перечислительные задачи. В таких задачах речь может идти, например, о числе электрических цепей, составляемых из данного набора элементов при соблюдении определенных правил, о числе возможных блоков электронных вычислительных устройств, составленных из набора элементов или структур этих элементов и др.

В задачах комбинаторного характера исследуются дискретные множества. Как правило, эти множества конечные. Особенностью комбинаторных исследований является то, что в них преимущественное внимание уделяется двум видам операций: отбору подмножеств и упорядочению элементов. Эти операции и являются комбинаторными.

В комбинаторных задачах различают три вида проблем:

а) перечислительные задачи, т.е. подсчет числа возможных решений;

б) проблема существования решений, т.е. теоретическая возможность;

в) выработка алгоритмов отыскания нужного решения (выборки, расположения), удовлетворяющих условиям задачи.

Несмотря на кажущуюся ограниченность, с логической точки зрения, класса комбинаторных задач, последние оказываются весьма различными как по характеру, так и по методам решения. Это объясняется разнообразием как самих множеств, так и производимых из них выборок.

Задачи теории графов и комбинаторики, как правило, просты и наглядны по своей постановке. Их можно решать по отдельности, без построения общих теорий и обладая достаточным запасом, если не таланта, то хотя бы терпения и свободного времени. В связи с этим имели место попытки подвести целиком теорию графов под какие-либо из уже сложившихся разделов математики.

Эти попытки оказались несостоятельными. Правда, аппарат алгебры нередко удается использовать здесь не только как вычислительное средство, но и как орудие использования, однако в изучении графов слишком большую роль играет чисто комбинаторное искусство, недостаточно охваченное алгебраической наукой. Теории графов нужен свой специфический аппарат, прочно опирающийся на алгебру и насквозь пронизанный комбинаторикой.

### **Основные обозначения**

Перечислим обозначения, которые будут использованы в последующем. Понятия трактуются чисто содержательно безотносительно к выбору системы аксиом.

$x \in A$  – «элемент  $x$  принадлежит  $A$ ».

$x \notin A$  – «элемент  $x$  не принадлежит  $A$ ».

$A \subseteq B$  – « $A$  есть подмножество множества  $B$ ».

$A \subset B$  – « $A \subseteq B$  и  $A \neq B$ ».

$\overrightarrow{xy}$  – упорядоченная пара элементов  $x, y$ .

$x\tilde{y}$  – неупорядоченная пара элементов  $x, y$ .

$\emptyset$  – пустое множество.

$|A|$  – количество элементов (мощность) множества  $A$  (*кардинальное число множества  $A$* ).

$A \cup B$  – объединение множеств  $A$  и  $B$ .

$\bigcup_{i \in I}^n A_i$  – объединение множеств  $A_i$ , где  $i$  пробегает индексное множество  $I$ .

$A \cap B$  – пересечение множеств  $A$  и  $B$ .

$\bigcap_{i \in I}^n A_i$  – пересечение множеств  $A_i$ , где  $i$  пробегает индексное множество  $I$ .

$A \setminus B$  – множество тех элементов множества  $A$ , которые не принадлежат множеству  $B$  (при этом не предполагается, что обязательно  $B \subseteq A$ ).

$\neg M$  – «не  $M$ » (логическое отрицание высказывания  $M$ ).

$M \& N$  – « $M$  и  $N$ » (конъюнкция высказываний  $M$  и  $N$ ).

$\&_{i=1}^n M_i$  – конъюнкция высказываний  $M_1, M_2, \dots, M_n$ .

$M \vee N$  – « $M$  или  $N$ » (дизъюнкция высказываний  $M, N$ , допускающая их одновременную истинность).

$\vee_{i=1}^n M_i$  – дизъюнкция высказываний  $M_1, M_2, \dots, M_n$ .

$M \Rightarrow N$  – «из  $M$  следует  $N$ »; если  $M$ , то  $N$  (логическое следствие, или импликация).

$M \Leftrightarrow N$  – « $M$  равнозначно  $N$ » (необходимое и достаточное условие, логическая равносильность).

$\forall x \in A M(x)$  – «для любого элемента  $x$  множества  $A$  истинно высказывание  $M(x)$  об этом элементе» (логическая формула с квантором общности по элементу).

$\forall X \subseteq A M(X)$  – «для любого подмножества  $X$  множества  $A$  истинно высказывание  $M(X)$  об этом подмножестве» («логическая формула с квантором общности по множеству»).

$\exists x \in A M(x)$  – «существует хотя бы один такой элемент  $x$  в множестве  $A$ , что высказывание  $M(x)$  об этом элементе истинно» («логическая формула с квантором существования по элементу»).

$\exists X \in A M(X)$  – «существует такое подмножество  $X$  множества  $A$ , что высказывание  $M(X)$  об этом подмножестве истинно» (логическая формула с квантором общности по множеству).

$Q(x)$  – «элемент  $x$  обладает свойством  $Q$ » («одноместный предикат»).

$R(x, y)$  – «элемент  $x$  находится в отношении  $R$  к элементу  $y$ ».

$P(x, u, y)$  – «упорядоченная тройка элементов  $x, u, y$  находится в отношении  $P$ » (трехместный предикат).

$\{x/M(x)\}$  – множество всех тех элементов  $x$ , для которых истинно высказывание  $M(x)$ .

# 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

## 1.1 Основные определения

Объектом исследования в комбинаторном анализе и теории графов являются дискретные множества и их элементы.

Множество  $S$ , состоящее из  $n$  элементов, будем называть  $n$ -множеством  $S$ . Элементы  $n$ -множества обозначаются строчными латинскими буквами  $a, b, c, d, \dots$ . Если любой элемент  $a \in A$  оказывается также элементом другого множества  $S$ , то  $A$  есть подмножество множества  $S$ ,  $A \subseteq S$ .

Если  $A \subseteq S$  и  $S \subseteq A$ , то оба множества равны,  $A = S$ . Если  $A \subseteq S$ , но  $A \neq S$ , то  $A$  есть собственное подмножество множества  $S$ ,  $A \subset S$ .

Основными операциями над множествами являются операции объединения и пересечения: объединение (сумма)  $F = S \cup T$ , пересечение  $G = S \cap T$ . Если некоторые множества  $T_i \cap T_j = \emptyset$  при всех  $i, j = 1, 2, \dots, r, i \neq j$ , то  $M = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_r$  называют разбиением множества  $M$  на непересекающиеся подмножества, или просто разбиением.

Кроме операций объединения и пересечения мы будем употреблять декартово (или прямое) произведение множеств:  $S \times T$ , т.е. множество всех упорядоченных пар вида  $(a, b)$ , где  $a \in S, b \in T$ .

Кардинальное или мощность число произведения, очевидно, равно произведению кардинальных чисел множеств-сомножителей. Прямое произведение, распространенное на случай  $k$ -сомножителей, представляет множество всех упорядоченных  $k$ -выборок, в которых каждый из элементов принадлежит одному из множеств-сомножителей.

Опыт выполнения комбинаторных операций отбора подмножеств привел к двум логическим правилам – правилу суммы и правилу произведения. Часто удается разбить все изучаемые комбинации на несколько классов, причем каждая комбинация входит в один и только один класс. Ясно, что в этом случае общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах. Это утверждение называется правилом суммы.

**Правило суммы.** Если из множества  $S$  подмножество  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а подмножество  $B$ , отличное от  $A$ ,  $n$  способами, и при этом выборы  $A$  и  $B$  таковы, что взаимно исключают друг друга и не могут быть получены одновременно, то выбор из  $S$  множества  $A \cup B$  можно получить  $m + n$  способами.

Правило суммы в терминах теории множеств: если даны  $m$ -множество  $S$  и  $n$ -множество  $T$  (элементами которых являются в нашем случае выбранные подмножества), то при  $S \cap T = \emptyset$  объединение  $S \cup T$  будет  $(m+n)$ -множеством.

**Правило произведения.** Если из множества  $S$  подмножество  $A$  может быть выбрано  $m$  способами, а после каждого такого выбора можно  $n$  способами выбрать подмножество  $B$ , то выбор  $A$  и  $B$  в указанном порядке можно осуществить  $m \times n$  способами. В терминах теории множеств это правило соответствует произведению множеств: если  $S$  является  $m$ -множеством, а  $T$  есть  $n$ -множество, то  $S \times T$  окажется  $(m \times n)$ -множеством.

**Отображения.** В последующем будут использованы три способа отображения: некоторого множества  $S$  в некоторое другое множество  $T$ , множества  $S$  на множество  $T$  и множества  $S$  на себя.

Отображение  $\alpha$  множества  $S$  в множество  $T$  называется соответствие между ними, при котором каждому элементу  $s \in S$  сопоставлен единственный элемент  $t = s\alpha \in T$ . Элемент  $s\alpha$  называется образом элемента  $s$  при отображении  $\alpha$ . Два отображения  $\alpha$  и  $\beta$  равны, если  $s\alpha = s\beta$  для всех  $s \in S$ .

Отображением  $\alpha$  множества  $S$  на множество  $T$  характеризуется тем, что всякий элемент  $t \in T$  оказывается образом данного или нескольких элементов  $s \in S$ . В частности, если различным  $s \in S$  соответствуют различные образы, то отображение  $\alpha$  называется однозначным, или  $(1-1)$ -отображением.

Отображением  $\alpha$  множества  $S$  на себя называется отображение, при котором образом является элемент того же множества, т.е. когда  $s\alpha \in S$  для всех  $s \in S$ . Примером такого отображения служат перестановки.

*Отношения.* Это один из способов задания взаимосвязей между элементами множества. Наиболее изученными являются унарные и бинарные отношения.

*Унарные (одноместные) отношения* отражают наличие какого-то определённого признака  $R$  (свойства и т.п.) у элементов множества  $S$  (например, «быть отличником» на множестве студентов группы). Тогда все такие элементы  $a$  из множества  $S$ , которые отличаются данным признаком  $R$ , образуют некоторое подмножество из  $S$ , называемое унарным отношением  $R$ , т.е.  $a \in R$  и  $R \subseteq S$ .

*Бинарные (двухместные) отношения* используются для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве  $S$  (так на множестве людей могут быть заданы, например, бинарные отношения «жить в одном городе», «учиться в одном университете» и т.п.). Тогда все пары  $(a, b)$  элементов из  $S$ , между которыми имеет место данное отношение  $R$ , образуют подмножество пар из множества всех возможных пар элементов  $S \times S = S^2$ , называемое бинарным отношением  $R$ , т.е.  $(a, b) \in R$ , при этом  $R \subseteq S \times S$ .

Бинарные (двухместным) отношения  $R$  могут рассматриваться как подмножество пар  $(a, b) \in R$  множеств  $S_1 \times S_2$ , т.е.  $R \subseteq S_1 \times S_2$ . При этом множество  $S_1$  называют областью определения отношения  $R$ , множество  $S_2$  – областью значений.

В общем случае могут рассматриваться  $n$ -отношения, например отношения между тройками элементов – трёхместные (тернарные) отношения и т.д. Если  $a, b$  находятся в отношении  $R$ , это записывается как  $a R b$ .

**Отношение порядка.** Множество называется упорядоченным, если для любой пары элементов можно установить отношение порядка (выражаемое через понятия «больше», «меньше», «содержится в», «содержит», «предшествует», «следует за» и обозначаемое символами  $\leq, \geq, \subseteq, \supseteq$ ).

Две  $r$ -выборки  $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$  и  $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$  называются упорядоченными, если  $a = b$  лишь при условии, что  $a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, r$ , и неупорядоченными, если  $a = b$  лишь при условии, что каждое  $a_i$  равно некоторому  $b_j, i, j = 1, 2, \dots, r$ .

*Отношение порядка* формально вводится посредством аксиом:

- 1)  $a \leq a$  для любого  $a \in S$  (рефлексивность);

2) если  $a, v \in S$  и  $a \leq v$ , и  $v \leq a$ , то  $a = v$  (антисимметричность или равенство);

3) если  $a \leq v$  и  $v \leq c$ , то  $a \leq c$  (транзитивность),  $a, v, c \in S$ ).

Всякое отношение, удовлетворяющее этим трем аксиомам, является *отношением нестрогого порядка*.

Если отношение антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно, его называют *отношением строгого порядка*.

Например, отношения «*быть не старше*» на множестве людей, «*быть не больше*» на множестве натуральных чисел – нестрогий порядок; отношения «*быть моложе*», «*быть прямым потомком*» на множестве людей – строгий порядок.

Элементы  $a, b \in S$  *сравнимы по отношению порядка  $R$*  на множестве  $S$ , если выполняется  $a R b$  или  $b R a$ .

Множество  $S$ , на котором задано отношение порядка, может быть:

- *полностью упорядоченным множеством*, если любые два элемента из  $S$  сравнимы по отношению порядка. В таком случае говорят, что отношение  $R$  задаёт полный порядок на множестве  $S$ . Например, отношение «*быть не старше*» задаёт полный порядок на множестве людей;

- *частично упорядоченным множеством* – в противном случае. При этом говорят, что отношение  $R$  задаёт на множестве  $S$  частичный порядок. Например, отношение «*быть начальником*» задаёт на множестве сотрудников организации частичный порядок, так как для пары сотрудников одного отдела данное отношение не выполняется: они не сравнимы по данному отношению.

Введем еще одно алгебраическое понятие, которое нам понадобится в последующем. Пусть задано множество  $M$  элементов произвольной природы.

**Определение 1.** Говорят, что в множестве  $M$  определена алгебраическая операция, обозначаемая произвольным символом  $\bullet$ ,  $+$ ,  $*$ , если  $\forall a, v \in M$  однозначным образом определен результат применения этой операции.

**Определение 2.** Множество  $M$ , замкнутое относительно некоторой алгебраической операции называется группоидом, т.е.  $\forall a, v \in M$  имеет место  $a * v = c \in M$ .

**Определение 3.** группоид  $M$  называется полугруппой относительно рассматриваемой операции, если эта алгебраическая операция ассоциативна, т.е.  $\forall a, b, c \in M$  имеет место  $(a * b) * c = a * (b * c)$ .

**Определение 4.** Элемент  $0 \in M$  называется нулем полугруппы, если  $\forall a \in M$  имеет место  $0 * a = a$ .

**Определение 5.** Полугруппа называется коммутативной, если  $\forall a, b \in M$  имеет место  $a * b = b * a$ .

**Определение 6.** Множество  $R$  называется кольцом, если в нем определены две операции – сложение и умножение, обе коммутативные, ассоциативные, а также связанные законом дистрибутивности, причем сложение обладает обратной операцией – вычитанием.

Не останавливаясь подробно на определении кольца, рассмотрим одно из его обобщений.

**Определение 7.** Множество  $K$  с заданными на нем операциями «+» (сложение) и «\*» (умножение) называется полукольцом, если:

- 1)  $K$  образует относительно сложения коммутативную полугруппу с «0»;
- 2)  $K$  является группоидом относительно умножения;
- 3)  $\forall a \in K, 0 * X = X * 0 = 0$ .

Одним из примеров полукольца является множество целых чисел относительно обычных операций сложения и умножения. Примером кольца также является булева алгебра  $B = \{0, 1\}$  из двух элементов:

$$0 + 0 = 0; \quad 0 * 0 = 0 * 1 = 1 * 0 = 0;$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1; \quad 1 * 1 = 1.$$

Наиболее общим способом задания полукольца является задание системы образующих элементов и соотношений.

Наиболее общим способом задания полукольца является задание

системы образующих (порождающих) элементов и соотношений.

Образующие (порождающие) элементы универсальной алгебры  $A$  –

подмножество  $X$  элементов универсальной алгебры, такое, что минимальная подалгебра  $A$ , содержащая  $X$ , есть сама  $A$ .

*Универсальная алгебра* – непустое множество, на котором заданы некоторые алгебраические операции.

Перечень всех символов, соответствующих элементам множества, называется его *алфавитом*, а неопределённый символ, который может становиться любым элементом множества, называют логической переменной. По отношению к логической переменной каждый частный символ является его значением. Более строго можно сказать, что *алфавит* – любая конечная система символов. Символы, составляющие алфавит, называют буквами. Например, рассмотрим множество  $M = \{\xi, \eta, \zeta, \theta, 0\}$ . Здесь  $\{\xi, \eta, \zeta, \theta, 0\}$  – алфавит,  $\xi, \eta, \zeta, \theta, 0$  – буквы.

**Определение 8.** Будем называть *Словом* некоторую конечную запись, составленную из элементов, знаков, операций и иногда скобок. *Словом* являются, во-первых, сами элементы. Далее слова определяются рекурсивно, т.е. если известно, что  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – слова, то  $\omega_1 + \omega_2$  и  $\omega_1 * \omega_2$  – слова и т.д.

**Определение 9.** Множество всех слов, рассмотренное относительно операций «+» и «\*», которые обладают всеми тремя свойствами из определения полукольца, называются *свободным полукольцом* над системой образующих  $M$ .

В свободном полукольце, вообще говоря, никакие два слова не тождественны в данном полукольце, т.е. постулируется, например, что  $\omega_1 = \omega_2$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  некоторые слова, то это равенство называется *соотношением* в свободном полукольце. В свою очередь соотношение порождает набор соотношений – следствий из исходного. Например, если наложено соотношение  $\omega_1 = \omega_2$ , то и  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_1 + \omega_1$ , и  $\omega_1 * \omega_2 = \omega_1 * \omega_1$ .

**Определение 10.** Система или набор соотношений называется набором *определяющих соотношений*, если все остальные соотношения, имеющиеся в данном полукольце являются следствием данного соотношения.

Например, полукольцо всех целых неотрицательных чисел относительно обычных операций сложения и умножения превращается в  $V\{0,1\}$  при наложении дополнительного условия  $2=1$ .

## 1.2 Простейшие задачи перечисления

Пусть имеется  $n$ -множество  $A$ . Некоторая совокупность  $r$  элементов этого множества  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ , где  $a_i \in A$ ,  $i=1, 2, \dots, r$ ;  $r \leq n$ , называется  $r$ -выборкой. В  $r$ -выборках в зависимости от условий задачи, либо учитывают порядок следования элементов, либо не учитывают.

Упорядоченные  $r$ -выборки из  $n$ -множества  $A$  называются  $r$ -перестановками, если все  $r$  элементов различны, и  $r$ -перестановками с повторениями, если среди  $r$  элементов имеются одинаковые.

Неупорядоченные  $r$ -выборки из  $n$ -множества  $A$  называются  $r$ -сочетаниями, если все  $r$  элементов различны, и  $r$ -сочетаниями с повторениями при наличии одинаковых элементов. Например, 6-выборки  $(2, 3, 4, 6, 1, 1)$ ,  $(1, 3, 4, 1, 6, 2)$  представляют собой равные 6-сочетания с повторениями и различные 6-перестановки с повторениями из множества  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Число всех возможных  $r$ -перестановок (отображений  $\alpha$  множества  $A$  на себя) из  $n$ -множества обозначим через  $P(n, r)$ . Величина  $P(n, r)$  определяется посредством последовательного применения правила произведения.

$$P(r, n) = n(n-1)\dots(n-r+1),$$

откуда следует  $P(r, n) = n!$ . Применяется также  $P(n, 0) = 0! = 1$ .

Число  $P$  возможных  $r$ -перестановок с повторениями определяется из условия, что после выбора элемента  $r$ -перестановки остаются все те же  $n$  возможностей для выбора следующего элемента. Следовательно, число  $r$ -перестановок с повторениями равно:

$$p = n^r.$$

Перестановка может рассматриваться с двух позиций: а) как упорядоченная совокупность элементов данного множества или б) как нарушение естественного порядка. Случай а) приводит к

рассмотренным выше  $r$ -перестановкам,  $r \leq n$ . Случай б) приводит к  $n$ -перестановкам.

Например, перестановка  $P = (4\ 3\ 7\ 5\ 6\ 9\ 2\ 8\ 1\ 12\ 11\ 10)$  является нарушением естественного порядка первых 12 чисел

$$P = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \\ 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \end{pmatrix}$$

Учитывая переход элемента 1 в 4, 2 в 3, и т.д. перестановка может быть записана иначе:

$$P = (1\ 4\ 5\ 6\ 9)\ (2\ 3\ 7)\ (10\ 12)\ (8)\ (11), \quad (*)$$

где каждая скобка есть перестановка, действующая только на элементы, заключенные в данной скобке, и не затрагивающая элементы, не заключенные в ней.

Представление перестановки в виде (\*) называется разложением на циклы.

Представим перестановку в виде  $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$  или символически  $1^{k_1}, 2^{k_2}, 3^{k_3}, \dots, n^{k_n}$ ,  $\sum_{i=1}^n i k_i = n$ , где  $k_i$  число циклов, содержащих  $i$  элементов. (\*\*)

**Теорема.** Число перестановок типа (\*\*) равно

$$P(K_1, K_2, K_3, \dots, K_n) = \frac{n!}{1^{K_1} * K_1! * 2^{K_2} * K_2! * \dots * n^{K_n} * K_n!}$$

**Доказательство.** Среди всех  $n!$  перестановок из  $n$  элементов тождественные перестановке:  $1^{k_1} 2^{k_2} 3^{k_3} \dots n^{k_n}$ . Перестановки считаются тождественными, если они содержат все циклы, содержащие одни и те же элементы в любом циклическом порядке.

Число перестановок циклов равно  $1^{k_1} 2^{k_2} 3^{k_3} \dots n^{k_n}$ . Далее, поскольку в каждом цикле  $K_i$  имеет место  $K_i!$  перестановок, тогда общее число перестановок по правилам произведения составит  $1^{k_1} K_1! 2^{k_2} K_2! \dots n^{k_n} K_n!$

Подсчитаем теперь число  $r$ -сочетаний  $C(n, r)$  или просто  $\binom{n}{r}$ . Начнем со случая, когда все элементы в  $r$ -сочетаниях различны. Легко видеть, что число  $r$ -сочетаний из  $n$ -множества в  $r!$  раз меньше, чем число  $r$ -перестановок из элементов того же множества. Следовательно:

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} * (n-r)!$$

Отсюда следует, что  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}r!$ .

Величину  $C(n,r)$  принято называть биномиальным коэффициентом. Действительно, в произведении  $(x+y)^n = (x+y) \cdot (x+y) \dots (x+y)$  коэффициент при члене  $x^r y^{n-r}$  – это не что иное, как число способов выбора  $r$  множителей  $x+y$ , из которых берется  $x$ , при этом из оставшихся  $n-r$  множителей  $x+y$  берется  $y$ . Из соотношения

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r \quad (***)$$

могут быть получены ряд тождеств, включающих биномиальные коэффициенты:

- 1)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ;
- 2)  $\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} = 0$ ;
- 3)  $\sum_{r=1}^n r (-1)^r \binom{n}{r} = 0$ ;
- 4)  $\sum_{r=k}^n (-1)^r \binom{r}{k} \binom{n}{r} = 0, n \geq k$ .

Для получения соотношений (1) и (2) необходимо положить  $x = 1$ ,  $x = -1$  соответственно; для получения (3) продифференцируем (\*\*\*) по  $x$  и затем возьмем  $x = -1$ ; для получения (4) продифференцируем  $k$  раз по  $x$ , разделим на  $k!$  и положим  $x = -1$ .

Заметим, что  $r$ -сочетания из  $n$ -множества являются его  $r$ -подмножествами. Возникает задача о числе  $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ -разбиений множества  $S$ , т.е. разбиений вида

$$S = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k, \quad T_i \cap T_j = \emptyset, i \neq j.$$

Очевидно,  $\sum_{i=1}^k r_i = n$ .

Для выбора  $r_1$ -подмножества  $T_1$  из  $S$  имеется  $\binom{n}{r_1}$  возможностей; после этого  $r_2$ -подмножество  $T_2$  можно выбрать только из остальных  $n-r_1$  элементов, следовательно, имеется  $\binom{n-r_1}{r_2}$  способов

для выбора  $T_2$ ;  $r_k$ -подмножество  $T_k$  можно выбрать  $(n - \sum_{i=1}^n r_i)$  способами.

Применяя обобщенное правило произведения, получим, что искомое число  $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ -разбиений  $n$ -множества  $S$  равно (с учетом выражения для  $C(n, r)$ )

$$R = \binom{n}{r_1} \binom{n-r_1}{r_2} \dots \binom{n-\sum r_i}{r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

и называется полиномиальным коэффициентом.

Подсчитаем, наконец, число  $r$ -сочетаний с повторениями из  $n$ -множества  $S$  и обозначим его через  $f(n, r)$ . Зафиксируем в  $S$  некоторый элемент, тогда каждое  $r$ -сочетание либо содержит этот элемент, либо нет. Если имеет место первый случай, то остальные  $r-1$  элементов этого  $r$ -сочетания (а значит  $r$ -сочетаний, содержащих фиксированный элемент) можно выбрать  $f(n, r-1)$  способами. Если имеет место второй случай, то  $r$ -сочетание выбирается из  $n-1$  элементов, и тогда число таких  $r$ -сочетаний равно  $f(n-1, r)$ .

Используя правило суммы, получим

$$f(n, r) = f(n, r-1) + f(n-1, r).$$

Очевидно, что  $f(n, 1) = n$  и  $f(1, r) = 1$ , тогда  $f(n, 0) = f(n, 1) - f(n-1, 1) = n - (n-1) = 1$ .

Теперь последовательно получаем:

$$\begin{aligned} f(n, 2) &= f(n, 1) + f(n-1, 2) = f(n, 1) + f(n-1, 1) + f(n-2, 2) = \dots = \\ &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = (n(n+1))/2 = \binom{n+1}{2}. \end{aligned}$$

$f(n, 3) = f(n, 2) + f(n-1, 2) + \dots + f(1, 3) = \binom{n+2}{2} + \binom{n}{2} + \dots + 1 = \binom{n+2}{3}$  и т.д.

Легко убедиться, что  $f(n, r) = \binom{n+r-1}{r}$ . Например,

$$f(4, 2) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-r+1)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

### 1.3 Метод производящих функций

В комбинаторном анализе большое место занимают задачи по определению количества решений. Ниже мы рассмотрим метод, с помощью которого подсчитывают количество решений в

комбинаторных задачах. Этот метод, получивший название метода производящих функций, является одним из самых развитых теоретически методов комбинаторного анализа и одним из самых сильных приложений. Главные идеи этого метода были впервые высказаны в конце 18 века в работах Лапласа.

Пусть дана некоторая последовательность чисел  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , образуем степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

Если этот ряд сходится в какой-то области к функции  $f(x)$ , то эту функцию называют производящей для последовательности чисел  $a_0, a_1, \dots, a_n \dots$

Например, из формулы  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \dots$  вытекает,

что функция  $\frac{1}{1-x}$  является производящей для последовательности чисел  $1, 1, 1, \dots$ . Интервал сходимости  $|x| < 1$ . Для последовательности  $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$  производящей является функция  $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$

Нас будут интересовать производящие функции для последовательностей  $a_0, a_1, \dots, a_n \dots$ , связанных с комбинаторными задачами. С помощью этих функций удастся получать самые разные свойства этих последовательностей. Кроме того, мы рассмотрим, как связаны производящие функции с решением рекуррентных соотношений.

### **Виды производящих функций и действия над ними**

В комбинаторном анализе чаще всего используют три вида производящих функций: обычные, экспоненциальные и функции Дирихле.

Обычные производящие функции для последовательности  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  в общем виде могут быть записаны в следующем виде:

$$f_a(t) = \sum_{n=0} a_n t^n.$$

Такие функции соответствуют семействам последовательностей, элементами которых являются  $\binom{n}{r}$  неупорядоченных  $r$ -выборок или функции от них. Например, функция  $f(t) = (1 + t)^n$  однозначно связана с последовательностью чисел  $\{\binom{n}{r}\}$ ;  $r = 0, 1, 2, \dots, n$  в выражении

$$(1 + t)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} t^r. \quad (*)$$

Итак, пусть имеется множество последовательностей  $\{a\} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  и множество соответствующих им производящих функций

$$\{F_a(t)\}, F_a(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r.$$

Суммой последовательностей  $a = (a_0, a_1, \dots)$  и  $b = (b_0, b_1, \dots)$  назовем последовательность

$$c = a + b = \{a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots\} = \{c_0, c_1, \dots\};$$

а суммой производящих функций вида (\*) – производящую функцию

$$F_c(t) = F_a(t) + F_b(t);$$

$$F_c(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r t^r;$$

где  $c_r = a_r + b_r$ .

Произведением (или сверткой) последовательностей  $a$  и  $b$  назовем последовательность  $a \times b = d = (d_0, d_1, \dots)$ , у которой

$$d_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \dots + a_r b_0; \quad r = 0, 1, \dots,$$

а произведением (сверткой) производящих функций  $F_a(t)$  и  $F_b(t)$  вида (\*) – производящую функцию

$$F_d(t) = F_a(t) * F_b(t) = \sum_{r=0}^{\infty} d_r t^r.$$

Для последовательности  $0 = (0, 0, \dots)$ ,  $F_0(t) = 0$ .

Последовательности  $e = (1, 0, 0, \dots)$  соответствует производящая функция  $F_e(t) = 1$ .

Вид производящей функции зависит от вида последовательности рассматриваемого класса  $r$ -сочетаний. Зная число членов последовательности и их кратность, выписывают степенной ряд

$$\sum_{r=0}^n a_r t^r.$$

и стараются найти его сумму в наиболее компактной форме.

**Пример 1.3.1.** Найти производящую функцию для  $r$ -сочетаний с ограниченным числом повторений из  $n$  элементов.

Вначале получим производящую функцию для конечной последовательности чисел  $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ . Запишем выражение  $(a+x)^n$  в виде  $(a+x)^n = (a+x)(a+x)\dots(a+x)$  и раскроем скобки в правой части равенства. Например:

$$\begin{aligned}(a+x)^2 &= aa + ax + xa + xx; \\ (a+x)^3 &= aaa + aax + axa + axx + xaa + xax + xxa + xxx = \\ &= aaa + 3aax + 3axx + xxx.\end{aligned}$$

Из этой записи видно, что в нее входят все неупорядоченные выборки с повторениями, составленные из букв  $x$  и  $a$ , в количестве равном значению показателя степени. Этот же вывод справедлив и для общего случая.

Приведем теперь подобные члены. Подобными будут члены, содержащие одинаковое количество букв  $x$  (следовательно, и букв  $a$ ). Далее, найдем, сколько будет членов, в которые входят  $k$  буква  $x$  и, следовательно,  $n-k$  буква  $a$ . Эти члены являются перестановками с повторениями, составленными из  $k$  букв  $x$  и  $n-k$  букв  $a$ . Перестановки элементов  $x$  могут осуществляться  $k!$  способами, а элементов  $a$   $(n-k)!$  способами. Учитывая, что эти перестановки могут осуществляться независимо друг от друга и в то же время будут одинаковы, можно сказать, что множество всех перестановок  $n!$  распадается на части, состоящие из  $k! \times (n-k)!$  одинаковых перестановок каждая. Значит, число различных перестановок с повторениями из  $k$  букв  $x$  и  $n-k$  букв  $a$  определится по формуле

$$P(k, n-k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_n^k.$$

Отсюда вытекает, что после приведения подобных членов выражение  $x^k a^{n-k}$  войдет с коэффициентом  $C_n^k$ . Итак, мы показали, что

$$(a+x)^n = c_n^0 a^n x^0 + c_n^1 a^{n-1} x + \dots + c_n^n.$$

Это равенство принято называть биномом Ньютона.

Если принять в этом равенстве  $a = 1$ , то получим:

$$(1+x)^n = c_n^0 + c_n^1 x + \dots + c_n^k \alpha^k + \dots + c_n^n x^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \alpha^r.$$

Мы видим, что  $(1+x)^n$  является производящей функцией для чисел  $c_n^k$ ,  $k=0,1,\dots,n$ .

С помощью этой производящей функции можно легко доказать многие свойства чисел  $c_n^k$ .

А теперь вернемся к рассматриваемому примеру. Производящую функцию для  $r$ -сочетаний с ограниченным числом повторений можно построить из следующего соотношения.

$$\prod_{r=1}^n (1+x_r t) = \sum_{r=0}^n a_r t^r, \text{ например,}$$

$$(1+x_1 t)(1+x_2 t)(1+x_3 t) = 1 + (x_1 + x_2 + x_3)t + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)t^2 + x_1 x_2 x_3 t^3 = \sum_{r=0}^3 a_r t^r. \quad a_r = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_r=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_r}}^n x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}.$$

В частном случае, когда  $x_i = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , в качестве коэффициентов  $c_r$  получили числа  $r$ -сочетаний

$$(1+t)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} t^r. \quad (1.3.1)$$

Пусть элемент  $x_k$  появляется в  $r$ -сочетаниях с повторениями  $0, 1, 2, \dots, j$  раз, тогда  $i$  появлением элемента  $x_k$  соответствует одночлен  $x_k^i t^i$ , а по обобщенному правилу суммы появления элемента  $x_k$  либо 0, либо 1, ...  $j$  раз соответствует полином

$$1 + x_k t + x_k^2 t^2 + \dots + x_k^j t^j;$$

и, значит, производящая функция в этом случае имеет вид:

$$F(t) = \prod_{k=1}^n (1 + x_k t + x_k^2 t^2 + \dots + x_k^j t^j).$$

Если в этой задаче существенным является не вид производящей функции, а число  $a_r$  соответствующих  $r$ -сочетаний, то принимаем  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$  и представляем производящую функцию

$$(1+t+t^2+\dots+t^j)^n \quad \text{в виде ряда} \quad \sum_{r=1}^n a_r t^r.$$

**Пример 1.3.2.** Найти производящую функцию для  $r$ -сочетаний с неограниченным числом повторений из  $n$  элементов.

Эту функцию можно построить, воспользовавшись результатами предыдущего примера при  $j=0,1,2,\dots$ ,

$$f(t) = (1 + t + t^2 + \dots)^n = (1 - t)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} (-t)^r =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (((-n)(-n-1)\dots(-n-r+1))/r!) * (-1)^r t^r;$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r, \quad (1.3.2)$$

откуда имеем последовательность  $a = (a_0, a_1, \dots)$ ,  $a_r = \binom{n+r-1}{r}$ ;  $r = 0, 1, \dots$  чисел  $r$ -сочетаний с повторениями из  $n$ -элементов. Этот результат согласуется с полученным ранее.

### 1.3.1 Экспоненциальная производящая функция

Экспоненциальные производящие функции соответствуют упорядоченным  $r$ -выборкам или  $r$ -перестановкам. Из определения упорядоченных и неупорядоченных  $r$ -выборок ясно, что первых в  $r!$  раз меньше, чем вторых. Поэтому формулу (1.3.1) можно записать в виде

$$(1 + t)^n = \sum_{r=0}^n P(n,r) t^r / r!, \quad (1.3.1.1)$$

где  $P(n,r)$  – число  $r$ -перестановок из  $n$  элементов. Это и есть производящая функция для числа  $r$ -перестановок.

В случаях, когда допускаются повторения элементов, необходимо в левой части формулы (1.3.1.1) биномы  $(1 + t)$  заменить на соответствующие полиномы вида

$$1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \dots;$$

если никакие ограничения на повторные появления элементов не наложены, или на полиномы вида

$$\frac{t^{k_1}}{k_1!} + \frac{t^{k_2}}{k_2!} + \dots + \frac{t^{k_e}}{k_e!};$$

если соответствующий элемент допускает  $k_1, k_2, \dots, k_e$  повторений в выборках. Представление этого произведения в виде ряда по степеням  $t$  дает в качестве коэффициентов при  $t^r/r!$  числа  $r$ -перестановок, допускающих указанные выше повторения.

Производящие функции для упорядоченных выборок называют экспоненциальными потому, что производящая функция для  $g$ -перестановок с неограниченным числом повторений из  $n$  элементов имеет вид степени ряда для экспоненциальной функции  $e^t$ :

$$\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots\right)^n = e^{nt} = \sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{t^r}{r!};$$

что позволяет записать ее весьма компактно. В частности, если наложить дополнительные условия, что каждый элемент должен появиться хотя бы один раз, то производящая функция будет:

$$\left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots\right)^n = (e^t - 1)^n.$$

Частые повторения одних и тех же вычислительных ситуаций, выражений и величин приводят к появлению специальных чисел. Их часто открывают и переоткрывают в разных частях математики. Чтобы избежать ненужных переоткрытий, значения специальных чисел табулируют. Приведем некоторые сведения об этих числах.

**Числа Стирлинга.** Их получают из хорошо известного комбинаторного выражения следующим образом:

$$(t)_n = t(t-1)\dots(t-n+1) = \sum_{k=0}^n s(n,k)t^k, \quad n > 0.$$

Коэффициенты  $s(n,k)$  называются **числами Стирлинга 1-го рода**. Обратные им числа  $S(n,k)$ , определяемые из соотношения:

$$t^n = \sum_{k=0}^n s(n,k) (t)_n, \quad n > 0,$$

называются **числами Стирлинга 2-го рода**. Принимается, что  $(t) = t^0 = s(0,0) = 1$ .

Функции  $(t)_n$  и  $t^n$  являются производящими для **чисел Стирлинга** соответственно 1-го и 2-го рода.

**Числа Фибоначчи.** Числа  $f(n)$  называют числами Фибоначчи, если

$$\begin{aligned} f(0) &= f(1) = 1; \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$



следовательности чисел  $c_0, c_1, \dots, c_k, \dots$  является алгебраическая дробь

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1}}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}. \quad (1.3.2.4)$$

На первый взгляд кажется, что мы мало выиграли при замене рекуррентного соотношения производящей функцией. Ведь все равно придется делить числитель на знаменатель, а это приведет к тому же самому рекуррентному соотношению (1.3.2.3). Но дело в том, что над дробью можно выполнять некоторые алгебраические преобразования, а это облегчает отыскание чисел  $c_k$ .

Рассмотрим, как с помощью алгебраических преобразований производящих функций можно решать рекуррентные соотношения. Предположим, что знаменатель дроби (1.3.2.4) разложен на множители первой степени

$$\varphi(x) = b_m (x - \alpha_1)^r \dots (x - \alpha_k)^s.$$

Для этого надо предварительно решить уравнение  $b_0 + \dots + b_mx^m = 0$ , т.е. характеристическое уравнение соотношения (1.3.2.3).

Ясно, что дробь (1.3.2.4) получилась в результате приведения к одному знаменателю следующих элементарных дробей:

$$\frac{A_{11}}{(x - \alpha_1)^r}, \frac{A_{12}}{(x - \alpha_1)^{r-1}}, \dots, \frac{A_{1,r-1}}{(x - \alpha_1)},$$

$$\frac{A_{k1}}{(x - \alpha_k)^s}, \frac{A_{k2}}{(x - \alpha_k)^{s-1}}, \dots, \frac{A_{k,s-1}}{(x - \alpha_k)}.$$

Другими словами:

$$\frac{a_0 \dots a_{m-1} x^{m-1}}{b_m (x - \alpha_1)^r \dots (x - \alpha_k)^s} = \frac{A_{11}}{(x - \alpha_1)^r} + \dots + \frac{A_{1,r-1}}{(x - \alpha_1)} + \dots + \frac{A_{k,s-1}}{(x - \alpha_k)} + \dots$$

Здесь нам неизвестны коэффициенты  $A_{11}, \dots, A_{k,s-1}$ .

Чтобы найти эти коэффициенты, нужно умножить обе части равенства на знаменатель  $(x - \alpha_1)^r \dots (x - \alpha_k)^s$ , раскрыть скобки и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ . Из получившейся системы уравнений мы и находим искомые коэффициенты.

Иногда удастся обойтись и без решений системы уравнений. Пусть, например, надо разложить дробь

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

Так как  $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 2)$ , то это разложение имеет вид:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{(x - 1)(x + 2)(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{(x - 1)} - \frac{B}{(x + 1)} - \frac{C}{(x - 2)} - \frac{D}{(x + 2)}.$$

Приводя к одному знаменателю, получаем, что  $x^3 - 2x^2 + 6x + 1 = A(x + 1)(x - 2)(x + 2) + B(x - 1)(x - 2)(x + 2) + C(x - 1)(x + 1)(x + 2) + D(x - 1)(x - 2)(x + 1)$ .

Это равенство должно выполняться при всех значениях  $x$ . Но при  $x = 1$ , мы получаем  $-6A = 6$ . Поэтому  $A = -1$ . Точно так же, полагая  $x = -1$ ,  $x = 2$ ,  $x = -2$ , находим  $B = -4/3$ ,  $C = 13/12$ ,  $D = 9/4$ . Таким образом,

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{1}{(x - 1)} - \frac{4}{3(x + 1)} - \frac{13}{12(x - 2)} - \frac{9}{4(x + 2)}.$$

Для дробей вида  $A/(x - a)^r$  разложение в ряд получается по формуле Ньютона. Например,

$$\frac{13}{12(x - 2)} = \frac{13}{24} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1} = \frac{13}{24} \left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots\right].$$

Применяя такое разложение ко всем дробям, получаем, что 
$$\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} = (1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots) - \frac{4}{3}(1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots) - \frac{13}{24} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots\right) + \frac{9}{4} \left(1 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \dots + \frac{(-1)x^n}{2^n} + \dots\right).$$

Группируя члены с одинаковыми степенями  $x$ , получаем, что коэффициент при  $x^n$  выражается формулой

$$C_n = 1 - \frac{4}{3}(-1)^n - \frac{13}{24 * 2^n} + \frac{9(-1)^n}{8 * 2^n}.$$

Ранее мы уже отметили, что *задача о разложении алгебраической дроби в степенной ряд равносильна задаче о решении некоторого рекуррентного соотношения* при заданных начальных условиях. Таким образом, с помощью разложения дробей на эле-

ментарные и последующего разложения полученных элементарных дробей в степенные ряды можно решать линейные рекуррентные соотношения с построенными коэффициентами.

Итак, если задано рекуррентное соотношение (1.3.2.3) и значения  $c_0, \dots, c_{m-1}$ , то сначала надо по формулам (1.3.2.2) найти значения  $a_0, \dots, a_{m-1}$ . Они дают коэффициенты многочлена, стоящего в числителе дроби

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k + \dots \quad (1.3.2.5)$$

Знаменатель этой дроби равен  $b_0 + \dots + b_mx^m$ . Найденную дробь  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  надо разложить на элементарные дроби, после чего каждую элементарную дробь разложить в степенной ряд по формуле Ньютона. Коэффициент при  $x^k$  в полученном ряде и дает значение  $c_k$ .

В качестве примера решим рекуррентное соотношение  $c_{k+2} - 5c_{k+1} + 6c_k = 0$  при начальных условиях  $c_0 = 1, c_1 = -2$ . Здесь  $b_0 = 1, b_1 = -5, b_2 = 6$ .

Из формулы (1.3.2.2) получаем, что  $a_0 = b_0c_0 = 1; a_1 = b_0c_1 + b_1c_0 = -7$ .

Поэтому числитель дроби (1.3.2.5) равен  $1 - 7x$ . Знаменатель этой дроби получается из соотношения (1.3.2.1). Он имеет вид  $x^2 - 5x + 6$ . Значит, для отыскания решения нам надо разложить в степенной ряд дробь

$$\frac{1-7x}{x^2-5x+6},$$

но  $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$  и поэтому

$$\frac{1-7x}{x^2-5x+6} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}.$$

Далее,  $1 - 7x = A(x - 3) + B(x - 2)$ . Отсюда  $B = -20, A = 13$ .

Значит,

$$\frac{1-7x}{x^2-5x+6} = \frac{13}{(x-2)} + \frac{20}{(x-3)} = -\frac{13}{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1} + \frac{20}{3} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{13}{2} \left( 1 + \frac{x}{2} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots \right) + \frac{20}{3} \left( 1 + \frac{x}{3} + \dots + \frac{x^n}{3^n} + \dots \right).$$

$$\text{Поэтому } C_n = -\frac{13}{2} \frac{1}{2^n} + \frac{20}{3} \frac{1}{3^n} = \frac{13}{2^{n+1}} + \frac{20}{3^{n+1}}.$$

В заключении к разделу производящих функций следует отметить, что вид производящих функций зависел и зависит от конкретных условий задач и построение их является делом искусства. Усложнение комбинаторных проблем и рассматриваемых в них множеств в течение дополнительного времени не приводило к открытию регулярного подхода к построению производящих функций. Существенный шаг в этом направлении был сделан в 1937 году Пойа. Значение его работы состояло в нахождении производящей функции для неэквивалентных комбинаторных объектов весьма общего вида. Сложность решаемой задачи состояла в том, что рассматривались элементы, которым были приданы веса, а понятие эквивалентности вводилось через группы перестановок.

#### 1.4 Метод включения и исключения

Данный метод применяется к задаче разделения множеств на подмножества в зависимости от того, обладают ли их элементы определенной совокупностью свойств или нет. Метод включения и исключения применяется широко и известен в различных модификациях под названиями: метод решета, логический метод, принцип перекрестной классификации, символический метод.

Пусть дано  $n$ -множество  $S$  некоторых элементов и  $N$ -множество свойств:  $p_1, p_2, \dots, p_N$ , которыми элементы множества  $S$  могут как обладать, так и не обладать. Выделим какую-либо  $g$ -выборку свойств  $(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r})$ . Число элементов  $s \in S$ , каждый из которых обладает всеми  $g$  выбранными свойствами, обозначим через  $n(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r})$ . Отсутствие у элементов какого-либо свойства, например  $p_i$ , будем обозначать через  $\overline{p_i}$ . Таким образом, число элементов, обладающих, скажем, свойствами  $p_1, p_3, p_5$  и не обладающих свойствами  $p_2, p_4, p_6$ , запишется как  $n(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ .

Рассмотрим два простых примера:

а) имеется только одно свойство  $p$ , тогда, очевидно,  $n(\overline{p}) = n - n(p)$ ;

б) имеется конечное число свойств  $p_1, p_2, \dots, p_N$ , не совместимых друг с другом, снова очевидно, что

$$n(\overline{p_1 p_N}) = n - \sum_{i=1}^N n(p_i).$$

Разумеется, что сущность метода на этих простых не выявляется достаточно полно. Перейдем к более общей постановке вопроса, когда элементы множества могут обладать комбинациями совместных свойств. В этом случае имеет место **теорема**:

Если даны  $n$ -множество элементов и  $N$ -множество свойств  $p_i, i = 1, 2, \dots, N$ , совместных между собой,

$$\begin{aligned} n(\overline{p_1 p_N}) = n - \sum_{i=1}^N n(p_i) + \sum_{i,j} n(p_i, p_j) - \sum_{i,j,k} n(p_i, p_j, p_k) + \dots + \dots + \\ + (-1)^N n(p_1, p_2, \dots, p_N). \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

При **доказательстве теоремы** ограничимся чисто логическими рассуждениями. Чтобы получить указанное в левой части равенства число элементов, не обладающих ни одним из указанных свойств, необходимо из  $n$ -множества исключить подмножество элементов, обладающих свойством  $p_1$ , затем – свойством  $p_2$  и т. д., т.е.  $\sum_i n(p_i)$  элементов. Однако при этом элементы, имеющие

два свойства, скажем  $p_2$  и  $p_1$ , оказались исключенными дважды (сначала как обладающие свойством  $p_2$ , а затем как обладающие свойством  $p_1$ ). Значит, надо возратить все множества, элементы которых обладают двумя свойствами, т.е. прибавить  $\sum_{i,j} n(p_i, p_j)$  элементов. Но при этом элементы, обладающие тремя

свойствами, скажем  $p_1, p_2, p_k$ , оказались включенными дважды (в первом слагаемом  $n$  и как обладающие свойствами  $p_1$  и  $p_2$ ), следовательно, надо вычесть  $\sum_{i,j,k} n(p_i, p_j, p_k)$ . Рассуждая далее анало-

гичным образом, получим алгоритм для вычисления  $n(\overline{p_1 p_N})$ , состоящий в попеременном отбрасывании и возвращении подмножеств. Это и определило появление названия: метод включения и исключения.

Пусть теорема справедлива для  $N=1$ :  $n(\bar{p}) = n - n(p)$ .

В соответствии с формулировкой теоремы мы можем написать также:

$$n(\overline{p_1, p_2, \dots, p_N}) = n(\overline{p_1, p_2, \dots, p_{N-1}}) - n(\overline{p_1, p_2, \dots, p_{N-1}, p_N}).$$

Пусть теорема верна для  $N-1$  свойств, т.е.

$$n(p_1, p_2, \dots, p_{N-1}, p_N) = n(p_N) - \sum_i n(p_i, p_N) + \dots + (-1)^{N-1} n(p_1, p_2, \dots, p_N).$$

Перейдем к случаю, когда имеется  $N$  свойств. Применим полученное соотношение для числа  $n(p_1, p_2, \dots, p_{N-1}, p_N)$ :

$$n(p_1, p_2, \dots, p_{N-1}, p_N) = n(p_N) - \sum n(p_i, p_N) + \dots + (-1)^{N-1} n(p_1, p_2, \dots, p_N).$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получим, очевидно, утверждение теоремы.

Характер доказательства таков, что его можно применить для любой комбинации свойств как выполняющихся, так и не имеющих места. Другими словами, в левой части доказанного равенства может стоять не только  $n(\overline{p_1, p_2, \dots, p_N})$ , но и, например,  $n(\overline{p_2, p_4, p_1, p_3})$ . Теорема формулируется при относительной совокупности  $p_2$  и  $p_4$  с обязательным выполнением  $p_1$  и  $p_3$  следующим образом:

$$n(\overline{p_2, p_4, p_1, p_3}) = n(p_1, p_3) - n(p_1, p_3, p_2) + n(p_1, p_3, p_2, p_4).$$

Дальнейшее усложнение метода связано с введением весов элементов. Веса – это числовые характеристики элементов множеств, определяемые условием задачи.

Пусть задано  $n$ -множество  $S$  и каждому элементу  $s_i \in S$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , приписан вес  $V(s_i)$ . Из  $N$ -множества свойств  $p_1, p_2, \dots, p_N$  возьмем  $r$ -выборку  $p_{i_1}, \dots, p_{i_r}$  и обозначим сумму весов элементов, обладающих всеми  $r$  выбранными свойствами, через  $V(p_{i_1}, \dots, p_{i_r})$ . А сумму, распространенную на все возможные  $r$ -выборки свойств, обозначим через  $\sum (p_{i_1}, \dots, p_{i_r}) = V(r)$ . Для случая  $r = 0$  соответствующий символ  $V(0)$  будет обозначать сумму весов всех элементов множества  $S$ . Предыдущая теорема при этом переформулируется так:

Если даны  $n$ -множество  $S$ , каждый элемент которого имеет вес, и  $N$ -множество свойств, то сумма  $V_N(0)$  весов элементов, не

удовлетворяющих ни одному из выданных свойств, определяется по формуле:

$$V_N(0) = V(0) - V(1) + V(2) - \dots + (-1)^N V(N).$$

Таким образом, чтобы получить искомую сумму весов, надо: а) взять сумму весов всех элементов множества; б) из нее вычесть сумму весов элементов, обладающих хотя бы одним свойством; в) возратить (прибавить) сумму всех элементов, имеющих не менее двух свойств, и т.д.

В самом деле, всякий элемент  $s_i \in S$ , если он имеет  $t > 0$  свойств, вносит свой вес  $V(s_i)$  в первое слагаемое один раз, во второе  $t$  раз, в третье  $-\binom{t}{2}$  раз и т. д., а всего  $\binom{t}{0} - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - \dots + (-1)^t \binom{t}{t} = \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} = 0$  раз, а это выражение равно нулю. В этом легко убедиться, представив, что это выражение является частным значением разложения  $(1+t)^n|_{t=-1} = 0$ .

Если все элементы  $s_i \in S$  имеют единый вес, то сумма весов равна числу слагаемых в сумме. В этом случае  $V(s) = n$ , а  $V_N(0)$  равно числу элементов множества  $S$ , не удовлетворяющих ни одному из  $N$  свойств; формула, получающаяся при этом, — это формула (1.4.1).

Имеется теорема, которая является обобщением предыдущей.

**Теорема.** Сумма весов элементов  $n$ -множества  $S$ , удовлетворяющих  $r$ -выборке из  $N$ -множества свойств  $p_1, p_2, \dots, p_N$ , находится по формуле:

$$V_N(r) = V(r) - \binom{r-1}{2} V(r+2) - \dots + (-1)^{N-r} V(N).$$

**Доказательство** данной теоремы аналогично предыдущей.

Область применения метода включения и исключения довольно широка. Всюду, где речь идет о разделениях дискретных множеств, производимых в зависимости от наличия (или отсутствия) у элементов определенных свойств, этот метод появляется, иногда в различных модификациях. К числу задач, решаемых с помощью данного метода, относятся задачи о беспорядках, ряд задач теории чисел, а также некоторых задач в теории вероятности.

В качестве примера рассмотрим задачу о беспорядках, иначе называемой задачей о встречах.

Пусть имеется конечное упорядоченное множество чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ . Для них могут быть образованы перестановки  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Число всех перестановок  $S = n!$ . Среди этих перестановок имеются такие, где ни один элемент не сохранил своего первоначального места:  $a_i \neq i, i = 1, 2, \dots, n$ . Такие перестановки называют беспорядками. Сколько существует беспорядков?

Множество  $n$  элементов рассматривается по отношению к множеству свойств элементов оставаться на своем месте:  $p_i \{ a_i = i, i = 1, 2, \dots, n \}$ .

$N(S)$  соответствующих перестановок равно  $(n - s)!$ . Число беспорядков тогда находится с помощью метода включения и исключения:

$$N(0) = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^s \binom{n}{s}(n-s)! + \dots = \\ = n!(1 - 1 + 1/2! - 1/3! + \dots + (-1)^n/n!),$$

что является целым числом, ближайшим к  $n!e^{-1}$ . Если речь идет не о беспорядках, а о числе перестановок, в которых остаются на своих местах  $S$  элементов, то:

$$N(S) = -n!/s! (1 - 1 + 1/2! - 1/3! + \dots + (-1)^{n-s} 1/(n-s)!).$$

## 1.5 Системы различных представителей

Здесь мы рассмотрим один из комбинаторных подходов к характеристике структуры конечных множеств. Уже по названию можно понять, что основной идеей является замена системы множеств собранием их представителей.

Пусть имеются  $n$ -множество  $S$  и множество  $P(s)$  всех его подмножеств. Пусть  $M(s) = (s_1, s_2, \dots, s_m)$  есть некоторая  $m$ -выборка из  $S$ . Если выборке  $M(s)$  можно сопоставить (не обязательно однозначно) выборку, такую, что элементы  $a_i, i = 1, 2, \dots, m$  попарно различны и при этом  $a_i \in s_i, i = 1, \dots, m$ , то говорят, что элемент  $a_i$  представляет множество  $s_i$ , а вся выборка  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  называется системой различных представителей с.р.п. для  $M(s)$ . Заметим сразу же, чтобы избежать неясностей, что в с.р.п. если  $i \neq j$ , то  $a_i \neq a_j$ , даже если  $s_i = s_j$ . Если множество появляется несколько раз, то всякий раз оно должно иметь представителя, отличного от всех других.

Например, выборка из пяти подмножеств  $S_i$ :

$$S_1 = \{1,2,3\},$$

$$S_2 = \{,2,4\},$$

$$S_3 = \{,2,5\},$$

$$S_4 = \{,3,4,5,6\},$$

$$S_5 = \{,3,4,5,6\}$$

может быть представлена следующей с.р.п.:  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 3, a_5 = 4$ .

Но если взять множества  $\{1,2\}, \{1,2\}, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \{3,4,5,6\}$ , то мы не сможем получить ни одной с.р.п.

На вопрос о том, существует ли с.п.р. для заданного семейства множеств, отвечает теорема Ф. Холла (1935 г.).

**Теорема Ф. Холла.** Подмножество  $S_1, S_2, \dots, S_m$  имеет с.п.р. тогда и только тогда, когда объединение любой  $k$ -выборки этих множеств содержит не менее  $k$  элементов. Иными словами, с.п.р. для  $S_1, S_2, \dots, S_m$  существует тогда и только тогда, когда  $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{i_k}$  состоит не менее чем из  $k$  элементов, при этом  $k = 1, 2, \dots, m$ , а  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  – любая  $k$ -выборка из  $1, 2, \dots, m$ .

Необходимость почти очевидна, т.к. существование с.п.р. обеспечивает наличие необходимого числа элементов в качестве различных представителей. Что касается достаточности, то приведем для нее усовершенствованную формулировку, которая дает нам также нижнюю грань для числа самих с.п.р.

**Теорема.** Пусть семейство  $M(s) = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  удовлетворяет необходимому условию существования с.п.р., и пусть наименьшее каждое из множеств  $S_1, S_2, \dots, S_m$  состоит не менее чем из  $t$  элементов. Тогда

а) если  $t \leq m$ , то  $M(s)$  имеет не меньше, чем  $t!$  с.п.р.;

б) если  $t > m$ , то  $M(s)$  имеет не меньше, чем  $t!/(t-m)!$  с.п.р.

Алгоритм, позволяющий подобрать с.п.р. для конечного числа множеств или показать, что такой системы для данного набора множеств не существует, дал Ф. Холл в качестве доказательства теоремы Ф. Холла о различных представителях.

Пусть задано  $n$  множеств. Требуется найти для них с.п.р. или показать, что этой системы не существует. Пронумеруем множества  $S_1, S_2, \dots, S_n$  и зафиксируем порядок, в котором они пронуме-

рованы. Произвольным образом выберем элемент первого множества:  $a_1 \in S_1$  в качестве его представителя. Поочередно будем выбирать представителей других множеств:  $a_2 \in S_2$ ,  $a_3 \in S_3$ , заботясь о том, чтобы каждый из них был отличен от любого другого. Если такие операции будут доведены до  $a_n \in S_n$  включительно, то мы получим искомую с.п.р.

Может получиться, что в ходе постепенного подбора  $t$  шагов мы дойдем до некоторого  $t$ -множества  $S_t$  ( $t < n$ ), элементы которого  $b_1, b_2, \dots, b_t$  уже были выбраны представителями других элементов. Это еще не означает, что с.п.р. не существует. Будем поочередно брать все те множества, представителями которых являются эти элементы, и удалять из них все элементы, которые уже являются представителями множеств, а оставшиеся приписывать к  $b_1, b_2, \dots, b_t$  до тех пор, пока: 1) либо мы встретим элемент  $b_{i_1} \in S_{j_1}$  ( $i_1 > t$ ;  $j_1 < t$ ), который не является еще представителем; 2) либо мы не найдем элемента, который не был бы представителем. В этом случае мы можем быть убеждены, что с.п.р. не существует.

Если же имеет место 1), т.е. на некотором этапе мы находим  $b_{i_1} \in S_{j_1}$  ( $i_1 > t$ ;  $j_1 < t$ ), не являющийся до сих пор представителем, то это означает, что представителем  $S_{j_1}$  уже был выбран другой элемент  $b_{i_2}$  ( $i_2 > i_1$ ). Если  $i_2 > t$ , то значит  $b_{i_2} \in S_{j_2}$ , представителем которого является  $b_{i_3}$  ( $i_3 > i_2$ ), и т. д. Таким образом, возникает последовательность  $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_m}$ , индексы которой убывают ( $i_m \leq t$ ), причем в этой последовательности каждый ее член входит в множество, представителем которого является следующий член. Заменяем представителей, выбирая элементы:  $b_{i_1}$  для  $S_{j_1}$ ,  $b_{i_2}$  для  $S_{j_2}, \dots$ ,  $b_{i_{m-1}}$  для  $S_{j_{m-1}}$ . Элемент  $b_{i_m}$  в результате этой замены освобождается для выбора в качестве представителя  $S_t$ . Итак,  $S_1, \dots, S_t$  имеют различных представителей, и мы можем следовать тем же путем, имея в виду либо возможность дойти до  $S_n$  и получить полную с.п.р., либо встретить случай 2) и установить несуществование с.п.р.

Заключение о числе с.п.р. получается из приведенного алгоритма как следствие. Действительно, если с.п.р. существует, то это значит, что существует также некоторое множество, каждый элемент которого может быть выбран в качестве его представите-

ля в с.п.р. Множество, которое может иметь в качестве представителя любой свой элемент, обозначим через  $S_1$ . Выбор представителя в  $S_1$  можно осуществить не менее, чем  $t$  способами. Вычеркнем теперь элемент, выбранный в качестве представителя для  $S_1$ , из  $S_2, \dots, S_n$  и получим множества  $S_2', \dots, S_n'$ , которые обладают с.п.р. и в которых наименьшее множество содержит не меньше, чем  $t - 1$  элементов. Продолжая дальше таким же образом, мы можем получить не меньше, чем  $t(t - 1) \dots (t - n + 1)$  с.п.р., если  $t \geq n$  и не меньше, чем  $t!$  с.п.р., если  $t < n$ .

Имеет место теорема Кенига, эквивалентная теореме Ф. Холла.

**Теорема Кенига.** Если прямоугольная матрица составлена из нулей и единиц, то минимальное число линий (строк либо столбцов), которые содержат все единицы, равно максимальному числу единиц, которые могут быть выбраны так, чтобы никакие две из них не лежали на одной и той же линии.

Параллель между теоремами Холла и Кенига можно провести следующим образом. Пусть даны множества  $S_1, \dots, S_n$  с элементами  $a_1, \dots, a_m$ . Образует матрицу  $A = (a_{ij})$ , где  $a_{ij} = 1$ , если  $a_j \in S_i$ , и  $a_{ij} = 0$  в противоположном случае. Если единицы в  $A$  СОДЕРЖАТСЯ В КАКИХ-ЛИБО  $R$  СТРОКАХ И  $S$  СТОЛБЦАХ и  $r + s < n$ , то в  $k = n - r$  строках, не входящих в число покрывающих строк, единицы имеются только в  $s < n - r = k$  столбцах и для этих  $k$  множеств отсутствует  $k$  различных элементов. Но если минимальное покрытие линиями содержит  $r + s = n$  линий, то по теореме Кенига имеется  $n$  единиц, из которых никакие две не лежат на одной линии, и соответствующие этим единицам элементы образуют с.п.р. для  $S_1, \dots, S_n$ .

## 2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

### 2.1 Основные определения

Понятие графа служит для математического изучения таких ситуаций, когда имеются совокупности объектов, причем объекты второй группы играют роль связей, соединяющих пары объектов первой группы между собой. Конкретно речь может идти, например, об отдельных деталях электрической схемы и соединяющих их проводниках, городах и соединяющих их дорогах, о людях и отношениях знакомства между ними, о числах и отношениях кратности и т.д. Для одной и той же пары объектов первой группы допускается одновременное наличие нескольких связей, среди которых допускаются как односторонние, так и двухсторонние; возможны также связи, соединяющие один объект с самим собой.

Точное определение графа  $L$  состоит в том, что задаются два множества  $X$  и  $U$  (первое из которых обязательно непустое), трехместный предикат  $P$ , указывающий, какую пару элементов первого множества соединяет тот или иной элемент второго:

$$L=(X,U,P).$$

Элементы множества  $X$  называют *вершинами*, элементы  $U$  – *ребрами*, предикат  $P$  – *инцидентором*. Высказывание  $P(x,u,y)$  читается так: «ребро  $u$  соединяет вершину  $x$  с вершиной  $y$ ».

Рассмотрим граф, приведенный на рисунке 2.1.1. Здесь  $X=\{a,b,c,d\}$ ,  $U=\{1,2,3,\dots,9\}$ , инцидентор  $P$  определен так: одиннадцать значений  $P(a,1,a)$ ,  $P(a,2,a)$ ,  $P(a,3,b)$ ,  $P(a,4,b)$ ,  $P(b,4,a)$ ,  $P(a,5,c)$ ,  $P(a,6,c)$ ,  $P(c,6,a)$ ,  $P(c,7,b)$ ,  $P(c,8,b)$ ,  $P(b,9,c)$  – истинны, а остальные 133 ложны.

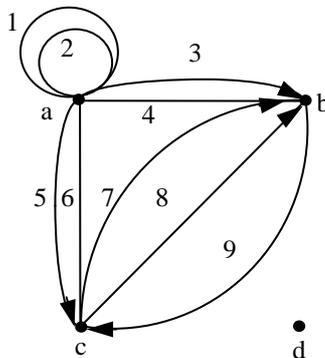


Рис. 2.1.1

Легко проверить, что для каждого  $U \in \mathbf{U}$  истинно одно и только одно из следующих трех высказываний:

$$\begin{aligned} & \exists x, y [x \neq y \& P(x, u, y) \& \neg P(y, u, x), \exists x P(x, u, x), \\ & \exists x, y [x \neq y \& P(x, u, y) \& P(y, u, x)]. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Если высказывание (2.1) в отношении  $U$  – истинно, то  $U$  называется *дугой* и считаем,  $u \in \vec{U}$  – множество дуг.

Следующим возможным высказыванием является

$$\exists x, y \in \vec{X} \{x \neq y, \& P(x, u, y) \& P(y, u, x)\}. \quad (2.1.2)$$

Если истинно (2.2), то  $u$  называется *звеном*,  $u \in \tilde{U}$  – множество звеньев.

И последним возможным высказыванием является

$$\exists x \in X \{P(x, u, x)\}. \quad (2.1.3)$$

В этом случае  $u$  называется *петлей*  $u \in \bar{U}$ .

Итак, множество ребер может быть представлено в виде

$$U = \vec{U} \cup \tilde{U} \cup \bar{U}.$$

Пусть для некоторой тройки элементов  $x, u, y$  истинно высказывание  $P(x, u, y)$ , т.е. ребро  $u$  соединяет вершину  $x$  с вершиной  $y$ ; если при этом еще и выполняется (2.1.1), т.е.  $u \in \vec{U}$ , то говорят: «дуга  $u$  идет из вершины  $x$  в вершину  $y$ »; если выполняется (2.1.2), т.е.  $u \in \tilde{U}$ , то говорят: «звено  $u$  соединяет вершины  $x$  и  $y$ »; если выполняется (2.1.3), т.е.  $u \in \bar{U}$  (и, значит,  $x=y$ ), то говорят: « $u$  есть петля при вершине  $x$ ».

Для графа, изображенного на рисунке 2.1.1, имеем:  $\vec{U} = \{3, 5, 7, 8, 9\}$ ,  $\tilde{U} = \{4, 6\}$  и  $\bar{U} = \{1, 2\}$ .

Две вершины  $x$  и  $y$  называются *смежными*, если существует по крайней мере одно соединяющее их ребро; в частности, вершина смежна сама с собой в том и только том случае, когда при ней имеется хотя бы одна петля.

С помощью инцидентора  $P$  определим еще три двухместных предиката

$$J^+(x, u) \Leftrightarrow \exists z \in X \{P(x, u, z)\}; \quad (2.1.4)$$

$$J^-(x, u) \Leftrightarrow \exists z \in X \{P(z, u, x)\}; \quad (2.1.5)$$

$$J^0(x, u) \Leftrightarrow P(x, u, x). \quad (2.1.6)$$

## 2.2 Задание графов с помощью матриц

Конкретный граф полностью задается множествами  $X$ ,  $U$  и инцидентором  $P$ . В свою очередь инцидентор  $P$ , будучи трехместным предикатом, требует трехмерной таблицы истинности – трехмерной матрицы с  $|X^2| \cdot |U|$  элементами ( $A$  – мощность множества  $A$ ).

Если использовать три двухместных предиката  $I^+, I^-, \Pi^0$ , то можно обойтись тремя двумерными таблицами.

Однако все эти способы задания графа в виде матриц неэффективны.

Наиболее эффективным является задание графа с помощью двумерной *матрицы инциденций*.

*Матрицей инциденций* графа называется прямоугольная таблица  $A = \|a_{ij}\| = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$ ; элементы которой  $a_{i,j}$  принадлежат свободному полукольцу  $K$  с нулем  $0$ , порожденному четырьмя образующими  $\xi, \eta, \zeta, \theta$ , и определяются по графу  $L$  следующим образом:

если  $U_j$  – дуга, исходящая из вершины  $x_i$ , то  $a_{ij} = \xi$ ;

если  $U_j$  – дуга, заходящая в  $x_i$ , то  $a_{ij} = \eta$ ;

если  $U_j$  – петля при вершине  $x_i$ , то  $a_{ij} = \zeta$ ;

если  $U_j$  – звено, инцидентное  $x_i$ , то  $a_{ij} = \theta$ ;

и если ребро  $U_j$  неинцидентно вершине  $x_i$ , то  $a_{ij} = 0$ .

Для рассматриваемого графа (рис. 2.1.1) матрица инциденций имеет вид:

$$A = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \left| \begin{array}{cccccccccc} \eta & \eta & \xi & \theta & \xi & \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & \theta & 0 & 0 & \eta & \eta & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \theta & \xi & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8 \ u_9$$

Ясно, что каждый столбец матрицы инциденций содержит либо один, либо два ненулевых элемента, причем в первом случае это обязательно  $\zeta$ , а во втором  $\xi$  и  $\eta$  или  $\theta$  и  $\theta$ .

Для описания характера связи между парами вершин графа вводится **матрица соседства** вершин:

$$B = A * A^T.$$

Например, для рассматриваемого в качестве примера графа имеем:

$$b_{11} = \sum_{k=1}^g a_{1k} a_{k1} = \zeta^2 + \zeta^2 + \xi^2 + \theta^2 + \xi^2 + \theta^2 = 2\zeta^2 + 2\xi^2 + 2\theta^2;$$

$$b_{12} = \sum_{k=1}^g a_{1k} a_{k2} = \xi\eta + \theta^2.$$

В общем случае элемент матрицы имеет вид:

$$b_{ii} = S^+(x_i)\xi^2 + S^-(x_i)\eta^2 + S^0(x_i)\zeta^2 + \tilde{S}(x_i)\theta^2;$$

$$b_{ij} = S^+(x_i; x_j)\xi\eta + S^-(x_i; x_j)\eta\xi + \tilde{S}(x_i; x_j)\theta^2 (i \neq j),$$

где  $S^+(x_i)$  – количество дуг, исходящих из вершины  $x_i$ ;

$S^-(x_i)$  – количество дуг, заходящих в  $x_i$ ;

$S^0(x_i)$  – количество петель при вершине  $x_i$ ;

$\tilde{S}(x_i)$  – количество звеньев, инцидентных  $x_i$ ;

$S^+(x_i; x_j)$  – количество дуг, идущих из  $x_i$  в  $x_j$ ;

$S^-(x_i; x_j)$  – количество дуг, идущих из  $x_j$  в  $x_i$ ;

$\tilde{S}(x_i; x_j)$  – количество звеньев, соединяющих  $x_i$  и  $x_j$ .

Число  $Sx = S^+(x) + S^-(x) + S^0(x) + \tilde{S}(x)$  называется **степенью**, а  $V(x) = S(x) + S^0(x)$  – валентностью вершины  $X$ .

При переходе от матрицы инциденции к матрице соседства теряется индивидуализация ребер графа, иначе говоря, матрица  $B$  определяет граф с точностью до перенумерования ребер.

Часто используется также так называемая матрица смежности

$$R = |r_{ij}| (i, j = \overline{1, n}), \text{ где}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & i \neq j, \\ S^0(x_j)\zeta^2, & i = j. \end{cases}$$

Значительно более редко используется **матрица соседства ребер** графа  $H = A^T \cdot A$ .

Во многих случаях, когда требуется лишь частичная информация о графе либо граф заведомо имеет специальный вид, матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $R$  и  $H$  удается значительно упростить, переходя от полукольца  $K$  к новому полукольцу путем наложения тех или иных определяющих соотношений на образующие  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\theta$ .

### 2.3 Основные типы графов

Пусть имеется граф  $L=(X,U,P)$ , где  $U = \vec{U} \cup \tilde{U} \cup \overset{\circ}{U}$ .

Если  $\tilde{U} = \emptyset$  – граф называется *орграфом* (ориентированным графом); при  $\vec{U} = \emptyset$  – *неорграф* (неориентированный граф); если  $\overset{\circ}{U} = \emptyset$  – то добавляют слова «без петель»; и  $U = \emptyset$  – *пустой* граф.

При изучении таких свойств графа  $\tilde{L}=(X,U;P)$ , которые зависят от направления его дуг, удобно пользоваться предикатом, называемым *полуинцидентором*:

$$\tilde{P}(x,u,y) \Leftrightarrow P(x,u,y) \vee P(y,u,x).$$

О неорграфе  $\tilde{L}=(X,U;\tilde{P})$  говорят, что он получен из графа  $L=(X,U;P)$  дезориентацией дуг.

*Униграфом* называется граф, в котором вершины могут быть соединены не более, чем одним ребром, то есть такой что

$$\forall u, v \forall x, y \{ \tilde{P}(x,u,y) \& \tilde{P}(x,v,y) \Rightarrow u = v \}$$

*Мультиграф* – это граф, не являющийся униграфом, т.е.  $p \geq 2$ .

*P-граф* – это мультиграф, в котором никакая пара вершин не соединена более чем  $p$  рёбрами.

*0-граф* – это пустой граф (все вершины между собой не связаны).

*1-граф* – это униграф (вершины связаны не более чем одним ребром).

Граф называется *полным*, если содержит все ребра, возможные при принадлежности графа данному классу и при неизменном множестве вершин. Например, в случае  $P$ -графа полнота означает, что при каждой вершине имеется ровно  $p$  петель, а каждая пара различных вершин соединена ровно  $p$  ребрами.

Граф общего вида, в котором две различные вершины всегда смежны, называется *плотным*.

## 2.4 Обыкновенные графы. Графы Кенига. Графы Бержа

Особо важную роль в теории графов и ее приложениях играют неориентированные униграфы без петель, называемые в дальнейшем для краткости *обыкновенными*.

Матрица соседства обыкновенного графа имеет вид:

$$B = \begin{vmatrix} \tilde{S}(x_1)\theta^2 & \tilde{S}(x_1x_2)\theta^2 & \dots & \tilde{S}(x_1x_2)\theta^2 \\ \tilde{S}(x_2x_1)\theta^2 & \tilde{S}(x_2)\theta^2 & \dots & \tilde{S}(x_2x_4)\theta^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{S}(x_nx_1)\theta^2 & \tilde{S}(x_nx_2)\theta^2 & \dots & \tilde{S}(x_n)\theta^2 \end{vmatrix},$$

где  $S(x_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \tilde{S}(x_i; x_j)$ , и при  $i \neq j$ .

$$S(x_i; x_j) = S(x_j; x_i) = \begin{cases} 1 & (1 - \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны, } 0 - \text{ в противном} \\ 0 & \end{cases}$$

случае).

Информация об обыкновенном графе не будет потеряна, если на полукольцо  $K$  будет наложено соотношение  $\theta^2=1$ . Также без потери информации о графе вместо матрицы  $B$  можно рассматривать матрицу смежности  $R$ .

Например, для графа, изображенного на рисунке 2.4 имеем:

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Матрица-соседства

Матрица-смежности

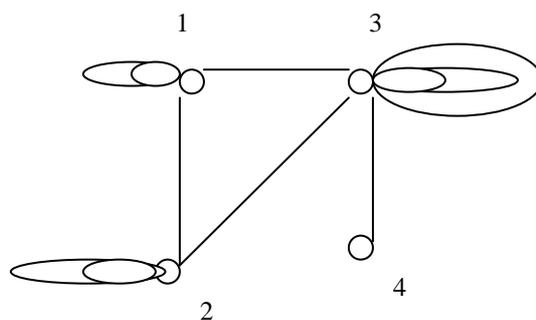


Рисунок 2.4

Обыкновенный граф обозначают  $(X, U)$ , подчеркивая, что его инцидентор полностью определяется заданием множеств  $X$  и  $U$ , так как

$$P(x, u, y) \leftrightarrow U = \tilde{x}\tilde{y} \ \& \ u \in U.$$

Обыкновенный граф называется **полным** (или плотным, что в данном случае одно и то же) и обозначается  $F_n$ , если всякие две различные его вершины смежны. **Пустой** обыкновенный граф обозначается  $E_n$ .

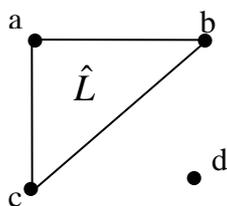
Часто при исследовании графа общего вида не требуется полная информация о графе, а необходимо лишь знать какие пары его различных вершин смежны, а какие нет; носителем такой информации является **скелет** графа, т.е. обыкновенный граф  $\tilde{L} = (x, \tilde{u})$  с прежним множеством вершин  $X$  и новым множеством ребер  $\hat{U}$ ,

$$\tilde{x}, \tilde{y} \in \hat{U} \leftrightarrow x, y \in X \ \& \ x \neq y \ \& \ \exists u \in U [P(x, u, y)].$$

Чтобы из матрицы смежности исходного графа  $L$  над свободным полукольцом  $K$  получить матрицу смежности его скелета  $\tilde{L}$ , достаточно на образующие полукольца наложить соотношение

$$\xi\eta = \eta\xi = \theta^2; \ \zeta^2 = 0; \ 2\theta^2 = \theta^2; \ \theta^2 = 1.$$

Так граф, изображенный на рисунке 2.1.1, имеем скелет:



$$R_{\hat{L}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Произвольный граф  $L$  является плотным тогда и только тогда, когда его скелет  $\hat{L}$  – полный.

### Графы Кёнига

Обыкновенный граф  $L=(X, U)$  называется **графом Кёнига**, если множество его вершин  $X$  можно представить в виде двух непересекающихся подмножеств  $X'$  и  $X''$  так, чтобы никакие вершины одного и того же подмножества не были смежны, т.е.

$$X = X' \cup X''; \ X' \cap X'' = \emptyset \ \text{и}$$

$$\forall x, y \in X [\tilde{xy} \in U \Rightarrow (x \in X' \& y \in X'') \vee (x \in X'' \& y \in X')].$$

Часто граф Кёнига записывают в виде  $(X', X'', U)$ .

Матрица смежности графа Кёнига полностью определяется своей прямоугольной подматрицей, строки которой отвечают вершинам множества  $X'$ , а столбцы –  $X''$ .

Граф Кёнига  $K_m = (X, Y, W)$ , в котором  $|X| = |Y| = |W| = m \geq 1$  и никакие два ребра не смежны, называется *паросочетанием*. Отображение  $\Delta$ , которое каждой вершине множества  $X$  относит вершину множества  $Y$  здесь является взаимно однозначным соответствием между этими множествами.

Одной из важных в прикладном отношении задач теории графов является задача нахождения наибольшего паросочетания, которая формулируется следующим образом: для данного графа  $L$  найти наибольшее натуральное число  $m = \pi(L)$ , при котором существует паросочетание  $K_m$ , являющееся частью  $L$ . Если  $L = (X', X'', W)$  – граф Кёнига, то под его паросочетанием понимается часть  $K_m = (Y', Y'', W')$ , удовлетворяющая условию  $Y' \in X' \& Y'' \in X''$ . Найти  $\pi(L)$  это значит выяснить, какое наибольшее количество вершин множества  $X'$  можно взаимно однозначно отобразить в  $X''$  при помощи рёбер из  $W$ .

*Теорема Кёнига-Холла:* Все множество  $X'$  графа Кёнига  $(X', X'', U)$  можно взаимно однозначно отобразить в  $X''$  при помощи рёбер  $U$  тогда и только тогда, когда

$$\forall A \subseteq X' (|\Delta A| \geq |A|).$$

Здесь  $\Delta A$  – подмножество вершин множества  $X''$ , смежных с вершинами из  $A$ .

Свойством, лежащим в основе определения графа Кёнига, может обладать любой, не только обыкновенный граф. Именно, граф  $L(X, U; P)$  называется *бихроматическим* (или *двудольным*), если множество  $X$  его вершин можно разбить на два непересе-

кающихся подмножества  $X'$  и  $X''$  так, чтобы две вершины одного и того же подмножества не были бы смежны (т.е. раскрасить все вершины графа  $L(X,U;P)$  двумя цветами, чтобы смежные вершины имели разные цвета).

Очевидно, что граф является бихроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит петель, а его скелет есть граф Кёнига.

### Венгерский алгоритм

Венгерский алгоритм (Эгервари 1931, Кун 1953) предназначен для решения так называемых *задач о назначении*, которые в свою очередь в своем простейшем виде сводятся к нахождению наибольшего паросочетания у заданного графа Кёнига.

Проиллюстрируем венгерский алгоритм на следующем примере.

Пусть имеется девять иностранных групп туристов  $T_1, \dots, T_9$ , причем гости группы  $T_1$  говорят на языке А, гости  $T_2$  – на Б,  $T_3$  – на В,  $T_4$  – на А,  $T_5$  – на Б,  $T_6$  – на Г,  $T_7$  – на Е,  $T_8$  – на Г,  $T_9$  – на Д; в свою очередь бюро «Интурист» располагает в данный момент десятью свободными переводчиками  $\Pi_1, \dots, \Pi_{10}$ , владеющими такими иностранными языками:  $\Pi_1$  – языком (А,В);  $\Pi_2$  – (А,Г);  $\Pi_3$  – (А);  $\Pi_4$  – (Б,В,Е);  $\Pi_5$  – (А,В);  $\Pi_6$  – (А),  $\Pi_7$  – (Г,Д);  $\Pi_8$  – (Б,Д);  $\Pi_9$  – (Б,Г,Е);  $\Pi_{10}$  – (А,Б). Необходимо взаимно однозначно прикрепить переводчиков к группам, чтобы в первую очередь было обслужено, возможно большее число групп.

Построим граф Кёнига  $L = (X_1, X_2, U)$  (рисунок 2.4.1), в котором вершинам множества  $X_1$  соответствуют переводчики  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{10}$ , вершинам  $X_2$  – группы туристов  $T_1, T_2, \dots, T_9$ . Смежность вершины  $\Pi_i \in X_1$  с вершиной  $T_j \in X_2$  означает владение  $i$ -го переводчика языком  $j$ -ой группы. Требуется найти в  $L$  паросочетание с наибольшим количеством  $\pi(L)$  ребер.

Теорема Кёнига–Орэ позволяет вычислить наибольшее значение для  $\pi(L)$ :

$$\pi(L) = |X_1| - \max(|A| - |\Delta A|).$$

Здесь  $\Delta A$  – подмножество вершин множества  $X_2$ , смежных с вершинами из  $A \subseteq X_1$ .

Для решения данной задачи представим граф  $L = (X_1, X_2, U)$  его матрицей смежности  $B = (b_{ij})$ ,  $i = \overline{1,10}$ ;  $j = \overline{1,9}$  (рисунок 2.4.2).

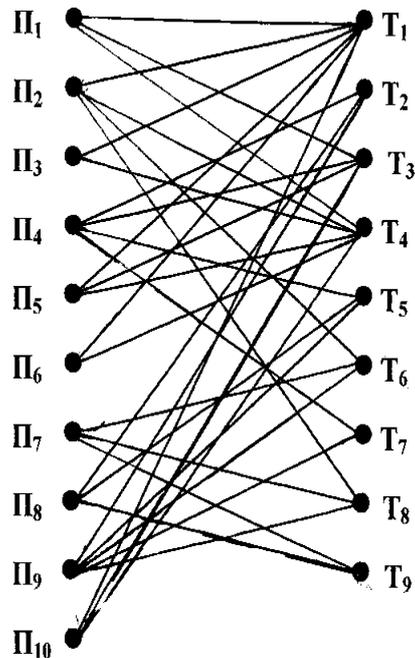


Рисунок 2.4.1

$B =$

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9
П1	1		1	1					
П2	1			1		1		1	
П3	1			1					
П4		1	1		1		1		
П5	1		1	1					
П6	1			1					
П7						1		1	1
П8		1			1				1
П9		1			1	1	1	1	
П10	1		1	1					

Рисунок 2.4.2

Строки матрицы  $B$  соответствуют элементам множества  $X_1$  (переводчики), столбцы – элементам множества  $X_2$  (туристы).

Элементы  $b_{ij} = \{1,0\}$ ;  $b_{ij} = 1$  – если  $i$ -й переводчик может обслуживать  $j$ -ю группу туристов,  $b_{ij} = 0$  – в противном случае.

**Алгоритм решения состоит в следующем.** Пусть некоторое паросочетание  $K=(Y_1, Y_2, V)$  уже построено (в начальный момент это пустое паросочетание,  $V=\emptyset$ ). Ребра графа  $L$ , принадлежащие  $V$  назовем «сильными», а ребра из  $U \setminus V$  – «слабыми». Вершину, инцидентную *сильному* ребру будем называть *насыщенной*, а вершину, не инцидентную *сильному* ребру, – *ненасыщенной*. Под «*чередующейся цепью*» будем понимать простую цепь, в которой слабые рёбра строго чередуются с сильными; такую цепь назовем *тонкой*. Примем, что её длина отрицательна, если начальная и конечная вершины – обе ненасыщенные.

Ясно, что при наличии у графа  $L$  с заданным паросочетанием  $K$  хотя бы одной тонкой чередующейся цепи  $Q$  можно вместо  $K$  построить новое паросочетание  $K'$ , содержащее на одно ребро больше. Для этого надо все *слабые* ребра цепи  $Q$  сделать *сильными*, а *сильные* – слабыми, не трогая рёбер вне  $Q$ . Иначе говоря, надо удалить из множества  $V$  все те рёбра, которые принадлежат цепи  $Q$ , и к остатку добавить рёбра  $Q$ , принадлежащие  $U \setminus V$ . В свою очередь, если у графа  $L$  с паросочетанием  $K'$  опять есть тонкая чередующаяся цепь, то аналогично предыдущему можно получить паросочетание  $K''$ , имеющее уже на два ребра больше исходного.

Оказывается, что если на каком-то этапе тонких чередующихся цепей больше нет, то полученное паросочетание  $K^*$  – наибольшее, т.е. содержит ровно  $\pi(L)$  ребер.

Процедура поиска тонкой чередующейся цепи в графе с заданным паросочетанием состоит в следующем: выбираем в  $X_1$  любую ненасыщенную вершину и строим из нее чередующуюся цепь, отмечая штрихом пройденные рёбра и не выбирая их в дальнейшем. Попав в уже пройденную вершину или такую вершину из  $X_1$ , которая не инцидентна ни одному еще не пройденному слабому ребру, возвращаемся на один шаг, отмечаем ребро вторым штрихом и пытаемся проложить чередующуюся цепь иначе, и т.д. В результате процесс либо оборвется в ненасыщенной вершине множества  $X_2$ , и мы получим искомую цепь (она со-

стоит из рёбер, отмеченных ровно одним штрихом), либо этот процесс приведёт нас в исходную вершину, и тогда надо начать аналогичный поиск с другой ненасыщенной вершины множества  $X_1$ .

В нашем конкретном примере всё решение выглядит следующим образом.

1. Задаём произвольно паросочетание  $K = \{(P_3 T_1), (P_2 T_4)\}$ .
2. Фиксируем насыщенные вершины –  $P_3, P_2$  и  $T_1, T_4$ .
3. Строим тонкую чередующуюся цепь  $Q: P_1 - T_1 - P_3 - T_4 - P_2 - T_8$ , которая начинается и заканчивается в ненасыщенных вершинах  $P_1$  и  $T_8$  и содержит сильные рёбра  $(P_3 - T_1)$  и  $(P_2 - T_4)$ .
4. Переименуем рёбра построенной тонкой цепи: теперь рёбра  $(P_3 - T_1)$  и  $(P_2 - T_4)$  – слабые, а рёбра  $(P_1 - T_1), (P_3 - T_4), (P_2 - T_8)$  соответственно стали сильными, вершины  $P_1, T_8$  – насыщенные. Новое паросочетание  $K'$  содержит уже три ребра.
5. Находим в графе новые ненасыщенные вершины  $T_3$  и  $P_7$ , которые смежны насыщенным концевым вершинам построенной тонкой цепи

$$P_1 - T_1 - P_3 - T_4 - P_2 - T_8.$$

6. Строим новую тонкую чередующуюся цепь  $Q: T_3 - P_1 - T_1 - P_3 - T_4 - P_2 - T_8 - P_7$ , которая содержит сильные рёбра  $(P_1 - T_1), (P_3 - T_4), (P_2 - T_8)$ .

7. Переименуем рёбра построенной тонкой чередующейся цепи: теперь рёбра  $(P_1 - T_1), (P_3 - T_4), (P_2 - T_8)$  – слабые, а рёбра  $(T_3 - P_1), (T_1 - P_3), (T_4 - P_2), (T_8 - P_7)$  – сильные. Новое паросочетание  $K''$  содержит уже четыре ребра.

8. Присоединим к построенной тонкой чередующейся цепи  $T_3 - P_1 - T_1 - P_3 - T_4 - P_2 - T_8 - P_7$  ещё два ребра:  $(T_3 - P_4)$  и  $(P_7 - T_6)$  и над новой чередующейся цепью  $Q = P_4 - T_3 - P_1 - T_1 - P_3 - T_4 - P_2 - T_8 - P_7 - T_6$  выполним преобразование, аналогичное тому, которое описано в п.п. 4,7, увеличив таким образом паросочетание  $K''$  ещё на одно ребро. Новое паросочетание  $K^V$  включает сильные рёбра –  $(P_4, T_3), (P_1, T_1), (P_3, T_4), (P_2, T_8), (P_7, T_6)$ .

Увеличить длину построенной цепи  $Q$ , проходящей через вершины  $P_4, T_3, P_1, T_1, P_3, T_4, P_2, T_8, P_7, T_6$ , нельзя, так как среди ненасыщенных вершин из множества  $X \setminus V$ , принадлежащих

разным подмножествам  $(X_1, X_2)$ , нет инцидентных концевым вершинам цепи  $Q$ .

Увеличить построенное паросочетание  $K^V$  можно добавлением к нему цепей длины, равной 1, т.е. рёбер  $(\Pi_8, T_9)$  и  $(\Pi_9, T_5)$  или  $(\Pi_9, T_7)$  и  $(\Pi_8, T_9)$ . Тогда количество рёбер  $\pi(L)$  паросочетания  $K^V$  станет равно 7.

$$Q = \Pi_4, T_3, \Pi_1, T_1, \Pi_3, T_4, \Pi_2, T_8, \Pi_7, T_6, \Pi_9, T_5, \Pi_8, T_2.$$

	T1+	T2*	T3+	T4+	T5+	T6*	T7	T8+	T9
П1+	1+		1-	1					
П2+	1			1-		1		1+	
П3+	1-			1+					
П4*		1	1+		1		1		
П5	1		1	1					
П6	1			1					
П7+						1+		1-	1
П8+		1-			1+				1
П9+		1			1-	1+	1	1	
П10	1			1					

Рисунок 2.4.3

На рисунке 2.4.3 показана матрица смежности  $B$  графа  $L$ , где знаком ‘+’ помечены насыщенные вершины графа и элементы  $b_{ij}$ , соответствующие сильному ребру, т.е. ребру паросочетания  $K^V$ , значком ‘\*’ помечены концевые вершины чередующейся цепи  $Q$ , знаком ‘-’ помечены элементы  $b_{ij}$ , соответствующие слабому ребру, т.е. ребру, которое не входит в паросочетания  $K^V$ .

Из матрицы видно, что увеличить построенное паросочетание нельзя так как оставшиеся ненасыщенные вершины инцидентны разным рёбрам.

Однако согласно теореме Кёнига–Холла для данного графа  $\pi(L) = 8$ . Действительно, если мы в построенной тонкой чередующейся цепи  $Q$  ребро  $(\Pi_4, T_3)$  заменим ребром  $(\Pi_5, T_3)$ , то сможем построить другую чередующуюся цепь  $Q$ , которая проходит через вершины  $\Pi_5, T_3, \Pi_1, T_1, \Pi_6, T_4, \Pi_2, T_6, \Pi_7, T_8, \Pi_9, T_5$ .

	T1	T2	T3	T4	T5*	T6	T7	T8	T9
П1	1+		1-	1					
П2	1			1-		1+		1	
П3	1			1					
П4		1	1		1		1		
П5*	1		1+	1					
П6	1-			1+					
П7						1-		1+	1
П8		1			1				1
П9		1			1+	1	1	1-	
П10	1			1					

Рисунок 2.4.4

Из матрицы  $B$  (рисунок 2.4.4) видно, что увеличить тонкую чередующуюся цепь  $Q$  нельзя, но в графе остались ненасыщенные вершины, инцидентные одному и тому же рёбру, которые можно добавить к к искомому паросочетанию  $K^V$ . Это рёбра  $\Pi_8, T_9$ ;  $\Pi_4, T_2$ .

В результате получаем наибольшее паросочетание  $K^V$  (рисунок 2.4.5), в которое входят рёбра:  $(\Pi_5, T_3), (\Pi_1, T_1), (\Pi_6, T_4), (\Pi_2, T_6), (\Pi_7, T_8), (\Pi_9, T_5), (\Pi_8, T_9), (\Pi_4, T_2)$ . На рисунке 2.4.5 рёбра паросочетания обозначены жирными линиями.

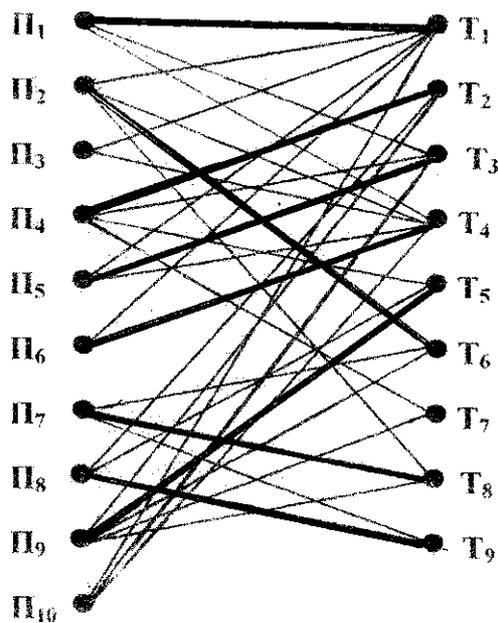


Рисунок 2.4.5

## Графы Бержа

1-орграф  $L=(x,u,p)$ , называется *графом Бержа*; он характеризуется тем, что у него нет звеньев, и из одной вершины в другую может идти не более одной дуги и при вершине может быть не более одной петли.

Наложение на полукольцо  $K$  соотношений  $\eta\xi=0$ ,  $\xi\eta=\zeta^2=1$  приводит к следующему выражению для матрицы смежности графа Бержа:

$$R = \begin{vmatrix} S^0(x_1) & S^+(x_1, x_2) & \dots & S^+(x_1, x_n) \\ S^+(x_2, x_1) & S^0(x_2) & \dots & S^+(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S^+(x_n, x_1) & S^+(x_n, x_2) & \dots & S^0(x_n) \end{vmatrix}$$

где  $S^0(x_i) = \begin{cases} 1 - \text{если } \exists u \text{ и } p(x_i u x_i) \text{ истинно;} \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$

$$S^+(x_i x_j) = S^-(x_i x_j) = \begin{cases} 1 - \text{если } \exists u \text{ и } p(x_i x_j) \text{ истинно;} \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Граф Бержа определяется однозначно с точностью до индивидуализации ребер заданием на  $X$  бинарного отношения

$$\vec{J}(x, y) = \exists u \text{ и } P(x, y, u).$$

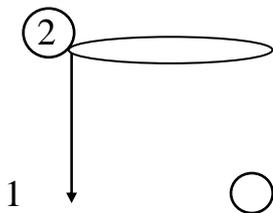
Вместо отношения  $\vec{J}$  обычно задают отображение  $\Gamma$ , относящее каждой вершине  $x \in X$  подмножество

$$\Gamma x = \{y \mid y \in X \text{ и } \vec{J}(x, y)\}.$$

Поэтому граф Бержа можно обозначать через  $(X, \Gamma)$ , а также через  $(X, U)$ . Например, для графа, представленного на рисунке,

$$X = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$U = \{\overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{32}, \overline{44}\}$$



$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



В иной терминологии максимальный полный подграф называется *кликой*. Рассмотрим ряд примеров.

**Пример 2.5.1.** Задача о восьми ферзях.

Можно ли на шахматной доске разместить восемь ферзей так, чтобы ни один из них не находился под ударом какого-либо другого.

Эта задача сводится к нахождению наибольшего пустого подграфа в графе с 64 вершинами (клетки шахматной доски), где клетки  $x$  и  $y$  смежны, если находятся в одной и той же горизонтали, вертикали или диагонали. Эта задача имеет 92 решения.

**Пример 2.5.2.** Пусть  $X$  – множество лиц, а смежность вершины  $x$  и  $y$  означает согласие между соответствующими лицами. Требуется найти общество с наибольшим числом взаимно согласных членов, т.е. «максимальную клику».

**Пример 2.5.3.** Задача об информационной емкости множества сигналов.

Рассматривается простейший случай одного передатчика, который может передавать четыре сигнала  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ; при приеме каждый из этих сигналов может быть истолкован неоднозначно: сигнал  $x_1$  дает  $y_1$  или  $y_3$ , сигнал  $x_2$  дает  $y_1$  или  $y_2$  и т.д. (рисунок 2.5.1.а)

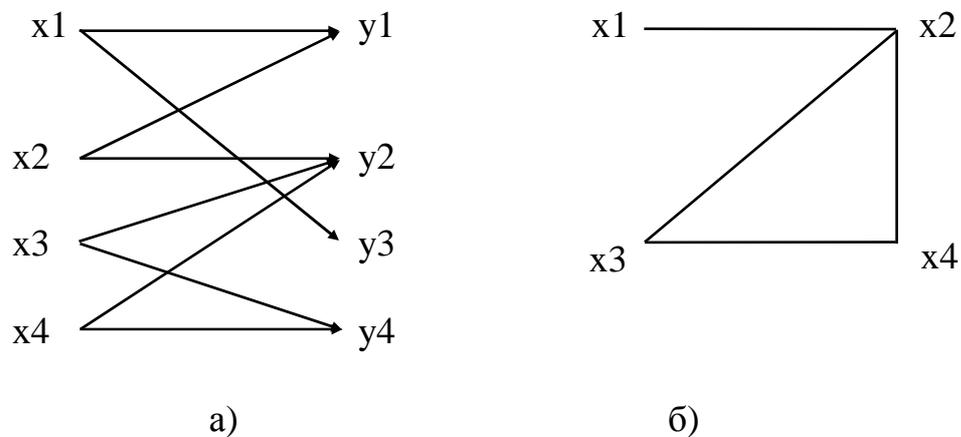


Рис. 2.5.1

Какое наибольшее число сигналов можно принять, не рискуя спутать их друг с другом? Задача сводится к определению наибольшего пустого подграфа  $L$  (рисунок 2.5.1, б), где две вершины смежны, если соответствующие системы можно спутать при приеме.

Примером части с экстремальными свойствами является его опора.

**Опорой** графа  $L=(X,U;P)$  называется такой его подграф  $L'=(X',U',P')$ , что всякое ребро  $u \in U$  инцидентно по крайней мере одной вершине из  $X'$ .

Количество  $\sigma(L)$  вершин наименьшей опоры называется **опорным числом** графа  $L$ .

**Пример 2.5.4.** Задача о часовых. В тюрьме около каждой камеры может быть поставлен часовой. Как, используя наименьшее число часовых, обеспечить просматриваемость всех коридоров.

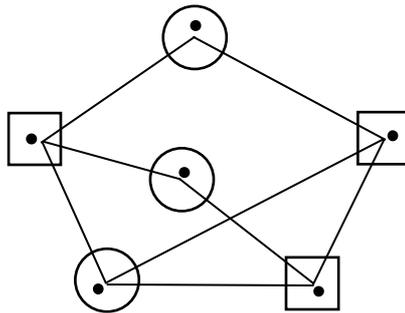


Рис. 2.5.2

Ясно, что подграф  $L'$  есть опора графа  $L$  тогда и только тогда, когда подграф  $L''$ , порожденный множеством  $X \setminus X'$  остальных вершин, пуст, и что опора  $L'$  минимальна в том и только в том случае, если соответствующий пустой подграф  $L''$  максимален (в частности наименьшей опоре отвечает наибольший пустой подграф). Отсюда следует, что задачи выявления максимальных пустых подграфов и минимальных опор равносильны и что  $\varepsilon(L) + \sigma(L) = n(L)$ . Для примера (рисунок 2.5.2) вершины множества  $X'$  обведены кружком, а вершины, образующие опору, – квадратом.

**Наименьший всесмежный подграф, или наименьший внешне неустойчивый подграф**  $L'=(x',u',p')$ , который обладает

тем свойством, что любая вершина из  $X \gg X \setminus X'$  смежна по крайней мере с одной вершиной  $X'$ . Размер наименьшего всесмежного графа называется числом внешней устойчивости  $\beta(L)$ .

**Пример 2.5.5.** Задача о пяти ферзях.

Сколько ферзей достаточно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая клетка доски находилась под ударом. Ответ:  $\beta=5$  для ферзей,  $\beta=8$  для ладей,  $\beta=12$  для коней,  $\beta=8$  для слонов.

К задачам рассматриваемого типа сводятся многочисленные практические задачи распределения ресурсов.

Алгоритм Магу–Уэйсмана нахождения максимальных пустых подграфов.

Пусть  $L=(x,u)$  – заданный обыкновенный граф с  $x=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  и с пронумерованным множеством ребер. Символы вершин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  добавляются в качестве новых образующих  $\xi, \eta, \zeta, \theta$  полукольца  $K$ , и расширенную таким образом систему подчиним условиям

$$\theta=1, 2=1, x_i^2=x_i, x_i+1=1;$$

а также условиям коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Полученное полукольцо включает в себя булеву алгебру  $V_x=V\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  многочленов от символов  $x_i$  с коэффициентами из  $V=V\{0, 1\}$ .

Можно показать, что в  $K_x$  имеет место закон поглощения:

$$\forall a, b \in K_x (a+ab)=a.$$

Например,

$$\begin{aligned} x_1, x_2 + x_1 x_2 x_3 x_4 &= x_1 x_2 (1 + x_3 x_4) = \\ &= x_1 x_2 [(1 + x_3) + x_3 x_4] = x_1 x_2 [1 + (x_3 + x_3 + x_4)] = \\ &= x_1 x_2 [1 + x_3(1 + x_4)] = x_1 x_2 \underline{(1 + x_3)} = x_1 x_2. \end{aligned}$$

Из матрицы инцидентий  $A=||a_{ij}||$  ( $i=1, n; j=1, m$ ) графа  $L$  на  $K_x$  образуем новую матрицу  $A_x=||a_{ij} x_i||$  и составим произведение

$$\Pi_L = \Pi_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i.$$

Очевидно, что  $j$ -й сомножитель произведения есть сумма двух слагаемых, представляющих те две вершины, которые в графе  $L$  соединены  $j$ -ым ребром.

Подмножество вершин  $u \in x$  порождает в  $L$  пустой подграф тогда и только тогда, когда для системы  $\{x_i^0\}$  значения переменных определены условиями:

$$\begin{aligned} x_i \notin u &\longrightarrow x_i^0 = 1; \\ x_i \in u &\longrightarrow x_i^0 = 0. \end{aligned}$$

Имеет место равенство  $\Pi_L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 1$ .

В самом деле, для пустого подграфа с подмножеством вершин  $u$  необходимо и достаточно, чтобы каждое ребро графа  $L$  было инцидентно хотя бы одной вершине из  $x \setminus u$ , т.е. чтобы в каждом сомножителе произведения  $\Pi_L(x_1, x_2, \dots, x_n)$  по крайней мере одно из двух слагаемых представляло вершину не из  $u$ ; но в этом и только этом случае подстановка единиц вместо переменных  $x_i$ , обозначающих вершины не из  $u$ , обратит все произведение  $\Pi_L$  в единицу.

Итак, с помощью вычисления конкретных значений произведения  $\Pi_L$  в  $B\{0,1\}$  можно для любого заданного подмножества  $u \in x$  узнать, является ли порожденный им подграф пустым.

Далее, пользуясь дистрибутивным, ассоциативным и коммутативным законами, раскроем в произведении  $\Pi_L$  все скобки и в каждом слагаемом устраним повторения сомножителей с помощью  $x_i = x_i^2$ .

И наконец, применяя закон поглощения, приведем всю сумму к минимальной форме, которая, как известно из математической логики, определяется однозначно, ибо в нашем случае нигде не фигурирует операция логического отрицания в  $B\{0,1\}$ . Полученный многочлен обозначим через  $\Sigma_L = \Sigma_L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Разумеется, что при любой системе значений  $\{x_i\}$  из  $B(0,1)$  имеет место:

$$\Pi_L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \Sigma_L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Каждому слагаемому в  $\Sigma_L$  отнесем подграф, порожденный всеми теми вершинами графа  $L$ , которые не фигурируют в качестве сомножителей этого слагаемого. Покажем, что все выбранные таким образом подграфы  $M_1, M_2, \dots, M_k$  – пустые и ни один из них не есть подграф другого, а всякий пустой подграф графа  $L$  содержится хотя бы в одном из них. Действительно, если все переменные в слагаемом, соответствующем  $M_j$  ( $j=1, k$ ), положить равными единице, а остальные переменные положить равными

нулю, то  $\Sigma_L = \Pi_L = 1$ , откуда  $M_j$  – пустой. Если  $M_j$  – подграф  $M_l (j=1, k; l=1, k; l \neq j)$ , то все переменные слагаемого, соответствующего  $M_l$ , присутствовали бы также в слагаемом, отвечающем  $M_j$ , и тогда второе слагаемое поглощалось бы первым. Наконец, если  $M=(y, \emptyset)$  – произвольный пустой подграф графа  $L$ , то составленная для него система значений  $\{x_i^0\}_y$  обращает  $\Pi_L$  в единицу, следовательно, в  $\Pi_L$  есть слагаемое, не имеющее сомножителей  $x_i$  из  $y$ , и соответствующий этому слагаемому подграф  $M_j$  содержит  $M$ .

Следует заметить, что непосредственное раскрытие всех скобок в  $\Pi_L$  дало бы  $2^{m(L)}$  слагаемых, что практически обесценило бы алгоритм. Однако положение спасает то, что закон поглощения можно применять задолго до полного раскрытия.

Рассмотрим пример для графа на рисунке 2.5.4.

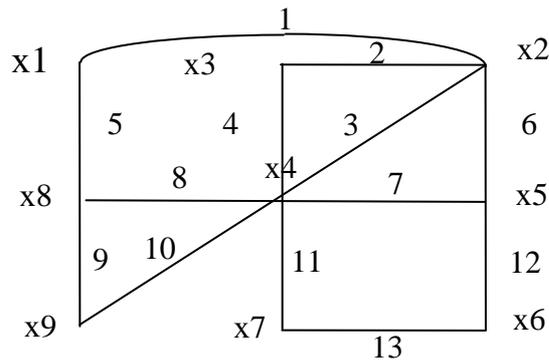


Рис. 2.5.4

Чтобы не выписывать матрицы  $A$  и  $A_x$ , заметим, что произведение  $\Pi_L$  можно представить в виде

$$\Pi_L = \prod (x_i + x_j) \{x_i x_j \sim / J_L x_i x_j\}; \{ij / x_i x_j \sim \in U\},$$

где умножение идет по всем неупорядоченным парам смежных вершин графа. В нашем случае

$$\Pi_L = (x_1 + x_2)(x_1 + x_8)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_2 + x_5)(x_3 + x_4)(x_4 + x_5)(x_4 + x_6) \times \\ \times (x_4 + x_7)(x_4 + x_8)(x_4 + x_9)(x_5 + x_6)(x_6 + x_7)(x_8 + x_9).$$

Полное раскрытие дает  $2^{14}$  слагаемых. Однако, замечая, что в силу закона поглощения всегда

$$(a+b)(a+c)\dots(a+p) = a+bc\dots p,$$

можно записать

$$\begin{aligned} \Pi_L &= (x_1+x_2x_8)(x_2+x_3x_4x_5)(x_3+x_4)(x_4+x_5x_6x_7x_8x_9)(x_5+x_6)(x_6+x_7)(x_8+x_9)= \\ &= (x_1+x_2x_8)(x_2+x_3x_4x_5)(x_4+x_3x_5x_6x_7x_8x_9)(x_6+x_5x_7)(x_8+x_9). \end{aligned}$$

Получить итоговую запись можно следующим образом: для  $i = 1, 2, \dots$  последовательно составляем сомножители вида  $x_i + x_j, x_k, \dots, x_p$ , где  $x_j, x_k, \dots, x_p$  все вершины смежные с  $x_i$  и обладающие большими номерами; после этого каждую пару сомножителей вида  $(a+b)(a+c)$  заменяем сомножителем  $a+bc$ .

В полученном выражении для  $\Pi_L$  произведение первых двух скобок равно

$$\begin{aligned} (x_1+x_2x_8)(x_2+x_3x_4x_5) &= x_1x_2 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_8 + x_2x_3x_4x_5x_8 = \\ &= x_1x_2 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_8. \end{aligned}$$

Умножение на третью скобку дает

$$\begin{aligned} x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3x_5x_6x_7x_8x_9 + x_1x_3x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9 + \\ + x_2x_4x_8 + x_2x_3x_4x_5x_7x_6x_8x_9 = x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_4x_8 + x_2x_3x_5x_6x_7x_8x_9. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получим в итоге:

$$\begin{aligned} \Sigma_L &= x_1x_3x_4x_5x_6x_8 + x_2x_3x_3x_6x_7x_8x_9 + x_2x_4x_6x_8 + x_1x_3x_4x_5x_7x_8 + x_2x_4x_5x_7x_8 + \\ &+ x_1x_3x_4x_5x_6x_9 + x_1x_2x_4x_5x_7x_9. \end{aligned}$$

Максимально пустые подграфы графа  $L$  порождаются следующими подмножествами вершин:

$$\begin{aligned} \{x_2, x_7, x_9\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_3, x_6, x_9\}, \{x_2, x_6, x_9\}, \{x_1, x_3, x_6, x_9\}, \\ \{x_2, x_7, x_8\}, \{x_3, x_5, x_7, x_8\}, \{x_2, x_6, x_8\}, \{x_3, x_6, x_8\}. \end{aligned}$$

Максимально полные подграфы, т.е. такие полные, которые не содержатся в больших полных подграфах, можно находить аналогичным образом, с той лишь разницей, что вместо  $\Pi_L$  рассматривать

$$\overline{\Pi}_L = \overline{\Pi}_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod (x_i + x_j), \{\tilde{i}, \tilde{j} / i \neq j\} \cap J(x_i x_j),$$

распространенное на всевозможные пары несмежных различных вершин.

Для графа на рисунке 2.5.4 максимальные полные подграфы порождаются множествами вершин:

$$\{x_4, x_8, x_9\}, \{x_4, x_6, x_7\}, \{x_4, x_5, x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_8\}, \{x_1, x_2\}.$$

## 3 СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ

### 3.1 Маршруты, цепи и циклы

Рассматриванию подлежат такие свойства графов, которые не меняются при произвольной ориентации звеньев графа, переориентации или дезориентации дуг. Поэтому можно рассматривать только неорграфы либо изучать только такие свойства графов общего вида  $L=(x,u,p)$ , которые полностью определяются в терминах полуинцидентора  $\tilde{P}$ .

$$\tilde{P}(xuy)=P(xuy)VP(yux).$$

Конечная последовательность

$$x_0u_1x_1u_2x_2\dots x_{l-1}u_lx_l \quad */$$

$l \geq 0$  элементов графа  $L$ , для которой истинно высказывание

$$\tilde{P}(x_0u_1x_1) \& \tilde{P}(x_1u_2x_2) \& \dots \& (\tilde{P}(x_{l-1}u_lx_l),$$

называется *маршрутом* из вершины  $x_0$  в вершину  $x_l$  или маршрутом, соединяющим  $x_0$  с  $x_l$ ; в случае  $x_0 = x_l$  имеем *циклический* маршрут при вершине  $x_0$ . Число носит название *длины* маршрута.

Маршрут – это не просто часть графа, так как порядок его обхода играет существенную роль.

Пусть на полукольцо  $K$  наложены соотношения

$$\xi\eta=\eta\xi=\zeta=\theta^2=1.$$

Рассмотрим  $l$ -ю степень матрицы смежности  $R$  графа  $L$

$$R^l = \|r_{ij}^{(l)}\|.$$

Ее элемент  $r_{ij}^{(l)}$  равен количеству различных маршрутов длины  $l$  из вершины с номером  $i$  в вершину  $j$ .

Это утверждение тривиально при  $l=1$  и легко доказывается в общем случае индукцией по  $l$ : если уже известно, что  $r_{ik}^{(l)}$  равно количеству различных маршрутов длины  $l$  из  $i$ -ой вершины в  $j$ -ю с фиксированной предпоследней  $k$ -ой вершиной, получаем выражение  $r_{ik}^{(l)}$ ,  $r_{kj}$ , а для количества таких маршрутов, но без фиксации предпоследней вершины имеем следующее выражение:

$$r_{ij}^{(l+1)} = \sum_{k=1}^n r_{ik}^{(l)} \cdot r_{kj}.$$

Интересуясь только достижимостью  $j$ -ой вершины из  $i$ -ой за  $l$  шагов, можно к определяющим соотношениям в полукольце  $K$

добавить соотношение:  $2=1$ , тем самым преобразуя полукольцо в булеву алгебру  $B\{0,1\}$ .

Элемент матрицы  $r_{ij}^{(1)}$  будет тогда равен единице, если существует хотя бы один маршрут длины 1 из  $i$ -ой вершины в  $j$ -ю, и нулю в противном случае.

Рассмотрим следующий пример

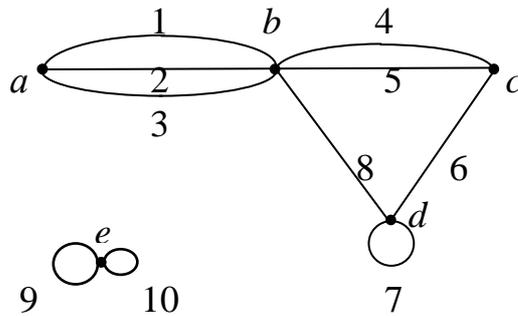


Рис. 3.1.1

$$R = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline c & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline d & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline e & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \quad R^2 = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 9 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ \hline b & 0 & 14 & 1 & 3 & 0 \\ \hline c & 6 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ \hline d & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ \hline e & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$R^3 = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 42 & 3 & 9 & 0 \\ \hline b & 42 & 5 & 31 & 10 & 0 \\ \hline c & 3 & 31 & 5 & 9 & 0 \\ \hline d & 9 & 18 & 9 & 9 & 0 \\ \hline e & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Например, из вершины  $a$  в вершину  $d$  идут три маршрута длиной 2:

$$a1b8d, a2b8d, a3b8d$$

и девять маршрутов длины 3:

$$a1b4c6d, a1b5c6d, a2b4c6d, a2b5c6d, a3b4c6d, \\ a3b5c6d, a1b8d7d, a2b8d7d, a3b8d7d,$$

а из d8d идет один маршрут длины 1: d7d, три маршрута длины 2: d6c6d, d7d7d, 8b8d. При исследовании взаимной достижимости вершин имеем:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R^3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R^4 = R^5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Маршрут  $x_0u_1x_1u_2x_2\dots x_{l-1}u_lx_l$  называется **цепью**, если ребра  $u_1, u_2, \dots, u_l$  все различны. Циклическая цепь  $x_0 = x_l$  при  $l \geq 1$  называется **циклом**. Цепь называется **простой**, если все ее вершины различны; при  $x_0 = x_l$  и  $l \geq 1$  имеем **простой цикл**.

В графе на рисунке 3.1 маршрут a1b4c4b8d (циклический) не является цепью, а значит, и циклом; цепи e9e10 (цикл), a2b4c6d8b (не цикл) не простые, цепь a2b4c6d – простая, а цепи e9e и b4c6d8b – простые циклы.

**ЛЕММА:** Всякий маршрут (в частности всякая цепь) графа содержит хотя бы одну простую цепь, соединяющую ту же пару вершин. Всякий цикл содержит простой цикл.

**Следствие.** Всякий кратчайший маршрут между двумя заданными вершинами графа есть простая цепь. Всякий цикл наименьшей длины при заданной вершине является простым.

### Алгоритм выявления всех маршрутов заданной длины и цепей

Рассмотрим алгоритм выявления всех маршрутов фиксированной длины, идущих из одной заданной вершины графа в другую на примере графа, изображенного на рисунке 3.1.2.

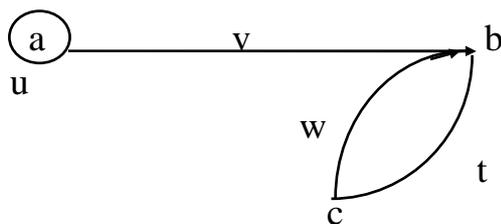


Рис. 3.1.2

Матрица смежности и матрица инцидентий  $A$  этого графа имеют вид:

$$R = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \quad A = \begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ t \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \zeta & \xi & 0 & 0 \\ \hline 0 & \eta & \eta & \theta \\ \hline 0 & 0 & \xi & \theta \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}$$

Введем в рассмотрение так называемую «усовершенствованную матрицу смежности»  $Ru$ , которая указывает не только на количество ребер, соединяющих заданную пару вершин, но и на сами эти ребра:

$$Ru = \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & v & 0 \\ \hline v & 0 & w+t \\ \hline 0 & w+t & 0 \\ \hline \end{array}$$

Теперь последовательно возводим матрицу  $Ru$  в степень:

$$R^2u = \begin{array}{|c|c|c|} \hline u^2 + v^2 & uv & vw + vt \\ \hline uv & v^2 + w^2 + t^2 + wt + tw & 0 \\ \hline wv + tv & 0 & u^2 + t + wt + tw \\ \hline \end{array}$$

$$R^3u = \begin{array}{|c|c|c|} \hline u^3 + v^2u + uv^2 & u^2v + v^3 + vw^2 + vwt + vtw + vt^2 & uvw + uvt \\ \hline vu^2 + v^3 + w^2v + t^2v + wtv + twv & vuv & v^2w + w^3 + t^2w + wtw + tw^3 + v^2t + w^2t + t^3 + wt^2 + twt \\ \hline wvu + tvu & wv^2 + tv^2 + w^3 + t^2w + wtw + tw^2 + w^2t + t^3 + wt^2 + twt & 0 \\ \hline \end{array}$$

Элемент матрицы  $R^1u$  равен сумме таких произведений, в каждом из которых сомножители соответствуют в том же порядке последовательным ребрам некоторого маршрута длины 1 из  $i$ -ой вершины в  $j$ -ую, причем ни один маршрут не может быть пропущен и ни один не повторяется. Например, элемент матрицы  $R^2u$ :

$$r^{(2)}_{22} = v^2 + w^2 + t^2 + wt + tw$$

выявляет последовательность ребер во всех маршрутах длины 2 из вершины  $b$  в эту же вершину  $b$  (последовательность вершин каждого маршрута однозначно восстанавливается с помощью матрицы инциденций  $A$ ): эти маршруты суть

$$bvavb, bwcwb, bcb, bwctb, btcwb.$$

Элемент

$$r^{(3)}_{21} = vu^2 + v^3 + w^2v + t^2v + wtv + twv$$

позволяет выявить все маршруты длины 3 из  $b$  в  $abvaaua$ ,  $bvavbva$ ,  $bwcwbva$  и т.д.

Сложность элементов в матрицах  $R^l u$  резко возрастает с ростом числа  $l$ , но виной здесь отнюдь не алгоритм, а сам факт наличия колоссального количества маршрутов в графе.

Для выделения по матрице  $Ru$  только цепей, необходимо после каждого умножения на  $Ru$  вычеркивать те слагаемые, в которых какой-либо сомножитель встречается более одного раза.

Например, для графа, изображенного на рисунке 3.1.2, имеем

$$(R^2u)' = \begin{vmatrix} 0 & uv & vw + vt \\ vu & wt + tw & 0 \\ wv + tv & 0 & wt + tw \end{vmatrix}$$

$$(R^2u)'Ru = \begin{vmatrix} uv^2 & vw^2 + vwt + vtw + vt^2 & uvw + uvt \\ vu^2 + wtv + twv & vuv & w^2t + wtv + twt + t^2w \\ wvu + tvu & wv^2 + tv^2 + wtw + wt^2 + tv^2 + twt & 0 \end{vmatrix}$$

$$(R^3 u)' = \begin{vmatrix} 0 & vwt + vtw & uvw + uvt \\ wtv + twv & 0 & 0 \\ wvu + tvu & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Кофман А. и Мальгранж И. предложили близкий по идее и легко реализуемый на ЭЦВМ алгоритм выявления простых цепей и циклов.

### **Алгоритм нахождения кратчайших цепей между заданными вершинами**

Пусть необходимо найти кратчайшие и, следовательно, простые цепи между заданными вершинами  $x$ ,  $y$  графа  $L$ .

Помечаем вершину  $x$  значком 0; затем все смежные с  $x$  непомеченные еще вершины помечаем значком 1; далее помечаем значком 2 каждую такую вершину, которая еще не помечена и смежна хотя бы с одной вершиной, помеченной значком 1, и т.д. Как только вершина  $y$  окажется помеченной некоторым значком  $l \geq 1$ , процесс прекращаем.

Теперь каждая кратчайшая цепь ненулевой длины

$$x u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l y,$$

соединяющая  $x$  с  $y$ , ищется следующим образом: за  $x_{l-1}$  берем любую вершину, смежную с  $y$  и помеченную значком  $l-1$ ; за  $U_1$  – любое ребро, соединяющее  $x_{l-1}$  с  $y$ , за  $x_{l-2}$  берем любую вершину, смежную с  $x_{l-1}$  и помеченную значком  $l-2$ ; за  $U_{l-1}$  – любое ребро, соединяющее  $x_{l-2}$  с  $x_{l-1}$ , и т.д., до тех пор, пока не дойдем до вершины  $x$ .

### **Алгоритм выявления всех простых цепей и циклов**

В рассматриваемом алгоритме, являющемся модификацией алгоритма, описанного выше, некоторые вершины метятся более чем одним значком. Помечаем вершину  $x$  значком 0. Все смежные с  $x$  – значком 1; при этом, если вершина  $x$  смежна сама с собой, т.е. имеет петлю, единица будет ее вторым значком.

Далее метим значком 2 вершину  $z$ , где  $z$  не имела до этого значка 2 и смежна хотя бы с одной вершиной, у которой значок 1 – первый. Затем помечаем значком 3 все те вершины, которые не

имели еще этого значка и смежны с какой-нибудь из вершин, имеющих 2 в качестве первого значка и т.д.

Продолжаем процесс до тех пор, пока все вершины не получат хотя бы по одному значку и для каждой вершины, имеющей первый значок  $i$ , все смежные с ней вершины будут содержать  $i+1$  в числе своих значков.

Далее выявляем цепи так же как и в предыдущем алгоритме, с той лишь разницей, что если уже построена часть цепи ( $i=1..l$ ;  $x_l=y$ )

$$x_i u_{i+1} x_{i+1} \dots x_{l-1} u_l x_l$$

и вершина  $x_i$  имеет значки  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , то за  $x_{i-1}$  можно взять любую такую вершину, которая отлична от всех  $x_i, \dots, x_l$ , смежна с  $x_i$  и у которой **первый** (!) значок равен одному из чисел  $j_1-1, j_2-1, \dots, j_k-1$ .

### Пример 3.1.1.

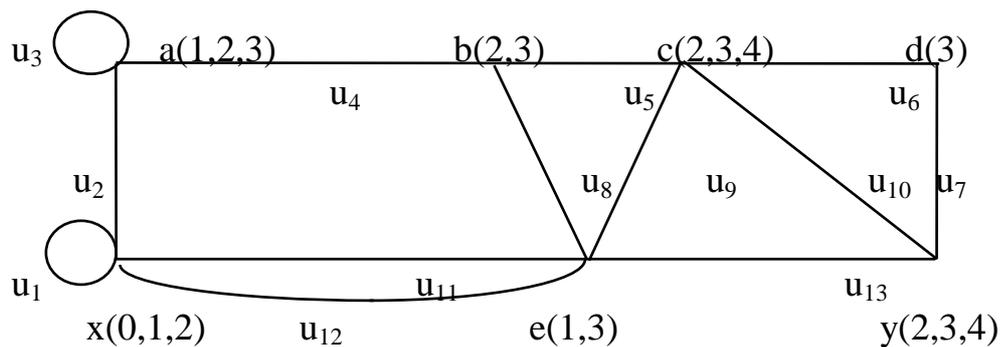


Рис. 3.1.3

Разметка осуществлялась следующими шагами:

$x_0$

$x(0,1), a(1), e(1)$ .

$x(0,1,2), a(1,2), b(2), c(2), y(2)$ .

$a(1,2,3), b(2,3), c(2,3), d(3), e(1,3), e(2,3)$ .

$c(2,3,4), y(2,3,4)$ .

В процессе выявления цепей будем указывать не все значки вершины  $x_i$ , а лишь один или два из них: тот, согласно которому  $x_i$  выбрана, и тот, который служит для выбора  $x_{i-1}$  (если он отличен от первого).

Последовательность  $u(2), e(1), x(0)$  дает две цепи:  $xu_{11}eu_{13}u$  и  $xu_{12}eu_{13}u$ . Последовательность  $u(4), d(3), c(2,3), b(2), x(0)$  дает цепь  $xu_6au_4bu_5cu_6du_7u$  и т.д.

Разрешая повторение вершин в последовательности  $u, x_{1-1}, x_{1-2}, \dots$ , но запрещая повторение ребер в цепи, мы получим алгоритм выявления всех цепей и циклов, а не только простых.

### 3.2 Отделимость и соединимость. Компоненты связности

Вершины  $x$  и  $y$  графа  $L=(x,u,p)$  называются *отделенными*, если не существует никакой соединяющей их цепи, и *неотделенными*, если хотя бы одна такая цепь имеется. Отношение неотделимости рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. представляет собой отношение эквивалентности, и поэтому  $x$  разбивается на классы  $x_1, x_2, \dots, x_k$  попарно неотделимых вершин.

Подграфы  $L_i=(x_i, u_i, p)$ , порожденные множествами  $x_i$ , не имеют друг с другом общих вершин и называются *компонентами связности*. Число их обозначается  $x(L)$ . При  $x(L)=1$  граф называется связным.

Рассмотрим матрицу смежности  $R=R_L$  графа над  $B\{0,1\}$  и обозначим через  $E$  единичную матрицу порядка  $n(L)$ , образуем последовательно матрицы

$$\begin{aligned} E+R; (E+R)^2 &= E+R+R^2; \\ (E+R)^3 &= E+R+R^2+R^3 \quad \text{и.т.д.,} \end{aligned}$$

элементы которых выражают количество маршрутов длины не более 1, не более 2, не более 3 и т.д. Для некоторого  $l_0$ , заведомо не превышающего  $m(L)$ , будем иметь

$$(E+R)^{l_0} = (E+R)^{l_0+1}.$$

Каждой системе всех одинаковых столбцов (или строк) «установившейся» матрицы  $(E+R)^{l_0}$  отвечает компонента связности графа  $L$ ; для ускорения процесса получения установившейся матрицы берут  $l=2,4,8,\dots$

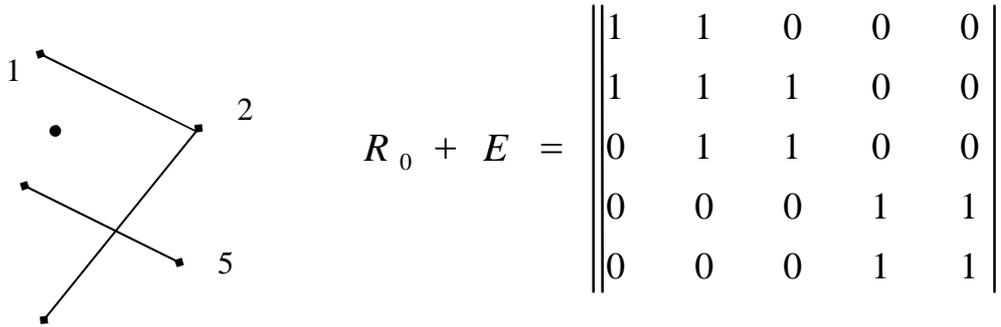
**Пример 3.2.1.**

Рис. 3.2.1

$$(R + E)^2 = (R + E)^4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**Отделимость и соединимость**

Две несмежные вершины  $x$  и  $y$  графа  $L=(x,u,p)$  называются ***K-отделимыми***, если из  $L$  можно так удалить не более  $K$  вершин, чтобы в оставшемся подграфе вершины  $x$  и  $y$  оказались отделенными.

Вершины  $x$  и  $y$  графа  $L$  называются ***K-соединимыми***, если в  $L$  существует  $K$  цепей, соединяющих  $x$  с  $y$  и попарно не имеющих других общих вершин, а также общих ребер.

**Теорема Менгера.** В графе  $L=(x,u,p)$  две вершины  $x$  и  $y$  тогда и только тогда  $K$ -неотделимы, когда они  $(x+1)$  соединимы.

Граф называется ***K-связным***, если любые две его вершины  $(K-1)$ -неотделимы.

Вершина, удаление которой приводит к увеличению компонент связности в графе, называется ***точкой сочленения***.

Ребро  $u$  графа  $L$  называется ***перешейком***, если после его удаления из графа соединяемые им вершины 1-отделимы.

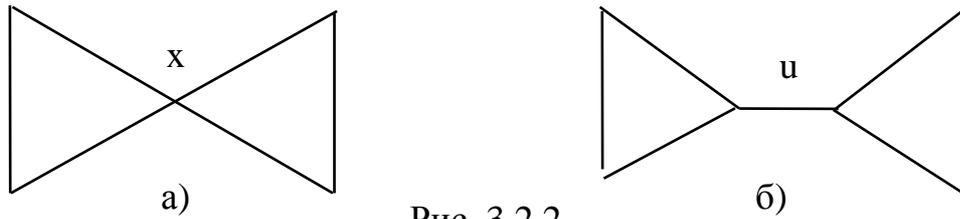
**Пример 3.2.2.**

Рис. 3.2.2

Графы, изображенные на рисунке 3.2.2, односвязны. Вершина  $x$  и ребро  $u$  являются соответственно точкой сочленения и перешейком.

**3.3 Метрика графа**

Расстоянием  $\rho_L$   $x, y$  между вершинами  $x$  и  $y$  графа  $L=(x, u, p)$  называется длина кратчайшего из маршрутов, соединяющих эти две вершины; если  $x$  и  $y$  отделены, то

$$\rho_L(x, y) = \infty.$$

Функция  $\rho_L(x, y)$  заслуживает названия *метрики* графа, поскольку она удовлетворяет трем аксиомам Фреше:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X [\rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y], \\ \forall x, y \in X [\rho(x, y) = \rho(y, x)], \\ \forall x, y, z \in X [\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)]. \end{aligned}$$

Выполнение первых двух аксиом очевидно, а третьей (неравенство треугольника) легко доказывается.

Для нахождения метрики графа достаточно знать его матрицу смежности  $R$  над  $B\{0, 1\}$ . Далее образуется матрица  $R+E$  и последовательно возводится в степень до тех пор, пока не получим установившуюся матрицу  $(E+R)^k = (E+R)^{k+1} = \dots$ . Обозначим  $(E+R)^1 = \|S^{(1)}_{ij}\|$ . Тогда

$$\rho(x_i x_j) = \min \{1; S^{(1)}_{ij} = 1\}.$$

**Пример 3.3.1.** Для графа на рисунке 3.2.1, например,  $\rho(1, 2) = 1$ ;  $\rho(1, 3) = 2$  и т.д.

$$R + E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (R + E)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Метрика однозначно определяет обыкновенный граф и соответственно скелет графа общего вида. Вершина  $x_0$  называется *центральной*, если

$$\forall x \in X [\max_{y \in X} \rho(x, y) \geq \max_{y \in X} \rho(x_0, y)],$$

и *периферийной*, если

$$\forall x \in X [\max_{y \in X} \rho(x, y) \leq \max_{y \in X} \rho(x_0, y)].$$

Величина

$$r(L) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} \rho(x, y)$$

называется *радиусом*, величина

$$d(L) = \max_{x, y \in X} \rho(x, y)$$

диаметром графа.

**Пример 3.2.1.** У графа, изображённого на рисунке 3.3.1, вершины  $X_4$  и  $X_{10}$  – центральные, вершины  $X_1, X_7, X_8, X_{13}$  – периферийные,  $r(L)=4$ ;  $d(L)=7$ .

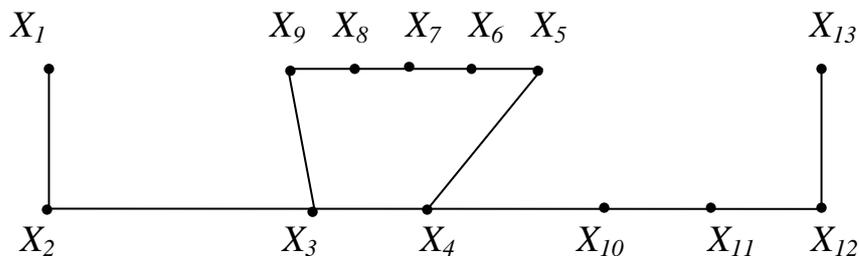


Рис. 3.3.1

### 3.4 Обходы графа

Рассматривается класс задач, связанных с определением маршрутов специального вида.

Цепь  $X_0U_1X_1U_2X_2\dots X_{l-1}U_lX_l$  в графе  $L=(X,U,P)$  называется *эйлеровой цепью*, если множество её рёбер совпадает с  $U$ ; при  $X_0=X_l$  имеем *эйлеров цикл*.

**Пример 3.4.1.** Можно ли нарисовать графы, изображённые на рисунке 3.3.1, не отрывая пера от бумаги и не проходя по уже нарисованным линиям вторично?

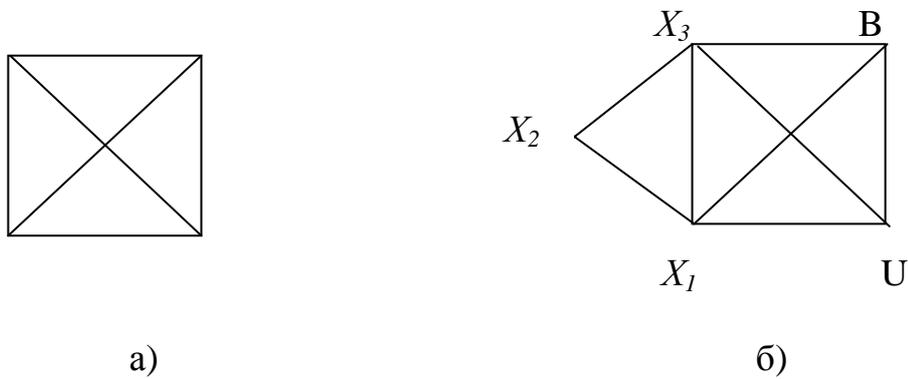


Рис. 3.4.1

**Пример 3.4.2.** Через город Калининград протекает река, омывающая острова. Имеется семь мостов (рис. 3.4.2). Можно ли обойти все мосты, проходя по каждому из них только один раз?

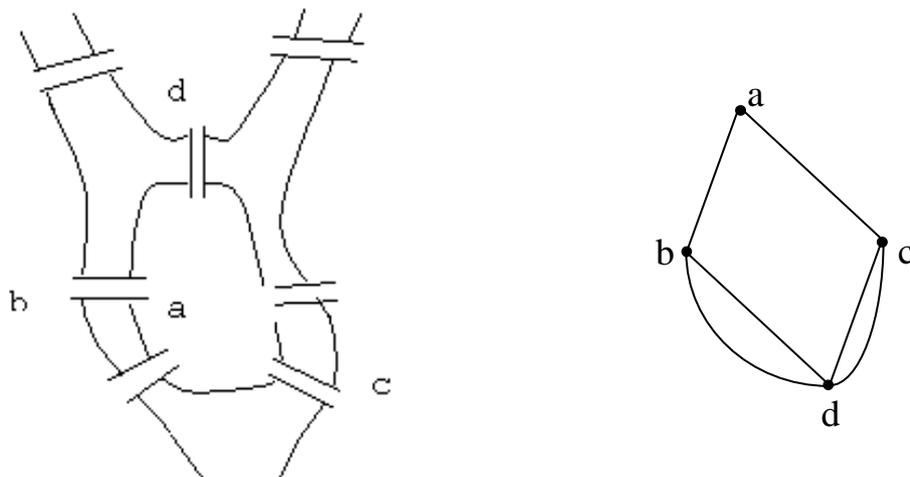


Рис. 3.4.2

**Теорема Эйлера (критерий существования эйлеровой цепи).** Пусть  $X$  и  $Y$  – две вершины (не обязательно различные) связного графа  $L=(X,U,P)$ . Для существования в  $L$  эйлеровой цепи, ведущей из  $X$  в  $Y$ , необходимо и достаточно, чтобы все отличные от  $X$  и  $Y$  вершины  $L$  обладали чётными валентностями (число усиков при вершине), а валентности вершины  $X$  и  $Y$  в случае  $X=Y$  были не чётными.

**Доказательство.**

Необходимость условий теоремы очевидна, так как если в графе существует эйлерова цепь, то нечётной валентностью могут обладать только начальная и конечная вершина (если они не совпадают), поэтому число вершин нечётной валентности равно 0 или 2.

Доказательство достаточности проводим по индукции по числу рёбер графа  $m(L)$ .

Теперь легко убедиться, что решением примера 3.4.1 для графа на рисунке 3.4.1, б является цепь  $ax_1x_3x_2x_1bx_3ab$ , а для графов на рисунке 3.4.1, а и рисунке 3.4.2 задача не разрешима.

**Простая цепь**  $x_0U_1x_1U_2x_2\dots x_{l-1}U_lx_c$  графа  $L=(x,U,p)$ , содержащая все его вершины и только по одному разу, называется **гамильтоновой цепью**; при  $X_0=X_c$  имеем **гамильтоновый цикл**.

**Пример 3.4.3.** Пусть граф задаёт сеть коммуникаций между фиксированным числом пунктов. Необходимо построить маршрут, обеспечивающий посещение всех пунктов по одному и только по одному разу.

Несмотря на схожесть задач о нахождении эйлеровых циклов и цепей и нахождении гамильтоновых циклов и цепей, решение последней значительно более сложное.

Известны следующие достаточные условия существования гамильтоновой цепи и гамильтонового цикла:

1. Если для любых двух несмежных различных вершин  $X$  и  $Y$  связного обыкновенного графа  $L \subset n(L) \geq 3$

$$S(x) + S(y) \geq n(L),$$

то существует гамильтонов цикл;

2. Если

$$S(x) + S(y) \geq n(L) - 1,$$

то существует гамильтоновая цепь;

3. Если

$$\forall(x) \in x, \quad S(x) \geq 0.5 \cdot n(l_v),$$

то существует гамильтонов цикл.

### 3.4.1 Алгоритм Флёрри нахождения эйлерова цикла

Рассматривая связный граф, все вершины которого удовлетворяют условиям теоремы Эйлера, строим эйлеровый цикл одним росчерком, придерживаясь следующих правил:

1. Отправляемся из произвольной вершины  $\alpha$ ; каждое пройденное ребро зачёркиваем;

2. В процессе построения не прибегаем к исправлению уже построенной части траектории;

3. Никогда не идём по такому ребру, которое в рассматриваемый момент является перешейком, т.е. при удалении которого граф, образованный не зачёркнутыми рёбрами, распадается на две компоненты связности, имеющие хотя бы по одному ребру.

Легко показать, что, придерживаясь этих правил, действительно можно построить эйлеровый цикл.

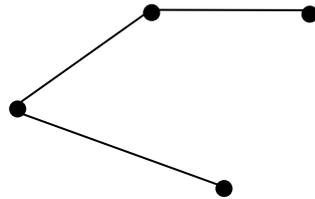
Действительно, если построен маршрут до вершины  $X$ , то в оставшемся суграфе (из не зачёркнутых рёбер) имеются две вершины нечётной валентности:  $X$  и  $\alpha$  и в силу теоремы Эйлера имеется эйлерова цепь, начинающаяся из  $X$ .

Осталось показать, что всегда, придя в вершину  $X$ , имеем в распоряжении не пройденное ребро, не являющееся в данный момент перешейком. Действительно, если бы все инцидентные  $X$  рёбра были перешейками, то их было бы по крайней мере два; два перешейка вели бы в две не связанные друг с другом компоненты, каждая из которых содержит хотя бы одну вершину нечётной валентности. Но это невозможно, так как единственная вершина нечётной валентности, не считая  $X$ , является вершина  $\alpha$ .

### 3.4.2 Цикломатическое число

**Цикломатическое число**  $\lambda(L)$  графа  $L(X, U, P)$  равно  $\lambda(L) = m(L) - n(L) + \chi(L)$ , где  $n(L) = |X|$ ,  $m(L) = U$ , а  $\chi(L)$  – число компонент связности.

#### Пример 3.1.4.



$$n = 4 ; m = 3,$$

$$\chi = 1 ; \lambda(L) = 0.$$

Рис. 3.4.3

Рассмотрим ряд свойств цикломатического числа.

Пусть  $L' = (X, U \setminus \{U\}, P)$  – суграф, полученный из  $L$  удалением ребра  $U$ , тогда

$$\chi(L') = \begin{cases} \lambda(L) + 1, & \text{если } U \text{ - перешеек в } L, \\ \lambda(L), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как  $n(L') = n(L)$  и  $m(L') = m(L) - 1$ , то

$$\lambda(L') = \begin{cases} \lambda(L), & \text{если } U \text{ - перешеек,} \\ \lambda(L) - 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть  $E = L = (X, \emptyset, P)$  т.е. пустой граф;

$$n(L) = n, m(L) = 0, \chi(E) = n, \text{ то } \lambda(E) = 0.$$

Следовательно,  $\lambda(L) \geq 0$ , где  $L$  произвольный граф, т.к. при удалении  $m(L)$  рёбер  $\lambda(L) = 0$  может только уменьшиться у произвольного графа  $\lambda(L) = 0$  тогда и только тогда, когда все удаляемые рёбра – перешейки, т.е.  $L$  не содержат циклов.

**Теорема.** Если  $L_1, L_2, \dots, L_\chi$  компоненты связности графа  $L$ , то

$$\lambda(L) = \sum_{i=1}^{\chi} \lambda(L_i).$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\lambda(L) &= m(L) - n(L) + \chi(L) = \sum_{i=1}^{\chi} m(L_i) - \sum_{i=1}^{\chi} n(L_i) + \chi = \\ &= \sum [m(L_i) - n(L_i) + 1] = \sum_{i=1}^{\chi} \lambda(L_i).\end{aligned}$$

### 3.5 Графы без циклов

Рассматриваются графы с нулевым хроматическим числом.

**Теорема.** Следующие высказывания равносильны:

- граф  $L$  не содержит циклов;
- граф  $L$  не содержит простых циклов;
- никакие две вершины  $X$  и  $Y$  в указанном порядке не могут соединяться более чем одной цепью.

Связанный граф, не содержащий циклов, называется **деревом**.

Дерево обладает следующими свойствами:

1.  $\chi(L) = 1$  &  $\lambda(L) = 0$ .
2.  $\lambda(L) = 0$  &  $n(L) - m(L) = 1$ , т.е.  $m(L) = n(L)$ .
3. Для любой пары вершин  $X$  и  $Y$  в указанном порядке существует не более чем одна соединяющая их цепь;
4.  $\chi(L) = 1$ , но если из  $L$  удалить любое ребро, то для полученного графа  $L^-$   $\chi(L^-) = 2$
5.  $\chi(L) = 0$ , но если к  $L$  добавить хоть одно ребро, то для полученного графа  $L^+$   $\chi(L^+) = 1$ .

**Теорема.** Из любого графа  $L$  можно удалить  $\chi(L)$  рёбер, чтобы полученный суграф  $T$  не имел циклов и обладал тем же числом компонент связности, что и  $L$ . Всякий же суграф, получаемый удалением менее чем  $\chi(L)$  рёбер, содержит циклы.

**Доказательство.** Первое утверждение при  $\lambda(L) = 0$  тривиально. Пусть теорема доказана для всех графов с цикломатическим числом  $\ell$  и рассмотрим произвольный граф  $L$ , у которого  $\lambda(L) = \ell + 1$ , так как  $\lambda(L) > 0$ , то граф заведомо содержит цикло-

вые рёбра; удалив любое из них, получим  $L'$  с  $\chi(L') = \chi(L)$ ,  $\lambda(L') = \ell$ . Согласно предположению индукции можно удалить  $\ell$  рёбер так, чтобы остался граф  $T$  без циклов с  $\chi(T) = \chi(L)$ . Тот же  $T$  получен из исходного графа  $L$  удалением  $\ell + 1$  ребра, причём  $\chi(T) = \chi(L)$ , что и требовалось доказать.

Второе утверждение справедливо потому, что при удалении любого ребра  $\lambda(L)$  не может уменьшиться более чем на единицу.

Всякий суграф  $T$  графа  $L$ , удовлетворяющий условиям  $m(T) = m(L) - \lambda(L)$ ,  $\chi(T) = \chi(L)$ ,  $\lambda(T) = 0$ , называется **каркасом** графа. Рёбра графа  $L$ , не принадлежащие его каркасу  $T$ , называются **хордами** каркаса  $T$  и  $L$ . Число рёбер каждого из каркасов графа  $L$  называется **рангом**  $\rho(L)$  этого графа и обозначается через  $\rho(L) = m(L) - \lambda(L) = n(L) - \chi(L)$ .

Если граф связан, то всякий его каркас является деревом.

**Теорема.** Каковы бы ни были каркас  $T$  графа  $L = (x, u, \rho)$  и хорда  $U$  этого каркаса, в  $L$  существует цикл, содержащий и не содержащий других хорд каркаса  $T$ ; причём этот цикл простой и только один.

**Доказательство.** Пусть  $X$  и  $Y$  вершины графа  $L$ , соединённые ребром  $U$ , а  $T'$  — та компонента каркаса  $T$ , что содержит эти вершины. Так как  $T'$  — дерево, то в нём имеется одна и только одна простая цепь, соединяющая  $X$  с  $Y$ , и эта цепь вместе с ребром  $U$  образует искомый цикл, который называется простым и единственным.

Эта теорема позволяет получать одни каркасы из других. Пусть  $T$  — искомый каркас  $L$ , а  $U$  — какая-то хорда этого каркаса (не петля). Добавив в  $T$  ребро  $U$ , выявим цикл, содержащий  $U$ , и исключим из него какое-то другое ребро (не  $U$ ).

Таким образом можно получить все каркасы графа.

### 3.5.1 Алгоритм Степанеца, Влэдуца нахождения каркаса графа

Алгоритм основан на использовании разметки вершин, применяемой при нахождении кратчайшей цепи.

Произвольную вершину графа метим меткой 0, далее присваиваем метку 1 всем вершинам, смежным с помеченными, и т.д., пока все вершины не будут помечены. Если с, то повторяем этот процесс для всех компонент.

Окончив разметку, просматриваем вершины графа и удаляем рёбра по следующему правилу. Если мы находимся в вершине  $X$  с меткой  $\mu$ , то удаляем рёбра, которые соединяют  $X$  с вершинами, имеющими метку  $\mu$ , а из рёбер, соединяющих  $X$  с вершинами с меткой  $\mu-1$ , сохраняем одно, удаляя все остальные.

**Пример 3.5.1.** На примере графа на рисунке 3.4.1 рёбра каркаса  $T$  изображены жирными линиями; вершины просматривались в алфавитном порядке.

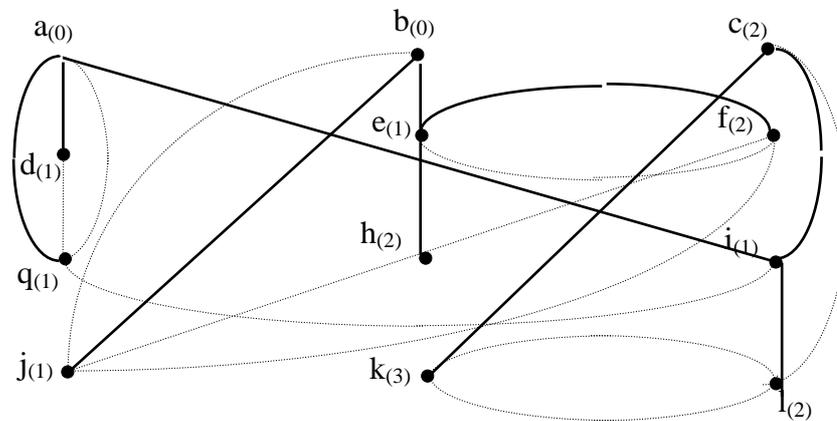
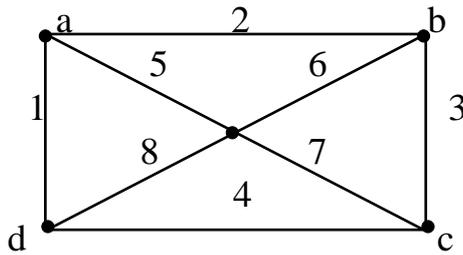


Рис. 3.5.1

### 3.5.2 Анализ цикломатических свойств графа по матрице инциденций

В матрице инциденций  $A = \|a_{ij}\|$  над свободным полукольцом, где  $a_{ij}$  – некоторые слова, построенные из элементов  $\zeta, \eta, \varsigma, \theta$ , содержится исчерпывающая информация о графе  $L = (x, u, \rho)$ . Однако, так как нас при анализе цикломатических свойств графа не интересуют ни ориентация, ни индивидуальность звеньев графа, можно наложить следующие определяющие отношения:

$$\zeta \quad \eta \quad \theta \quad 1, \quad \varsigma = 0, \eta = 0.$$

**Пример 3.5.2.**

$$A_L = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

**Теорема.** Система  $S$  некоторых столбцов матрицы инциденций  $A_L$  графа  $L$  линейно независима тогда и только тогда, когда суграф  $T_S$ , порождённый множеством тех рёбер графа  $L$ , которые соответствуют столбцам  $S$ , не содержит циклов.

**Следствие 1.** Ранг  $\rho(A_L)$  матрицы инциденций  $A_L$  равен рангу графа  $L$ .

Действительно, из графа  $L$  всегда можно удалить  $m - \rho(L)$  рёбер, чтобы оставшемуся суграфу  $L'$  отвечали линейно независимые столбцы матрицы  $A_L$ , поэтому  $\rho(A_{L'}) \geq \rho(L)$ . С другой стороны, всякий суграф, получаемый из  $L$  удалением менее чем  $m - \rho(L)$  рёбер, обладает циклами, поэтому система более чем из  $\rho(L)$  столбцов матрицы  $A_L$  всегда линейно зависима, откуда  $\rho(A) \leq \rho(L)$ .

**Следствие.** Система  $S$  из  $\rho(L)$  столбцов матрицы  $A_L$  линейно независима тогда и только тогда, когда соответствующий суграф  $T_S$  является каркасом графа  $L$ .

Действительно, высказывание о линейной независимости в данном случае равносильно высказыванию  $\rho(T_S) = \rho(L)$ , т.е. вместе с  $m(T_S) = \rho(L)$ , высказыванию  $m(T_S) = m(L) - \lambda(L)$  &  $\lambda(T_S) = 0$ , означающему, что  $T_S$  – каркас графа  $L$ .

**3.5.3 Определение числа каркасов**

Пусть дан граф  $L = (X, U, \rho)$ , где  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .

Образует квадратную матрицу

$$S_n = \left\| S_{ij} \right\| = \left\{ \begin{array}{l} 2S(X_1) - V(X_1) - S(X_1X_2) - \dots - S(X_1X_n) \\ -S(X_1X_2) + 2S(X_2) - V(X_2) - \dots - S(X_2X_n) \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ -S(X_nX_2) - S(X_nX_3) - \dots - 2S(X_n) - V(X_n) \end{array} \right\},$$

в которой каждый диагональный элемент  $S_{ij}$  выражает количество петель графа  $L$ , инцидентных вершине  $X_i$ , а элемент  $S_{ij}$  при  $i \neq j$  равен взятому со знаком минус числу рёбер, соединяющих вершины  $X_i$  и  $X_j$ .

**Теорема Лантьера–Трента.** Пусть  $\Delta$  – некоторый главный минор порядка  $\rho = \rho(L)$  матрицы  $S_L$ , полученный вычёркиванием  $\chi(L)$  строк и такого же количества одноимённых столбцов. Если вычеркнутые ряды соответствуют вершинам графа  $L$ , взятым по одной из каждой его компоненты связности, то  $\Delta$  равен числу различных каркасов графа  $L$ ; в остальных случаях  $\Delta = 0$ .

Если граф  $L$  связан, то  $\rho(L) = n - 1$  и искомое число каркасов равно любому из главных миноров  $n-1$ -го порядка матрицы  $S_L$  (т.е. вычеркнуты могут быть любая строка и столбец матрицы  $S_L$ ).

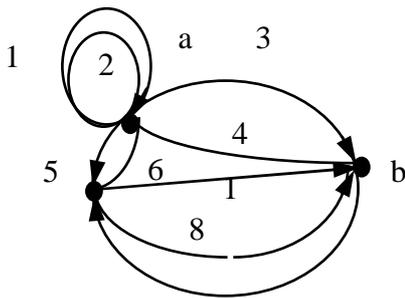
## 4 ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

### 4.1 Маршруты на ориентированном графе

Если в определении маршрута  $X_0U_1X_1U_2X_2\dots X_{l-1}U_lX_l$  графа  $L = (x, u, \rho)$  заменить требование истинности высказывания  $\tilde{m}(X_0, U_1, X_1) \& \tilde{P}(X_1, U_2, X_2) \& \dots \& \tilde{P}(X_{l-1}, U_l, X_l)$  более жёстким требованием истинности  $m(X_0, U_1, X_1) \& P(X_1, U_2, X_2) \& \dots \& P(X_{l-1}, U_l, X_l)$ , то получится определение **частично ориентированного маршрута** из вершины  $X_0$  в вершину  $X_L$ ; понятия **частично ориентированного цикла** возникают автоматически.

Требую, чтобы все рёбра частично ориентированного маршрута были дугами, приходим к понятиям **ормаршрута**, **орцепи** и **орцикла**. Путём называется частично ориентированная цепь, не содержащая звеньев.

**Пример 4.1.1.** В графе на рисунке.4.1.1 маршруты  $a_1 a_4 b_9 c_1$



$a_3 b_9 c_6 a$  (циклический) являются частично ориентированными, но не маршрутами, а  $b_9 c_8 b_9 c$  (циклический) суть ормаршрут; маршрут  $a_3 b_9 c_8 b$  есть орцепь (не простая), а  $a_3 b_9 c_6$  –простая орцепь; маршрут  $b_9 c_8 b$  – простой орцикл.

Рис. 4.1.1

Для нахождения количества частично ориентированных маршрутов заданной длины  $l$  из  $i$ -ой в  $j$ -ую вершину графа  $L$  по его матрице смежности  $R$  достаточно на образующие полукольца  $K$  наложить соотношения

$$\eta\xi = 0; \quad \xi\eta = \eta^2 = \Theta^2 = 1,$$

тогда искомое количество маршрутов будет равно элементу  $r_{ij}^{(\ell)}$  матрицы  $R^e = \left\| r_{ij}^{(e)} \right\|$ .

Аналогично подсчитываются маршруты, если  $K$  подчинить условиям

$$\eta\xi = \eta^2 = \Theta = 0; \quad \xi\eta = 1,$$

а чтобы посчитать частично ориентированные маршруты без звеньев надо положить

$$\eta\xi = \Theta^2 = 0; \quad \xi\eta = \xi^2 = 1.$$

Так, для графа на рис. 4.1.1 в первом случае имеем:

$$R = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad R^2 = \begin{vmatrix} 8 & 8 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad R^3 = \begin{vmatrix} (3 \ 0) & (2 \ 8) & (2 \ 4) & 0 \\ (1 \ 2) & (1 \ 0) & (1 \ 0) & 0 \\ (1 \ 4) & (1 \ 2) & (1 \ 0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

во втором:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad R^2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad R^3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

в третьем:

$$R = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad R^2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad R^3 = \begin{vmatrix} 8 & 10 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Если мы интересуемся лишь наличием или отсутствием маршрутов данной длины, а не их количеством, мы можем наложить на полу кольцо  $K$  дополнительное соотношение  $2=1$ .

Для нахождения кратчайших орцепей из вершины  $X$  в вершину модифицируем алгоритм разметки вершин с целью учёта ориентации: очередной значок получают не просто смежные с рассматриваемой вершины, а лишь те, в которые из неё идут дуги.

Пусть  $X_0U_1X_1U_2X_2\dots X_{l-1}U_lX_l$  в орграфе  $L=(X,U,P)$ , содержащий все рёбра, называется **эйлеровым путём**; при  $X_0=X_l$  имеем **эйлеровый циклический путь**.

Вводя числа

$$V^+(X) = S^+(X) + S^0(X) \\ V^-(X) = S^-(X) + S^0(X),$$

называемые соответственно **полувалентностью** исхода и **полу-**

**валентностью** захода вершины  $X$ , можно сформулировать следующий критерий.

**Теорема.** Для существования эйлерова пути из вершины  $X_0$  в вершину  $Y_0$  связного орграфа  $L$  необходимо и достаточно выполнение условий

$$\forall X \in X \setminus \{X_0, Y_0\} [V^+(X) = V^-(X)]$$

$$X_0 \neq Y_0 \rightarrow V^+(X_0) - V^-(X_0) = V^-(Y_0) - V^+(Y_0) = 1.$$

**Гамильтоновым путём (гамильтоновым орциклом) орграфа  $L$**  называется простой путь (простой орцикл), содержащий все вершины  $L$ .

#### 4.1.1 Транзитивные и квазитранзитивные графы

Граф  $L=(X, U, P)$  называется **транзитивным**, если  $\forall X, Y, Z \in X \exists U \in UP(X, Y, Y) \& \exists v \in UP(Y, V, Z) \rightarrow [\exists \omega \in UP(X, \omega, Z)]$ , и **квазитранзитивным**, если

$$\forall X, Y, Z \in X [\exists U \in UP(X, Z) \& \exists v \in UP(Y, V, Z) \rightarrow \exists \omega \in U\tilde{P}(X, \omega, Z)].$$

**Пример 4.1.2.** Если вершины графа изображают людей, дуги – иерархическое превосходство (например, старшинство), то граф – транзитивный.

Таким образом, транзитивный граф есть частный случай квазитранзитивного.

Из определения имеем:

- всякий подграф (не суграф!) транзитивного (квазитранзитивного) графа является транзитивным (квазитранзитивным);
- если квазитранзитивный граф содержит звено или пару противоположных дуг, то при каждой из двух вершин, инцидентных этому звену (этой паре дуг), имеется хотя бы одна петля;
- если транзитивный граф содержит циклический частично ориентированный маршрут длины  $\geq 2$ , то при каждой вершине этого маршрута есть хотя бы одна петля. Из определения подграфа для доказательства второго достаточно в определении квазитранзитивности положить  $X=Z$ , последовательное применение определения транзитивности даёт третье утверждение.

Пусть образующие полукольца подчинены условиям

$$\xi\eta = \xi^2 = \Theta^2 = 1; \quad \eta\xi = 0 \quad l = 1,$$

т.е. элементы матрицы смежности графа принадлежат  $B\{0,1\}$ .

**Теорема.** Пусть  $L=(X,U,P)$  – граф с упорядоченным множеством вершин  $X$ , а  $R$  – его матрица смежности  $B$ . Тогда необходимым и достаточным условием транзитивности графа является  $R=R^2=R$ , а условием квазитранзитивности –  $R+R^T+R^2=R+R^T$

**Доказательство.** Если  $r_{ij}=1$ , т.е. хоть одна дуга или звено, соединяющие  $X_i$  и  $X_j$ , а при  $X_i$  и  $X_j$  – петля, то истинно  $\exists uP(X_i, u, X_j)$ . Элемент  $r^{(r)}_{ij}=1$  в том и только в том случае, если из  $X_i$  в  $X_j$  ведёт некоторый частично ориентированный маршрут длины 2, т.е. есть  $X_K$ , что истинно  $\exists uP(X_i, U, X_K) \& \exists vP(X_K, V, X_j)$ ; но при транзитивности графа и только тогда это и только это высказывание влечёт за собой истинность  $\exists \omega P(X_i, \omega, X_j)$ , т.е. равенство  $r_{ij}=1$ , какими бы не были  $X_i$  и  $X_j$ . Значит,  $L$  транзитивен в том и только в том случае, если матрица  $R^2$  поглощается матрицей  $R$ , т.е. если  $R+R^2=R$ .

Аналогично доказывается второе утверждение теоремы.

#### 4.1.2 Транзитивное замыкание

**Транзитивным замыканием** графа  $L=(X,U,P)$  называется его минимальный транзитивный сверхграф, т.е. такой граф  $N=(X,V,P)$ , что

$N$  – есть сверхграф для  $L$ ;

$N$  – транзитивный граф;

$P$  – не существует транзитивного сверхграфа  $N'=(X',V',P)$  графа  $L$ , у которого  $u \in V \odot \in V$ .

Транзитивное замыкание  $N=(X,V,P)$  графа  $L$  называется **экономным**, если множество  $V \setminus U$  не содержит звеньев.

**Пример 4.1.3.**

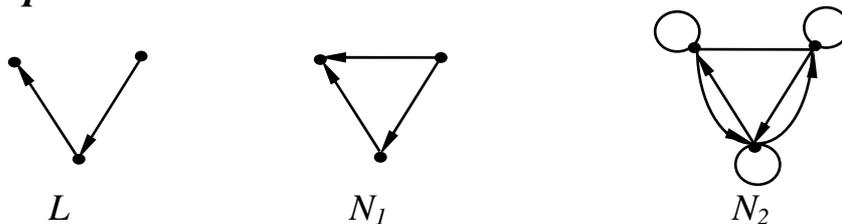


Рис. 4.1.2

Транзитивное замыкание  $N_1$  графа  $L$  экономное,  $N_2$  – не экономное (перестраховка).

**Теорема.** Всякий граф обладает одним и только одним экономным транзитивным.

Экономное транзитивное замыкание графа может быть построено по его матрице смежности  $R$  на  $B\{0,1\}$ .

Пусть матрица смежности над  $B\{0,1\}$  экономного транзитивного замыканий. В любом транзитивном замыкании  $N=(X,V,P)$  вместе с каждым частично ориентированным маршрутом  $X_0V_1X_1\dots X_{i-1}V_iX_i(S)$  – должна быть дуга из  $X_0B_Kl$ . Следовательно, матрица  $S$  должна поглощать все степени матрицы  $R$ , т.е. поглощать сумму

$$R+R^2+\dots+R^{l+1}=R(E+R)^l.$$

При некотором  $l$

$$R(E+R)^{l_0}=R(E+R)^{l_0+1}$$

и эта матрица транзитивная и можно

$$S=R(E+R)^{l_0}.$$

Следствиями из доказанной теоремы полагаются следующие утверждения – в классе всех неориентированных униграфов каждый граф обладает единственным транзитивным замыканием.

## 4.2 Бикомпоненты графа

Говорят, что в орграфе  $L=(X,U,P)$  вершина  $Y$  достижима из вершины  $X$ , если существует путь из  $X$  в  $Y$ . Высказывание « $Y$  достижима из  $X$  в  $L$ » будет обозначать  $D(X,Y)$ .

Вершины  $X$  и  $Y$  в  $L$  взаимодостаточны, если истинно  $D(X,Y) \& D(Y,X)$ . Отношение взаимодостижимости рефлексивно, симметрично и транзитивно, поэтому множество  $X$  разбивается на попарно непересекающиеся подмножества взаимодостижимых вершин подграфа. Порождаемые этим подмножеством называются компонентами бисвязности (бикомпонентами). И их количество обозначается через  $\bar{\chi}(L)$ . При  $\bar{\chi}(L)=1$  граф называется бисвязным.

**Пример 4.2.1.** Граф на рисунке 4.2.1. имеет три компоненты бисвязности – они порождаются множествами вершин  $\{a,b,c\}$ ,

$\{d,l\},\{f\}$ . Если направление дуги изменить на противоположное,

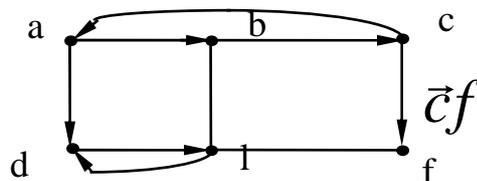


Рис. 4.2.1

то граф станет бисвязным.

Пусть граф задан матрицей смежности  $R$  над  $B\{0,1\}$ . Элемент матрицы  $S_{ij}^{(l)}$  матрицы  $(E+R)^2$  равен 1 тогда и только тогда, когда из  $i$ -ой вершины графа в  $j$ -вершину существует путь длины не более  $l$ . Существует также  $l$ , что  $(E+R)^{lo}=(E+R)^{lo+}$ , причём  $S_{ij}^{(lo)}$  равен 1 в том и только в том случае, если  $j$ -ая вершина достижима из  $i$ -ой. Тогда каждая бикомпонента состоит из тех вершин, которым в матрице  $(E+R)^{lo}$  отвечают одинаковые строки.

**Пример 4.2.2.** Для графа на рис. 4.2.1 имеем

$$E + R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (E + R)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(E + R)^3 = (E + R)^4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**Теорема Камьона–Фаулькса.** Полный обыкновенный орграф обладает гамильтоновым циклом тогда и только тогда, когда он бисвязен.

**Теорема Редери.** Всякий плотный орграф имеет хотя бы один гамильтонов путь.

### 4.2.1 Базы вершин. Ядра

Множество  $Z \in X$  называется базой вершин орграфа  $L=(X,U,P)$ , если

$$\bigcup_{z \in Z} D(Z) = X \quad \text{и} \quad \forall z_1, z_2 \in Z [z_1 + z_2 \rightarrow z_1 \notin D(Z)]$$

$$D(Z) = \{Y / Y \subset D(Z, Y)\},$$

т.е. множество  $L$  вершин, достижимых из вершины  $Z$ . Иными словами, всякая из вершин достижима хотя бы из одной вершины  $Z$  множества  $X$ , но различные вершины множества  $Z$  недостижимы друг из друга.

Бикомпоненту  $L_i=(X_i, U_i, P)$  орграфа  $L=(X, U, P)$  назовём базовой, если в неё не заходит извне ни одна дуга.

Базовые бикомпоненты можно найти по «установившейся» матрице  $(E+R)^{lo}$ : её столбец отвечает вершине из базовой компоненты тогда и только тогда, когда он не поглощает (при сложении) никакой другой столбец с меньшим числом единиц; иначе – если строка не поглощается никакой строкой с большим числом единиц.

**Лемма.** Всякий орграф имеет по крайней мере одну базовую компоненту.

**Теорема.** Множество  $Z \in X$  является базой вершин орграфа тогда и только тогда, когда оно образовано вершинами, взятыми по одной из каждой базовой бикомпоненты этого графа.

**Следствие 1.** Все базы вершин одного и того же орграфа обладают одинаковым числом вершин.

**Следствие 2.** Для единственности базы вершин орграфа необходимо и достаточно, чтобы каждая его базовая бикомпонента была одновершинной.

Алгоритм нахождения баз вершин включает в себя выявление базовых бикомпонент графа.

Обозначим  $\Xi$  отображение, относящее каждому не пустому подмножеству  $Y \in X$  некоторое подмножество  $\Xi Y \in X$ , т.е.  $\Xi Y = \bigcup_{x \in Y} X$ .

Множество  $N^+ \in X$  называется положительным ядром орграфа  $L$ , если  $\Xi N^+ = X \setminus N^+$ ; аналогично множество  $N^- \in X$  есть отрицательное ядро, если  $\Xi N^- = X \setminus N^-$ .

Иначе, определения для  $N^+$  и  $N^-$  имеют вид:

$$\forall x \in N^+ (\Gamma x \cap N^+ = \emptyset) \ \& \ \forall y \in x \setminus N^+ (\Gamma^{-1} y \cap N^+ \neq \emptyset)$$

и 
$$\forall x \in N^- (\Gamma x \cap N^- = \emptyset) \ \& \ \forall y \in x \setminus N^- (\Gamma^{-1} y \cap N^- = \emptyset)$$

**Пример 4.2.3.** Граф  $L_1$  на рисунке 4.2.2 обладает как положительным, так и отрицательным ядром, граф  $L_2$  – двумя ядрами, каждое из которых одновременно и положительное, и отрицательное, граф  $L_3$  – положительным ядром, а граф  $L_4$  не имеет ядер.

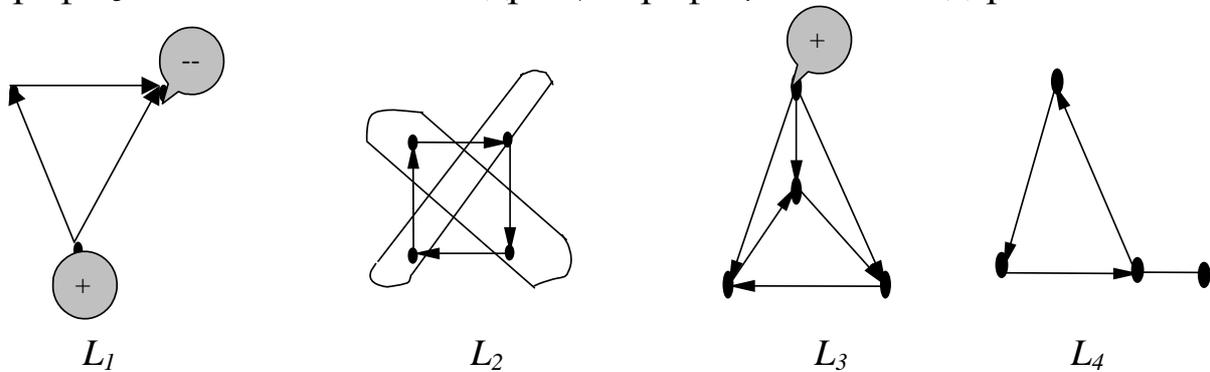


Рис. 4.2.2

Изменение ориентации всех дуг орграфа на противоположную превращает все положительные ядра в отрицательные и наоборот.

**Пример 4.2.4.** Пусть  $X$  множество решений, каждое из которых может быть принято в некоторой ситуации. Выбор одного из этих решений поручен группе экспертов, каждый из которых имеет своё мнение о взаимной предпочтительной в отношении каждой пары решений. Считаем, что решение  $X$  эффективно, но предпочитается решению  $Y$ , если часть экспертов, считая  $X$  лучше  $Y$ , имеет возможность добиться того, чтобы удобная им точка зрения одержала верх. Однако если другая часть экспертов (может быть и частично совпадающая с первой) считает, что  $Y$  лучше  $Z$  и может добиться принятия решения  $Y$  (т.е.  $Y$  эффективно предпочитается  $Z$ ), то может быть, что  $X$  эффективно не предпочитается  $Z$ : отношение эффективного предпочтения не транзитивно.

Введём в рассмотрение граф Бержа с множеством вершин  $X$ , считая за  $\Gamma x$  множество решений, эффективно предпочитаемых решению  $x$ .

Пусть  $N^-$  – отрицательное ядро графа (если оно существует); Он Нейман и Моргенштерн предполагают ограничиться рассмотрением решений, соответствующих вершинам из  $N^-$ . В обоснование этого предложения заметим, что никакое решение из  $N^-$  не может эффективно предпочтаться какому-либо решению из  $N^-$ , а это обеспечивает известную сплочённость; с другой стороны, любое решение  $x \in X \setminus N^-$  – эффективно предпочтается некоторое решение из  $N^-$ , в силу чего  $X$  сразу отвергается.

#### 4.2.2 Алгоритм Рудяну нахождения ядер графа

Алгоритм основан на следующей теореме.

**Теорема.** Подмножество  $N^+ \in X$  вершин орграфа  $L=(X,U,P)$  является его положительным ядром тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:

1.  $E^+ \notin N^+ \subseteq E^- \subseteq N^+$
2.  $N \cap \Xi E^+ = \emptyset$
3. множество  $N \setminus E^+$  есть положительное ядро подграфа  $L'=(X',U,P)$ , где  $X \odot = X \setminus (E^+ \cup \Xi E^+)$ .

Для отрицательных ядер справедлива двойственная теорема.

Здесь  $E^- = \{X \setminus x \in X \ \& \ \Gamma x = \emptyset\}$  – множество всех тупиков графа  $L$ .  $E^- = \{X \setminus x \in X \ \& \ \Gamma^{-1} = \emptyset\}$  – множество всех анти-тупиков  $L$ .

**Доказательство.** Пусть  $N$ -произвольное подмножество  $UX$ , удовлетворяющее условиям 1 и 2, а  $N' = N \setminus E^+$

Ясно, что (рис. 4.2.3)

$$\Xi_L N = \Xi_L N' \vee \Xi E^+$$

$$\Xi_L N' = \Xi N \setminus \Xi_L E^+$$

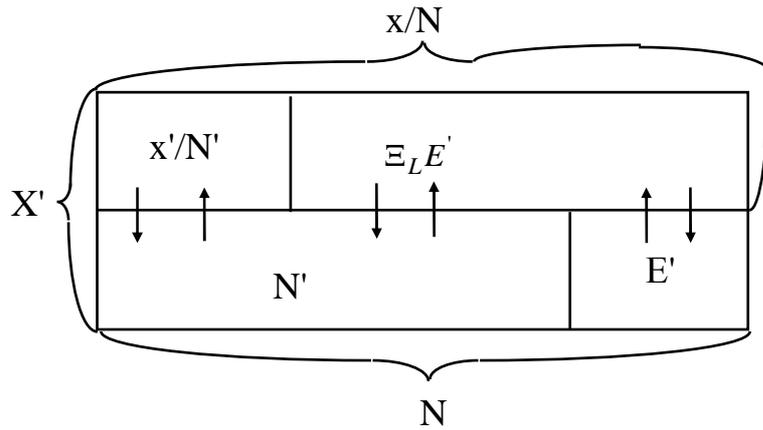


Рис. 4.2.3

Если  $N$  удовлетворяет, кроме 1 и 2, также условию 3, т.е.  $\Xi_{L'} N' = X' \setminus N'$ , то  $\Xi N = \Xi_{L'} N' \vee \Xi_L E^+ = (X' \setminus N') \vee \Xi_L E^+ = X \setminus N$ , а это означает, что  $N$  является положительным ядром графа  $L$ .

Наоборот, если  $N$  положительное ядро  $L$ , т.е.  $\Xi N = X \setminus L$ , то условие 1 и 2, очевидно, выполнены, поэтому  $\Xi L' N' = \Xi_L E^+ = (X \setminus N) \setminus \Xi_L E^+ = X' \setminus N'$ , иначе  $N$  – положительное ядро  $L$ . При  $E^+ = \emptyset$  теорема вырождается в тавтологию.

**Пример 4.2.5.** Найти ядро графа, изображённого на рисунке 4.2.4.

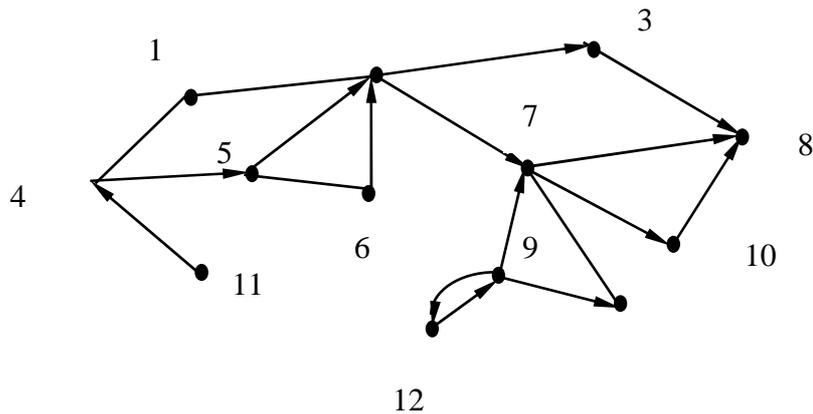


Рис. 4.2.4

Начнём с положительных ядер. Прежде всего

$$E_L^+ = \{1,1\}, \Xi_L \Xi^+ L =$$

В подграфе  $L'$ , полученном из  $L$  пополнением вершин 4 и 11, имеем

$$E_{L'}^+ = \{1,5\}, \Xi_{L'} E_{L'}^+ = \{2,6\}.$$

Удаляя из  $L'$  вершины 1,5,2 и 6, получим  $L''$ , у которого

$$E_{L''}^+ = \{3\}, \Xi_{L''}^+ E_{L''}^+ = \{8\}.$$

Наконец, удаление из  $L''$  вершин 3 и 8 даёт граф  $L''$  без антитупиков (рис. 4.2.5).

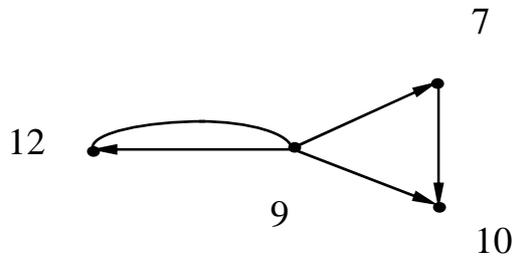


Рис. 4.2.5

Визуально находим в  $L''$  два положительных ядра:  $\{9\}$  и  $\{7,12\}$ . Согласно теореме в  $L''$  положительными ядрами являются  $\{3,9\}$  и  $\{3,7,12\}$ , в  $L - \{1,3,5,9\}$  и  $\{1,3,5,7,12\}$ , а в исходном графе  $L N_1^+ = \{1,3,5,9,11\}$  и  $N_2^+ = \{1,3,5,7,11,12\}$ .

Для отрицательных ядер аналогично имеем

$$E_L^- = \{8\}; \quad \Xi_L E_L^- = \{3,7,10\}.$$

В подграфе  $L'$ , после удаления вершин 8,3,7,10:

$$E_{L'}^- = \{2\}, \quad \Xi_{L'}^{-1} E_{L'}^- = \{1,5,6\}$$

и т.д. Окончательно получим  $N^- = \{2,4,8,12\}$ .

## 5 РАСКРАСКА ГРАФОВ

### 5.1 Раскраска вершин графа

Говорят, что дано гомоморфное отображение (гомоморфизм)  $\Psi$  графа  $L=(X,U,P)$  в граф  $L'=(X',U',P')$ , если каждой вершине  $x \in X$  и каждому ребру  $u \in U$  графа  $L$  однозначно отнесены их образы  $\Psi(x) \in X'$  и  $\Psi(u) \in U'$  в  $L'$  с сохранением инцидентности, т.е.

$$\forall x, y \in X \vee u \quad U[P(xiu) \rightarrow P'(\Psi(x), \Psi(u), \Psi(y))].$$

Из определения гомоморфизма ясно, что он не обязательно сохраняет тип рёбер, так, если две различные вершины  $x, y \in X$  имеют один образ,  $\Psi(x) = \Psi(y) = X'$  переходят в петли. Вообще при гомоморфизме дуга может перейти в дугу, звено или петлю, а петля – только в петлю. Поэтому есть частный случай гомоморфизма: отображение  $\Psi$  тождественно как на  $X$ , так и на  $U$ , а образом графа  $L=(X,U,P)$  служит соответствующий неграф  $\tilde{L} = (X, U, P)$ .

Важную роль в теории графов играют некоторые обобщения гомоморфных отображений, которые будем называть частичными гомоморфизмами, не пытаясь дать самое общее определение этого понятия.

К первому типу отнесём отображения, отличающиеся от гомоморфизмов только тем, что не все вершины и не все рёбра обязательно имеют образы. Таковы, например, операции образования любой части данного графа (выбрасывание некоторых рёбер и некоторых вершин вместе с инцидентными рёбрами), с возможным последующим добавлением новых элементов; операция образования скелета графа и т.д.

Особый интерес представляют два частичных гомоморфизма первого типа: раскраска и стягивание.

Раскраской вершин графа  $L$  называется такой частичный гомоморфизм первого типа, который отображает  $L$  в полный обыкновенный граф  $F$  и при котором каждое ребро имеет образ, если только две инцидентные ему вершины обладают образами.

Наглядное истолкование отображения состоит в следующем: граф  $F$  – это палитра, в вершинах которой находятся различные краски; некоторые вершины окрашиваются, притом с соблюдением условия: чтобы никакие две смежные вершины не оказались окрашены в один цвет. В число не окрашенных вершин, очевидно, попадут все те, при которых есть петли.

Другое представление раскраски вершин заключается в том, что вершине  $X$  графа  $L=(X,U,P)$  относится целое неотрицательное число  $q(x)$  с соблюдением условия.

$$\forall(x, y) \in X [J(x, y) - q(x) \neq q(y) \vee q(x) = 0 \vee q(y) = 0],$$

при этом  $q(x) = 0$  означает, что вершина  $x$  не окрашена, а при  $q(x)=i>0$  число  $i$  можно рассматривать как номер той вершины графа  $F$ , в которую отображена  $x$ .

Наконец, раскраска вершин равносильна выделению  $L$  некоторой системы попарно непересекающихся пустых подграфов.

Если раскраска графа  $L$  является отображением на  $F$ , то имеем раскраску  $n(F)$  цветами. Раскраска называется полной, если окрашены все те вершины, при которых нет петель. Наименьшее количество цветов, достаточное для полной раскраски вершин графа, называется хроматическим числом и обозначается  $\gamma(L)$ .

Заметим, что всевозможные раскраски вершин произвольного графа находятся во взаимно однозначном соответствии со всевозможными раскрасками вершин скелета графа, следовательно, при изучении раскрасок вершин можно ограничиться только обыкновенными графами.

Очевидно, что если  $L_1, L_2, \dots, L_x$  – компоненты графа  $L$ , то

$$\gamma(L) = \max \{ \gamma(L_1), \gamma(L_2), \dots, \gamma(L_x) \}.$$

Известны следующие оценки хроматического числа графа:

1.  $1 \leq \gamma(L) \leq n(L)$  – тривиальная оценка через число вершин;
2.  $\gamma(L) \geq \varphi(L)$  – где  $\varphi(L)$  плотность графа;
3. Оценка Брукса:  $\gamma(L) \geq \delta(L) \geq 1$ , где  $\delta(L)$  степень графа:

$$\delta(L) = \max \{ S(x) / x \in X \}.$$

Полную раскраску вершин графа  $L=(X,U)$  в  $\gamma(L)$  цветов будем называть минимальной.

Рассмотрим ряд примеров.

**Пример 5.1.1.** Пусть  $X$  множество стран и  $(x, y) \in U$ , если страны  $x$  и  $y$  граничат между собой. Требуется раскрасить карту так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один цвет.

**Пример 5.1.2.** Проводится монтаж аппаратуры, например, телефонной станции. Чтобы не перепутать проводники, необходимо провести их окраску таким образом, чтобы два проводника, идущие к одной плате, имели разный цвет.

### 5.1.1 Нахождение минимальной раскраски путём использования соцветных вершин

Рассматривается алгоритм для нахождения минимальной раскраски графа. Две вершины  $x$  и  $y$  графа  $L=(X, U)$  называют соцветными, если существует такая минимальная раскраска  $q(x)$  его вершин, при которой  $q(y)=q(z)$ .

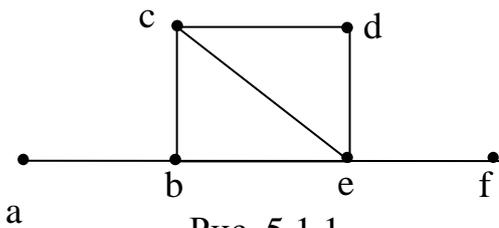


Рис. 5.1.1

Отношение соцветности симметрично и рефлексивно, но не транзитивно (так, например, вершины  $a$  и  $f$  графа на рис. 5.1.1 соцветны, вершины  $f$  и  $d$  тоже соцветны, а  $a$  и  $d$  – не соцветны).

Смежные вершины всегда несоцветны, но обратное утверждение неверно (см., например, вершины  $a$  и  $d$ ).

Показано, что неполный связный граф  $L=(X, U)$  всегда обладает хотя бы парой соцветных различных вершин. отождествление двух таких вершин превращает  $L$  в связный граф  $L'$  с прежним хроматическим числом. Если  $L'$  неполный, то в нём опять имеется пара различных соцветных вершин и т.д. Продолжая процесс отождествления, в конечном итоге получим полный граф  $F\gamma(L)$ , а одна из минимальных раскрасок вершин исходного графа находится следующим образом: окрасим вершины  $F\gamma(L)$  в цвета  $1, 2, 3, \dots, \gamma(L)$  и придадим вершине  $x \in X$  графа  $L$  цвет той вершины графа  $F\gamma(L)$ , в которую она перешла после всех отождествлений.

Описанный алгоритм был бы весьма удобен при наличии хорошего критерия соцветности вершин, однако такого универсального критерия пока нет.

Одним из локальных критериев соцветности является следующий:

Если  $x$  и  $y$  две несмежные вершины, и  $\Gamma_x \in \Gamma_y$ , то  $x$  и  $y$  соцветны.

**Пример 5.1.3.**

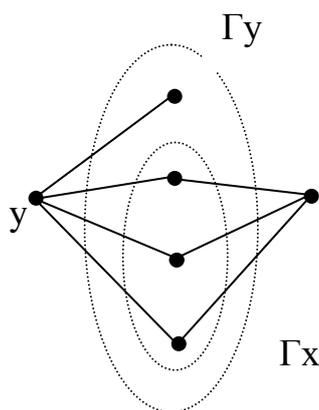


Рис. 5.1.2

### 5.1.2 Алгоритм Витавера нахождения минимальной раскраски вершин

Алгоритм основан на нахождении некоторой специальной ориентации рёбер. Пусть  $L=(X,U)$  – данный обыкновенный граф. Через  $\tau(L)$  обозначим наибольшее из таких целых чисел  $K$ , что при любой ориентации всех рёбер графа полученный орграф  $\vec{L}=(X,\vec{U})$  содержит по крайней мере один ормаршрут длины  $K$ .

**Теорема Витавера:**

$$\gamma(L) = \tau(L) + 1.$$

*Доказательство:* Пусть  $\ell = \gamma(L)$  и пусть  $q(x)$  – одна из минимальных раскрасок графа  $L$ .

Полагая

$$\vec{U} = \{ \overrightarrow{xy} \mid x\tilde{y} \in U \ \& \ q(x) > q(y) \},$$

получим орграф  $\vec{L}=(X,\vec{U})$ , не содержащий ормаршрутов длины  $\ell$ , а значит, и подавно, ормаршрутов ещё большей длины.

Следовательно,  $\tau(L) \leq \ell - 1$ , т.е.

$$\gamma(L) \geq \tau(L) + 1 \quad (*)$$

Пусть теперь, наоборот, данный граф  $L = (X, U)$  превращён некоторой ориентацией рёбер в оргграф  $\vec{L} = (X, \vec{U}) = (X, \Gamma)$ , не содержащий ни одного маршрута длины более  $\tau(L)$ . Определим последовательность  $X_1, X_2, \dots$  множеств вершин, полагая

$$X_i = \left\{ x \mid x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \ \& \ \Gamma_x \subseteq \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \right\}$$

При этом считаем  $\bigcup_{j=1}^0 X_j = \emptyset$ , т.е.

$$X_1 = \{x \mid x \in X \ \& \ \Gamma_x = \emptyset\}$$

Из определения множеств  $X_i$  непосредственно следует, что

$$i \neq j \Rightarrow X_j \cap X_i = \emptyset; \quad (5.1)$$

$$\text{в каждом } X_i \text{ никакие две вершины не смежны.} \quad (5.2)$$

Кроме того,

$$X_i = \emptyset \Rightarrow X = \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \quad \text{при } i \geq 1 \quad (5.3)$$

В самом деле, равенство  $X_i = \emptyset$  означает (согласно определению  $X_i$ ), что

$$\forall x \in X \left( x \notin X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \vee \Gamma_x \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \right)$$

или

$$\forall x [x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \Rightarrow \Gamma_x \cap (X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j) \neq \emptyset],$$

иначе говоря,

$$\forall x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \exists y \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j (y \in \Gamma_x),$$

откуда сразу видно, что в случае  $X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \neq \emptyset$  оргграф  $\vec{L}$  обладал бы сколь угодно длинными ормаршрутами.

Далее

$$X_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in X_i \exists y \in X_{i-1} (y \in \Gamma x), \text{ при } i \geq 2. \quad (5.4)$$

Действительно, пусть  $X_i \neq \emptyset$ , а  $x$  – произвольная вершина из  $X_i$ . По определению  $X_i$  имеем  $\Gamma x \subseteq \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j$ ; и  $x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j$  значит и по-прежнему  $x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j$ , а так как  $x \notin X_{i-1}$ , то  $\Gamma x \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{i-2} X_j$ , следовательно,  $\Gamma_x \cap X_{i-1} \neq \emptyset$ , откуда и вытекает (5.4).

Наконец, из (5.4) и из предположения об отсутствии в  $\vec{L}$  ормаршрутов длины  $> \tau(L)$  заключаем, что

$$i > \tau(L) + 1 \Rightarrow X_i = \emptyset. \quad (5.5)$$

На основании (5.3), (5.5) и не пустоты  $X$  имеем

$$X = \bigcup_{j=1}^l X_j,$$

где  $1 \leq l \leq \tau(L) + 1$  значит, ввиду (5.1) и (5.2) система множеств  $X_1, X_2, \dots, X_l$  есть полная раскраска вершин графа  $L$  в  $l \leq \tau(L) + 1$  цветов.

Отсюда и из (\*) вытекает справедливость теоремы.

Таким образом, нахождении хроматического числа  $\gamma(\vec{L})$  равносильно нахождению числа  $\tau(L)$ , а для построения какой-либо из минимальных раскрасок достаточно задать одну из ориентаций рёбер так, чтобы полученный орграф  $\vec{L}$  не содержал ормаршрутов длины более  $\tau(L)$ , а затем выявить множества  $X_1, X_2, \dots, X_l$ , фигурирующие во второй части доказательства.

Пусть  $R = R_L = (r_{ij})$  – матрица смежности графа  $L$  над  $B = B\{0,1\}$ ;  $\{\varepsilon_{ij}\}$  – система переменных в  $B\{0,1\}$ , соответствующих рёбрам  $L$ ;  $\bar{R} = \bar{R}(\{\varepsilon_{ij}\}) = (\bar{r}_{ij}\{\varepsilon_{ij}\})$  – общий вид матрицы смежности орграфов  $\vec{L}$ , получаемых из  $L$  всевозможными ориентациями рёбер.

Как известно, элемент  $\vec{r}^{(\ell)}_{ij} \{ \varepsilon_{ij} \}$  матрицы  $[\vec{R}(\{ \varepsilon_{ij} \})]^\ell$  равен 1 или 0, смотря по тому, существует или не существует маршрут длины  $\ell$  из вершины  $x_i$  в вершину  $x_j$  в орграфе  $\vec{L}$ , полученном из  $L$  ориентацией рёбер, которая отвечает системе значений  $\{ \varepsilon_{ij} \}$ .

Поэтому

$$\tau(L) = \max \left\{ \ell \mid \sum_{i,j=1}^{n(L)} \vec{r}^{(\ell)}_{ij} \varepsilon_{ij} \equiv 1 \right\},$$

где  $\equiv$  означает равенство при всех системах значений переменных  $\{ \varepsilon_{ij} \}$ . Для нахождения одной из минимальных раскрасок надо задать конкретную систему значений  $\{ \varepsilon_{ij}^* \}$ , при которой

$$\sum_{i,j=1}^{n(r)} \vec{r}_{ij}^{(\tau(r)+1)} \{ \varepsilon_{ij}^* \} = 0,$$

после чего образовать матрицу  $\vec{R}(\{ \varepsilon_{ij}^* \})$  и определить по ней множества  $X_1, X_2, \dots, X_\ell$  следующим образом: к  $X_1$  относим все те вершины  $x \in X$ , которым в  $\vec{R}(\{ \varepsilon_{ij}^* \})$  отвечают строки из одних нулей; затем вычёркиваем из матрицы строки и столбцы, соответствующие вершинам  $X_1$  по оставшейся матрице ищем  $X_2$  точно так же, как искали  $X_1$  по исходной; и так далее до тех пор, пока не будет исчерпана вся матрица.

Существенным недостатком этого способа является весьма быстрый рост сложности булева выражения  $\sum_{i,j=1}^{n(r)} \vec{r}_{ij}^{(\ell)} \{ \varepsilon_{ij} \} = 0$  при увеличении  $\ell$ .

#### **Пример 5.1.4.**

Рассмотрим граф, показанный на рис. 5.1.3.

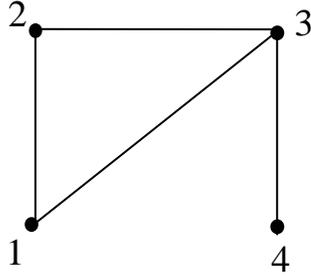


Рис. 5.1.3

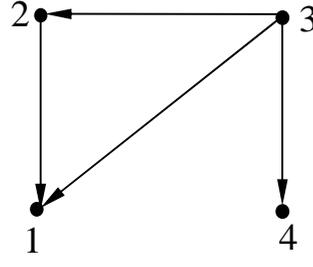


Рис. 5.1.4

Имеем

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \bar{R}(\{\varepsilon_{ij}\}) = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & 0 \\ \varepsilon'_{12} & 0 & \varepsilon_{23} & 0 \\ \varepsilon'_{13} & \varepsilon'_{23} & 0 & \varepsilon_{34} \\ 0 & 0 & \varepsilon'_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sum_{i,j=1}^n \bar{r}_{ij} \{\varepsilon_{ij}\} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon'_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{23} + \varepsilon'_{34} + \varepsilon_{34} = 1.$$

Это означает, что ввиду непустоты данного графа, ормаршруты длины 1 существуют при любой ориентации рёбер.

$$[\bar{R}(\{\varepsilon_{ij}\})]^2 = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} & \varepsilon_{12}\varepsilon_{23} & \varepsilon_{13}\varepsilon_{34} \\ \varepsilon_{23}\varepsilon'_{13} & 0 & \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13} & \varepsilon_{23}\varepsilon_{24} \\ \varepsilon'_{12}\varepsilon'_{23} & \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13} & 0 & 0 \\ \varepsilon'_{13}\varepsilon'_{34} & \varepsilon'_{23}\varepsilon'_{34} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sum_{i,j=1}^n \bar{r}_{ij}^2 \{\varepsilon_{ij}\} = \varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{34} + \varepsilon_{23}\varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{34} + \varepsilon'_{12}\varepsilon'_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{13}\varepsilon'_{34} + \varepsilon'_{23}\varepsilon'_{34} \equiv 1$$

$$[\bar{R}(\{\varepsilon_{ij}\})]^3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} & 0 & 0 & \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon'_{34} \\ 0 & \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13}\varepsilon_{23} & 0 & \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{34} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13}\varepsilon_{23} + \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} & 0 \\ \varepsilon'_{12}\varepsilon'_{23}\varepsilon'_{34} & \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13}\varepsilon'_{34} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \bar{r}_{ij}^3 \{\varepsilon_{ij}\} &= \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon'_{13} + \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}\varepsilon_{34} + \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} + \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{34} + \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13}\varepsilon_{23} + \\ &+ \varepsilon'_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon'_{23} + \varepsilon'_{13}\varepsilon'_{23}\varepsilon'_{34} + \varepsilon_{12}\varepsilon'_{13}\varepsilon'_{34} \neq 1, \end{aligned}$$

следовательно,  $\tau = 2, \gamma = 3$ . Одной из систем значений, при которой последняя сумма равна нулю, будет  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \varepsilon_{34} = 1$ .

Соответствующий оргграф изображён на рис. 5.1.4, а его матрица смежности

$$\vec{R} = \left\| \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right\|$$

Из  $\vec{R}$  сразу находим  $x_1 = \{1, 4\}$ , вычёркивая первую и четвёртую строки, а также первый и четвёртый столбцы, получаем матрицу

$$\left| \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} \right|,$$

из которой  $x_2 = \{2\}$ , вычёркивая первую строку и первый столбец, получаем, что  $x_3 = \{3\}$ . Таким образом,  $x(L) = 3$ , а одной из минимальных раскрасок вершин является такая, при которой первая и четвёртая вершины окрашены в красный цвет, вторая – в зелёный и третья – в синий.

## 5.2 Определение хроматического числа плоского графа

Пусть каждой вершине  $x \in X$  обыкновенного графа  $L = (X, U)$  отнесена некоторая точка плоскости, каждому ребру  $u \in U$  прямолинейный отрезок с концами в тех случаях, которые отвечают вершинам, соединённым с  $L$  ребром  $U$ . Возникает вопрос о возможности изображения их в плоскости, чтобы никакие два ребра не пересекались в точке, являющейся концом хотя бы одного из тех рёбер.

**Пример 5.2.1.** Задача о трёх городах и трёх источниках снабжения. Имеются три города А, В, С и три источника снабжения: водонапорная башня D, газовый завод E, электростанция F (рис. 5.2.1).

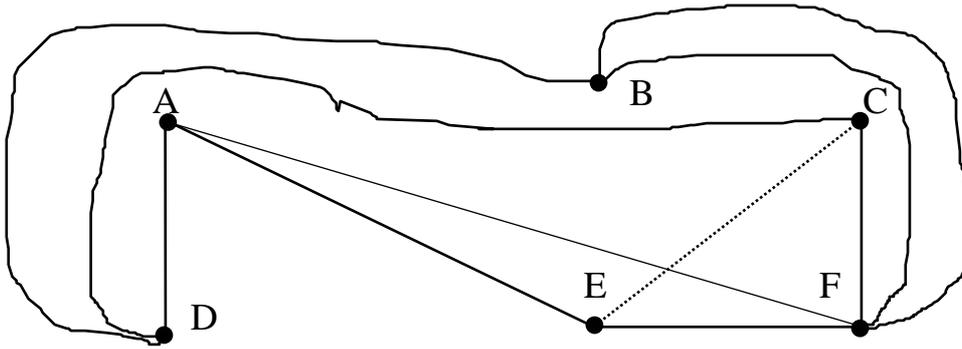


Рис. 5.2.1

Можно ли начертить (на плане) три города, три источника и все линии передач таким образом, чтобы никакие две линии не пересекались между собой в не концевых точках? Непосредственные попытки показывают, что всегда можно нарисовать 8 линий, а девятая обязательно пересечёт хотя бы одну из этих восьми.

Для любого графа, однако, можно всегда попытаться выбрать такое расположение его вершин в плоскости, при котором количество лишних пересечений было бы наименьшим; так, граф F на рис. 5.2.2 допускает изображение с одной лишней точкой пересечения – рис. 5.2.3.

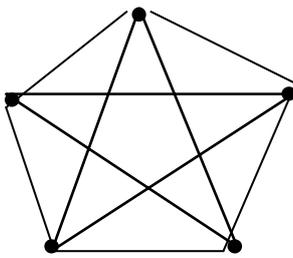


Рис. 5.2.2

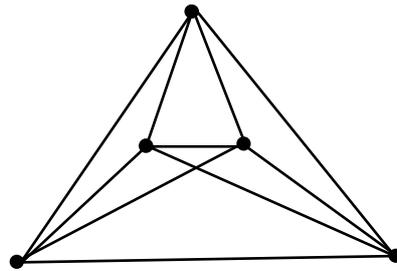


Рис. 5.2.3

В трёхмерном пространстве обыкновенный граф всегда допускает такое расположение, при котором два ребра не пересекаются в точке, отличной от концевых.

Граф называется плоским, если он может быть расположен на плоскости без лишних точек пересечения.

### 5.2.1 Проблема четырёх красок

Что можно сказать о хроматическом числе графа, если известно, что он плоский? Очевидно, оно может быть равным 1,2,3. Для графа на рис. 5.2.4 хроматическое число равно четырём.

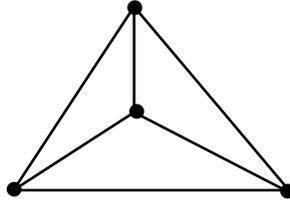


Рис. 5.2.4

До сих пор не удавалось построить ни одного плоского графа  $L$  с  $\gamma(L) > 4$ , что даёт основание выдвинуть гипотезу четырёх красок: хроматическое число плоского графа никогда не превосходит 4. Первоначально эта гипотеза в терминах раскраски карт опубликована А. Кэли в 1878 году, хотя постановка этой проблемы осуществлена ещё А. Мёбиусом в 1840 году.

До настоящего времени гипотеза не доказана и не опровергнута.

#### **Теорема.**

Если  $L = (X, U, P)$  – плоский граф, то  $\gamma(L) \leq 5$ .

В заключение заметим, что для решения задач раскраски возможным является использование аппарата дискретного программирования.

Пусть необходимо проверить возможность раскраски вершин графа посредством  $P$  цветов. Каждому варианту раскраски ставится в соответствие система булевых переменных  $y_{iq}$  ( $i = \overline{1, n}, q = \overline{1, p}$ ), где  $y_{iq}$  равна единице, если вершина  $x_i$  имеет цвет  $q$  и равна нулю в противоположном случае.

Положим также  $r_{ij} = 1$ , если  $x_i$  – концевая вершина ребра  $U_j$ ;  $r_{ij} = 0$  в противном случае.

Тогда задача сводится к определению значений для булевых переменных  $y_{iq}$ , что

$$\sum_{q=1}^p y_{iq} = 1, \quad i = \overline{1, n}; \quad (5.2.1)$$

$$\sum_{i=1}^n r_{ij} y_{iq} \geq 1, \quad j = \overline{1, m}; \quad q = \overline{1, p}. \quad (5.2.2)$$

Пусть необходимо получить окраску вершин минимальным количеством цветов. С этой целью каждому цвету  $q = \overline{1, n}$  отнесём «вес» – натуральное число  $a_q$ , таким образом, что выполняется неравенство:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{q-1} + (n-q+1)a_q < (n-q)a_1 + a_2 + \dots + a_{q-1} + a_q + a_{q+1}, \quad q = \overline{1, n}$$

т.е.  $a_{q+1} > (n-q)a_q - (n-q-1)a_1$ . (5.2.3)

Это неравенство гарантирует, что «самая лёгкая» окраска вершин графа с помощью  $q+1$  цветов всё-таки «тяжелее», чем «самая тяжёлая» окраска  $q$  цветами.

Неравенство (5.2.3) наверняка выполняется, если

$$a_{q+1} = (n-q)a_q - (n-q-1)a_1 + 1,$$

полагая  $a_1 = 1$ , мы получим

$$a_{q+1} = (n-q)[a_q - 1] + 2,$$

откуда находим последовательно (независимо от графа  $L$ ):

$$a_2 = 2, \quad a_3 = n, \quad a_n = n^2 - 4n + 5, \dots$$

Тогда задача раскраски вершин графа сводится к определению самой лёгкой раскраски: найти минимум

$$\sum_{i=1}^n \sum_{q=1}^q a_q \cdot y_{iq}$$

при ограничениях (5.2.1, 5.2.2).

По найденным  $y_{iq}$  хроматическое число вычисляется как

$$\gamma(L) = \sum_{q=1}^p \left[ 1 - \prod_{i=1}^n (1 - y_{iq}) \right].$$