Федеральное агентство по образованию

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Ю.П. Шевелёв

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное методическое пособие

2009

Корректор: Осипова Е.А.

Шевелёв Ю.П.
Дискретная математика: Учебное методическое пособие. — Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2009. — 109 с.

Приведены контрольные задания по теории множеств, математической логике, теории конечных автоматов, комбинаторике и теории графов. Контрольные задания представлены в двух видах: компьютерное тестирование и 10 задач для контрольных работ с письменным представлением решений.

Для формирования контрольных заданий предусмотрено 2000 задач. Из них 1000 тестов и 1000 задач для письменных контрольных работ. Приведены образцы их решения.

Для студентов технических вузов дистанционного, очного и других форм обучения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 5

ЧАСТЬ 1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ 7

1 Вводные замечания 7

2 Тесты по теме № 1: «Операции над множествами» 7

3 Задачи из письменной контрольной работы. Тема 1: «Теория множеств» 9

ЧАСТЬ 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА 13

1 Вводные замечания 13

2 Тесты по математической логике 13

2.1 Тесты по теме № 2: «СДНФ булевых функций» 13

2.2 Тесты по теме № 3: «ДНФ булевых функций» 17

2.3 Тесты по теме № 4: «КНФ булевых функций» 19

2.4 Тесты по теме № 5: «Алгебра Жегалкина» 21

3 Задачи из письменной контрольной работы 23

3.1 Тема 2: «Минимизация нормальных форм» 23

3.2 Тема 3: «Минимизация ДНФ с учетом доопределения» 27

3.3 Тема 4: «Минимизация КНФ с учетом доопределения» 30

3.4 Тема 5: «Операция импликации» 35

3.5 Тема 6: «Дифференцирование булевых функций» 37

ЧАСТЬ 3. ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ 42

1 Тестовое задание 42

1.1 Асинхронный автомат на *T*-триггерах 42

1.2 Тест на тему № 6 «Асинхронный автомат» 44

2 Задачи из письменной контрольной работы 45

2.1 Тема 7: «Синтез преобразователя кодов» 45

2.2 Тема 8: «Автомат на *JK*-триггерах» 53

ЧАСТЬ 4. КОМБИНАТОРИКА 61

1 Вводные замечания 61

2 Тест на тему № 7: «Задача о шахматном городе» 61

3 Тест на тему № 8: «Теория вероятностей» 63

4 Задачи из письменной контрольной работы. Тема 9: «Комбинаторика» 67

ЧАСТЬ 5 . ТЕОРИЯ ГРАФОВ 77
1 Вводные замечания 77
2 Тесты по теории графов 77
2.1 Тесты по теме № 9 «Кодирование деревьев» 77
2.2 Тест по теме № 10 «Эйлеровы графы» 80
3 Задачи из письменной контрольной работы.
Тема 10: «Нахождение простых цепей в графе» 81
3.1 Содержание работы 81
3.2 Простые цепи в неориентированном графе 82
3.3 Простые циклы в неориентированном графе 83
3.4 Простые цепи в ориентированном графе 85
3.5 Оформление решения задачи 86
ЧАСТЬ 6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ 87
1 Интуитивное понятие алгоритма 87
1.1 Определения понятия алгоритма 87
1.2 Алгоритм нахождения наибольшего общего делителя 87
1.3 Пример логической задачи 88
1.4 Общие свойства алгоритмов 89
2 Уточнения понятия алгоритма 91
2.1 Необходимость уточнения понятия алгоритма 91
2.2 Машины Тьюринга-Поста 92
2.3 Программирование машины Поста 93
2.4 Об алгоритмически неразрешимых проблемах 95
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ 97
ЛИТЕРАТУРА 105
ПРИЛОЖЕНИЕ. Рабочая программа по дискретной математике **.. 106**

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии отражены в основном методические аспекты курса дискретной математики. Теоретическая часть изложена в [3], где представлены разделы: теория множеств, математическая логика, теория конечных автоматов, комбинаторика и теория графов. В данном пособии рассматриваются те же пять тем и дополнительно приведены элементы теории алгоритмов.

Пособие предназначено в основном для студентов дистанционной технологии обучения. В нем отражены следующие виды контроля:

1) контрольная работа № 1 (в виде компьютерного тестирования);

2) контрольная работа № 2 (письменная работа);

Для контрольной работы № 1 предусмотрены тесты:

1) операции над множествами;
2) СДНФ булевых функций;
3) ДНФ булевых функций;
4) КНФ булевых функций;
5) алгебра Жегалкина;
6) асинхронный автомат;
7) кодирование деревьев;
8) эйлеровы графы;
9) комбинаторика;
10) теория вероятностей.

В контрольную работу № 2 включены темы:

1) теория множеств;
2) минимизация нормальных форм;
3) минимизация ДНФ с учетом доопределения;
4) минимизация КНФ с учетом доопределения;
5) операция импликации;
6) дифференцирование булевых функций;
7) синтез преобразователя кодов;
8) автомат на JK-триггерах;
9) комбинаторика;
10) нахождение простых цепей в графе.

Контрольные задания формируются случайной выборкой не менее чем из тысячи задач для письменных контрольных работ и не менее чем из тысячи тестов для компьютерного тестирования.

Главное назначение данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту в подготовке к тестированию и выполнению контрольных работ. Для этого в пособии представлены образцы выполнения контрольных задач и тестовых вопросов.

Перед каждой темой приведены краткие сведения из [3], необходимые для выполнения контрольных заданий.

Для самопроверки, а также для подготовки к устному экзамену в конце пособия дан список контрольных (экзаменационных) вопросов. По каждому вопросу в этом списке указано, на каких страницах книги [3] находятся ответы.

Пособие можно использовать не только при дистанционной технологии, но и в очной форме обучения, предлагая студентам те же тестовые задания и контрольные работы. Очники при их выполнении могут обойтись без книги [3], если на лекционных занятиях теоретический курс излагается в полном объеме. Если же в очной системе предусматривается частичное освоение материала самостоятельно, то следует обратиться к пособию [3], особенно в тех случаях, когда экзаменационные билеты составляются из приведенных в нем вопросов.

Данное пособие имеет ту же структуру, что и [3]. В нем принята нумерация рисунков, формул и таблиц в пределах каждой из пяти вышеперечисленных тем.

Список литературы содержит шесть названий. При необходимости ознакомиться с полным списком литературных источников, составивших основу пособия, следует обратиться к публикациям [1—3], где приведена большая часть источников, использованных автором во время работы над учебными пособиями по дискретной математике.

Автор

ЧАСТЬ 1
ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1 Вводные замечания

По теории множеств курса дискретной математики для контроля предусмотрено две задачи. Одна из них — тест с однозначным ответом в виде последовательности десятичных цифр. Эти цифры необходимо упорядочить по возрастанию и набирать на компьютерной клавиатуре, начиная с наименьшей из них. Другая — задача, решение которой необходимо представить в письменном виде и передать преподавателю.

Для успешного выполнения заданий рекомендуется изучить содержание нижеприведенных подразделов.

2 Тесты по теме № 1: «Операции над множествами»

Выполнение тестового задания проиллюстрируем двумя примерами с решениями и тремя примерами без решений, но с ответами.

Пример 1. Из каких элементов состоит множество

$$P = \overline{A} \cap B \ \cup \ A \cap B \cap \overline{D} \ \cup \ A \cap \overline{B} \cap D \ \cup \ \overline{C} \cap D\,?$$

при условии, что

$A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$;
$C = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$; $D = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
$I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Решение. Множества A, B, C, D заданы. Однако кроме них в формуле P содержатся множества $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$, т.е. дополнения множеств A, B, C, D. Найдем их:

$\overline{A} = \{3, 6, 7, 9\}$; $\overline{B} = \{0, 5, 6, 8\}$;
$\overline{C} = \{0, 1, 7, 8\}$; $\overline{D} = \{2, 8, 9\}$.

Выражение P записано в виде объединения четырех составляющих, каждая из которых представлена пересечением множеств. Находим элементы первой составляющей $\overline{A} \cap B$:

$$\overline{A} \cap B = \{3, 6, 7, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 7, 9\} = \{3, 7, 9\}.$$

Вторая составляющая есть пересечение трех множеств:

$$A \cap B \cap \overline{D} = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4, 7, 9\} \cap \{2, 8, 9\} = \{2\}.$$

Третья составляющая также является пересечением трех множеств:

$$A \cap \overline{B} \cap D =$$

$$= \{0, 1, 2, 4, 5, 8\} \cap \{0, 5, 6, 8\} \cap \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{0, 5\}.$$

Наконец находим элементы множества $\overline{C} \cap D$:

$$\overline{C} \cap D = \{0, 1, 7, 8\} \cap \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 7\}.$$

Объединим элементы всех четырех пересечений:

$$P = \{3, 7, 9\} \cup \{2\} \cup \{0, 5\} \cup \{0, 1, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}.$$

Ответ: $P = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$.

При компьютерном тестировании в качестве ответа набираем упорядоченную по возрастанию последовательность десятичных цифр 0123579 без каких-либо разделительных знаков.

Пример 2. Найдите элементы множества

$$Q = A \cap B \cap C \ \cup \ \overline{A} \cap D \ \cup \overline{B} \ \cap D$$

при условии, что

$A = \{0, 1, 5\}$; $B = \{0, 1, 2, 3\}$;
$C = \{2, 3, 4, 5\}$; $D = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$.
$I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Решение. В заданном выражении необходимо найти дополнения только для двух множеств:

$$\overline{A} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}; \qquad \overline{B} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Множество Q представляет собой объединение трех составляющих, каждая из которых есть пересечение заданных множеств.

Находим элементы множества $A \cap B \cap C$:

$$A \cap B \cap C = \{0, 1, 5\} \cap \{0, 1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \varnothing.$$

Аналогично находим элементы множеств $\overline{A} \cap D$ и $\overline{B} \cap D$:

$$\overline{A} \cap D = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\} \cap \{1, 3, 4, 5, 7, 8\} = \{3, 4, 7, 8\}.$$

$$\overline{B} \cap D = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cap \{1, 3, 4, 5, 7, 8\} = \{4, 5, 7, 8\}.$$

Объединив эти результаты, получаем:

$$Q = \varnothing \cup \{3, 4, 7, 8\} \cup \{4, 5, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 7, 8\}.$$

Пример 3. Найдите элементы множества

$$Q = A \cap B \cap D \ \cup\ \bar{A} \cap B \cap C \ \cup\ C \cap D$$

при условии, что

A = {1, 2, 4}; B = {1, 2, 3, 5, 6};
C = {2, 3, 4, 5, 6, 9}; D = {1, 3, 4, 6, 9}.
I = {0, 1, 2, …, 9}.

Действуя как и в двух предыдущих случаях, получаем:

$$Q = \{1, 3, 4, 5, 6, 9\}.$$

Пример 4. Найдите элементы множества

$$Q = A \cap \bar{C} \cap D \ \cup\ B \cap D \ \cup\ \bar{B} \cap C \cap \bar{D}$$

при условии, что

A = {3, 5, 8}; B = {0, 3, 6, 8};
C = {0, 3, 7, 8, 9}; D = {0, 3, 5, 8, 9}.
I = {0, 1, 2, …, 9}.

Ответ: Q = {0, 3, 5, 7, 8}.

Пример 5. Найдите элементы множества

$$Q = A \cap C \ \cup\ \bar{A} \cap B \cap D \ \cup\ B \cap C \cap \bar{D}$$

при условии, что

A = {1, 2, 3}; B = {1, 2, 4, 9};
C = {5, 7}; D = {2, 3, 4, 6, 7, 9}.
I = {0, 1, 2, …, 9}.

Ответ: Q = {4, 9}.

3 Задачи из письменной контрольной работы. Тема 1: «Теория множеств»

Эта работа выполняется письменно, так как ответом к задаче является рисунок, компьютерная проверка правильности которого в высшей степени проблематична (хотя в принципе и возможна). Выполнение работы проиллюстрируем на нескольких примерах.

Пример 1. Построить диаграмму Венна для следующих множеств:

A = {1, 5, 7}; B = {1, 2, 3, 7, 9};
C = {0, 6, 7, 9}; I = {0, 1, 2, …, 9}.

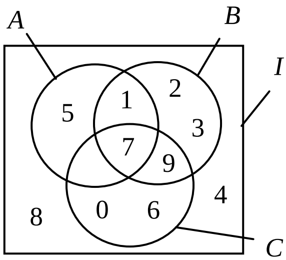

Рис. 1

Решение. Задано три множества: A, B и C. В соответствии с этим на диаграмме Венна изображаем три пересекающихся круга. Универсальное множество состоит из всех десятичных цифр. Для каждой из них найдем место на диаграмме Венна.

Начинаем с цифры 0. Ее нет в множестве A и нет в множестве B. Она содержится только в множестве C. Это значит, что место цифры 0 находится на пересечении областей $\overline{A}$, $\overline{B}$ и C (рис. 1).

Цифра 1 является элементом множеств A и B, но не входит в множество C. Следовательно, цифру 1 записываем в область, образованную пересечением кругов A, B и областью $\overline{C}$.

Цифры 2 и 3 входят только в множество B. Записываем их в область B, но вне кругов A и C.

Цифр 4 и 8 нет ни в одном из множеств A, B и C. Это значит, что они находятся вне всех трех кругов.

Цифра 5 является элементом только множества A. Записываем ее в круг A, но не в области пересечения кругов B и C.

Цифра 6 (как и цифра 0) входит только в множество C. Записываем ее в круг C, но вне кругов A и B.

Цифра 7 входит в каждое из множеств. Следовательно, ее место на пересечении всех трех кругов.

Цифра 9 является элементом множеств B и C, но не является элементом множества A. Записываем ее в общую область кругов B и C, но не в области A.

Таким образом, ответом к данной задаче является диаграмма Венна, изображенная на рис. 1. Заметим, что если при заполнении диаграммы не было допущено ни одной ошибки, то заданные множества должны совпадать с соответствующими множествами, обозначенными кругами на диаграмме Венна. Например, внутри круга A записаны цифры 1, 5 и 7. Из этих же элементов состоит и заданное множество $A = \{1, 5, 7\}$. Внутри круга B записаны цифры 1, 2, 3, 7, 9. Они же образуют и заданное множество B. В круге C находятся цифры 0, 6, 7, 9. Из этих же цифр состоит и заданное множество C.

Пример 2. Построить диаграмму Венна для множеств:

$A = \{0, 4, 9\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$;

$C = \{0, 5, 6, 7\}$; $I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Решение. Как и в предыдущем случае, заполняем диаграмму, начиная с элемента 0. Этот элемент входит во все множества A, B и C. Следовательно, цифру 0 ставим в области, где пересекаются все три круга (рис. 2).

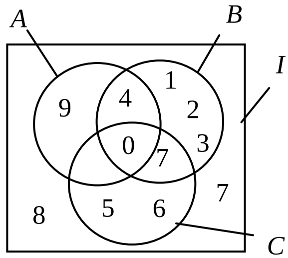

Рис. 2

Три цифры 1, 2 и 3 входят в множество B, но не являются элементами множеств A и C. Поэтому внутри круга B, но вне кругов A и C записываем цифры 1, 2, 3.

Цифру 4 ставим в области пересечения кругов A и B, но вне круга C, так как цифра 4 принадлежит множествам A и B и не принадлежит множеству C.

Цифры 5 и 6 располагаем внутри круга C, но снаружи кругов A и B.

Цифры 7 и 8 входят в универсальное множество, но отсутствуют в множествах A, B и C, т.е. не входят ни в одно из этих множеств. Поэтому цифры 7 и 8 записываем внутри прямоугольника вне всех трех кругов.

Осталась цифра 9. Это элемент только множества A. Соответственно записываем ее в область круга A, но снаружи обоих кругов B и C.

Таким образом, диаграмма, изображенная на рис. 2, является ответом к примеру 2.

Пример 3. Построить диаграмму Венна для множеств:

$A = \{3, 6, 7\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$;

$C = \{7, 8, 9\}$; $I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Ответом является диаграмма, изображенная на рис. 3.

Пример 4. Построить диаграмму Венна для множеств:

$A = \{0, 1, 5, 6\}$; $B = \{3, 5, 6\}$;

$C = \{6, 8, 9\}$; $I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Ответом является диаграмма, изображенная на рис. 4.

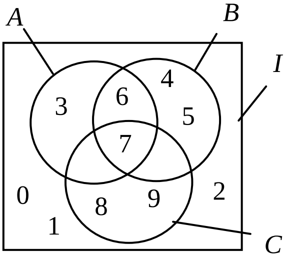

Рис. 3

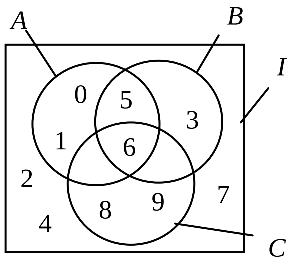

Рис. 4

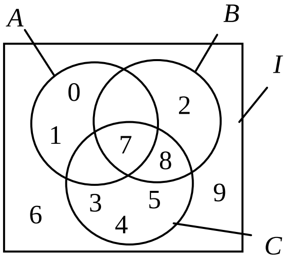

Рис. 5

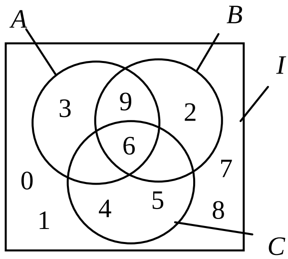

Рис. 6

Пример 5. Построить диаграмму Венна для множеств:

$A = \{0, 1, 7\}$; $B = \{2, 7, 8\}$;

$C = \{3, 4, 5, 7, 8\}$; $I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Ответ: диаграмма, изображенная на рис. 5.

Пример 6. Построить диаграмму Венна для множеств:

$A = \{3, 6, 9\}$; $B = \{2, 6, 9\}$;

$C = \{4, 5, 6\}$; $I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Ответ: диаграмма, изображенная на рис. 6.

В выполненной контрольной работе должны быть представлены условие и ответ в виде заполненной диаграммы Венна так, как это показано в предыдущих примерах.

ЧАСТЬ 2
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

1 Вводные замечания

Среди всех разделов дискретной математики математическая логика занимает центральное место, в связи с чем в данном пособии ей уделено значительно больше внимания по сравнению с другими темами. По этой теме предусмотрено четыре тестовых задания и пять контрольных работ.

Тестовые задания просты. Ими определяется, достаточно ли четко студент представляет содержание главных понятий алгебры логики: конъюнкции, дизъюнкции и инверсии (т.е. логических операций И, ИЛИ, НЕ), суммы по модулю 2, дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм и форм высших порядков, а также полинома Жегалкина.

Контрольные работы призваны выявить более глубокие знания из математической логики. Это относится к таким темам, как минимизация булевых формул ДНФ и КНФ, особенно с учетом неопределенных состояний, дифференцирование булевых функций и преобразование логических выражений, содержащих операцию импликации.

В нижеприведенных подразделах приведены образцы тестовых заданий и контрольных работ и даны их решения. Студенту настоятельно рекомендуется ознакомиться с ними, прежде чем приступать к тестированию и выполнению контрольных работ. Это поможет ему не только найти верные решения во время работы над контрольными задачами, но и правильно их оформить, ориентируясь на приведенные в пособии образцы.

2 Тесты по математической логике

2.1 Тесты по теме № 2: «СДНФ булевых функций»

Функция называется представленной в СДНФ, если одновременно выполнены следующие два условия:

а) известны аргументы, от которых зависит функция;

б) функция представлена дизъюнкцией нескольких минтермов, при этом минтерм может быть и один.

Рассмотрим четыре примера.

Пример 1. Укажите номера всех функций, представленных в СДНФ.

1) $f(A,B,C,D,E) = A + B + C + D + E;$

2) $f(A,B,C) = ABC;$

3) $f(A,B,D) = (A\overline{B} + \overline{A}B)D;$

4) $f(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C};$

5) $f(A,B,C) = (A + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C);$

6) $f(A,B,C,D) = (\overline{A} + B + \overline{C} + D)(\overline{B} + C + D)(A + \overline{C} + D);$

7) $f = \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC.$

8) $f = \overline{A}BC.$

Решение. Первая функция не является СДНФ, так как не удовлетворяет второму условию.

Вторая функция состоит из одного минтерма, зависящего от всех заданных аргументов. Следовательно, одна СДНФ найдена.

Если в третьей функции раскрыть скобки, то получим СДНФ. Однако при нахождении СДНФ никакие преобразования не разрешаются. Следовательно, третья функция не является СДНФ. Она относится к формам высших порядков.

Четвертая функция есть СДНФ, так как она представлена дизъюнкцией трех минтермов, зависящих от всех заданных аргументов.

Пятая и шестая функции относятся к конъюнктивным формам и СДНФ не являются

Седьмую функцию можно считать представленной в СДНФ, если предположить, что она зависит от трех аргументов *A*, *B*, *C*. Если же предположить, что функция зависит от большего числа аргументов, то к классу СДНФ она не относится. Следовательно, седьмая функция СДНФ не является, так как не выполнено первое условие, т.е. не указаны аргументы, от которых зависит функция.

Восьмую функцию можно было бы считать представленной в СДНФ, но так как аргументы, от которых она зависит, не заданы, то к СДНФ ее отнести нет достаточных оснований.

Ответ: 2, 4. (В компьютер необходимо ввести 24.)

Пример 2. Укажите номера всех функций, представленных в СДНФ.

1) $f(A,B,C,D) = ABC + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C$;

2) $f(A) = A$;

3) $f(A,B,C,D) = \bar{A}BC + \bar{B}CD + \bar{A}CD + \bar{A}BD$;

4) $f(A,B,C) = (A + \bar{B} + C)(A + B + \bar{C})(\bar{A} + B + C)$;

5) $f(A,B,C) = ABC + AB\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$;

6) $f(A,B,C) = A\bar{B}C$;

7) $f(A,B,C,D) = AB + CD + AD$.

Решение. Первая функция внешне походит на СДНФ, но она не удовлетворяет второму условию (быть дизъюнкцией минтермов), так как в каждой ее конъюнкции нет переменной *D*. Поэтому к СДНФ первая функция не относится.

Вторая функция есть СДНФ. Она зависит от единственного аргумента *A*, и этот аргумент указан в ее правой части.

Третья функция представлена не в СДНФ, поскольку не удовлетворяет второму условию — быть дизъюнкцией минтермов (как и первая функция).

Четвертая функция относится к конъюнктивным формам, т.е. СДНФ не является.

Пятая и шестая функции представлены в СДНФ.

Седьмая функция СДНФ не является.

Ответ: 2, 5, 6. (В компьютер вводим 256.)

Пример 3. Укажите номера всех функций, представленных в СДНФ.

1) $f(A,B) = \overline{\bar{A}\bar{B} + A\bar{B}}$;

2) $f(C,D,E) = \bar{C}DE$;

3) $f(A,B,C) = A\bar{B}C + \overline{ABC}$;

4) $f(A,B,C,D) = \bar{A} + B + D$;

5) $f = \bar{A}BC + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C}$;

6) $f(A,C) = \bar{A}C$;

7) $f(A,B,C,D) = \overline{\bar{A}B}\bar{C}D$.

Решение. Если бы не знак инверсии (черта) над правой частью первой функции, то эта функция была бы представленной в СДНФ, поскольку функция зависит от двух аргументов A и B и оба эти аргумента входят в обе конъюнкции, которые являются минтермами. Но знак отрицания, поставленный над конъюнкцией или дизъюнкцией, всегда приводит к выражению, которое не относится к нормальным формам. Следовательно, первая функция к СДНФ не относится.

Вторая и шестая функции заданы одиночными минтермами, следовательно, обе эти функции являются представленными в СДНФ.

Третья функция не относится к СДНФ по той же причине, что и первая, т.е. из-за знака инверсии, поставленного над второй конъюнкцией.

Четвертая функция не является дизъюнкцией минтермов, следовательно, она представлена не в СДНФ.

В пятой функции не указаны аргументы, от которых она зависит, поэтому с уверенностью нельзя утверждать, что функция представлена в СДНФ.

Седьмая функция не относится к СДНФ из-за знака инверсии, поставленного над конъюнкцией $\overline{A}B$.

Ответ: 2, 6. (В компьютер вводим 26.)

Пример 4. Укажите номера всех функций, представленных в СДНФ.

1) $f(A,B) = \overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + AB;$

2) $f(C) = \overline{C};$

3) $f(A,B,C) = (A + B + CD)(\overline{A} + BC + \overline{C})(A + \overline{B} + C);$

4) $f(A,B,C,D) = \overline{A} + B + \overline{C} + D;$

5) $f = \overline{A}BC + \overline{B}CD + \overline{A}CD + \overline{A}BD;$

6) $f(A,B,C) = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C};$

7) $f(A,B,C,D) = \overline{A}B\overline{C}D;$

8) $f(A,B,C,D) = \overline{\overline{A} + B + \overline{C} + D};$

9) $f(A,B,C,D) = ABD.$

Ответ: 1, 2, 6, 7. (В компьютер вводим 1267.)

2.2 Тесты по теме № 3: «ДНФ булевых функций»

Функция называется представленной в ДНФ, если она записана в виде дизъюнкции конъюнкций, но в отличие от СДНФ конъюнкции могут содержать любое число аргументов. Отсюда следует, что всякая совершенная дизъюнктивная нормальная форма одновременно является и представленной в ДНФ. Поясним это примерами тестов.

Пример 1. Укажите номера всех функций, представленных в ДНФ.

1) $f(B,C,D)=\overline{B}CD+BCD;$
2) $f(A,B,C,D)=(AB+C)D+AC;$
3) $f(A,B,C,D)=ABC(C+D);$
4) $f(A,B,C)=A+B+\overline{C};$
5) $f(A,B,C,D)=(B+C+D)(D+A);$
6) $f(A,B,C,D)=A;$
7) $f(A,B,C,D)=A+D(C+D);$
8) $f(A,B,C,D)=A+D\overline{C+D}.$

Решение. Из всех восьми перечисленных функций в ДНФ представлены три функции: 1, 4 и 6. Вторая, седьмая и восьмая функции относятся к формам высшего порядка. Третья и пятая функции представлены в КНФ.

Ответ: 1, 4, 6. (В компьютер вводим 146.)

Пример 2. Укажите номера всех функций, представленных в ДНФ.

1) $f(A,B,C,D)=AC;$
2) $f(A,B,C,D)=AB+CD+AD;$
3) $f(A,B,D)=\overline{A};$
4) $f(A,B,C,D)=\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}BCD+A\overline{B}CD+AB(\overline{C}+D);$
5) $f(A,B,E)=A\overline{B}E+A\overline{B}E;$
6) $f(A,B,C)=A\overline{B}C+AC+BC+\overline{A}C;$
7) $f(A,B,C,D)=(\overline{A}+B+C+D)AB\overline{C}D.$

Решение. В ДНФ представлены функции 1, 2, 3, 5 и 6. Четвертая функция относится к формам высшего порядка, а седьмая представлена в КНФ.

Ответ: 1, 2, 3, 5, 6. (В компьютер вводим 12356.)

Пример 3. Укажите номера всех функций, представленных в ДНФ.

1) $f(A,B) = \overline{AB} + \bar{A}\bar{B}$;

2) $f(A,B,C,D) = \bar{A} + B\bar{C} + \bar{B}C\bar{D} + \bar{A}CD$;

3) $f(A,B,C,D) = A + B + C + D$;

4) $f(A,B,C,D) = \overline{CD + \bar{A}B}$;

5) $f(A,B,C,D) = ABC(C + D)$;

6) $f(A,B,C,D) = ABC + AB\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$;

7) $f(A,B,C,D) = A\bar{B}C\bar{D}$;

8) $f(A,B,C,D) = A\bar{B}\overline{C\bar{D}}$.

Решение. Функции 1 и 8 представлены со знаком инверсии над конъюнкцией, а функция 4 — над дизъюнкцией. Поэтому они не относятся к ДНФ. Функция 5 записана в КНФ. Все остальные функции представлены в ДНФ.

Ответ: 2, 3, 6, 7. (В компьютер вводим 2367.)

Пример 4. Укажите номера всех функций, представленных в ДНФ.

1) $f(A,B,C,D,E) = \bar{A}C + \bar{B}CDE + \bar{A}CDE + \bar{A}BD$;

2) $f(A,B,C,D) = (A + B + C)(A + B + C)(A + B + C)$;

3) $f(A,B,C,D) = AB$;

4) $f(A,B,C,D) = D$;

5) $f(A,B,C,D) = A + B + \overline{C + D}$;

6) $f(A,B,C,D) = AB\bar{C}D + ABCD$;

7) $f(A,B,C,D) = AB\bar{C}D + \overline{AB}C\bar{D}$;

8) $f(A,B,C,D) = (\bar{A} + B + \bar{C} + D)(\bar{B} + C + D)(A + \bar{C} + D)$.

Ответ: 1, 3, 4, 6. (В компьютер вводим 1346.)

2.3 Тесты по теме № 4: «КНФ булевых функций»

Функция называется представленной в КНФ, если она записана в виде конъюнкции дизъюнкций, при этом отдельная дизъюнкция, а также отдельная конъюнкция также относятся к КНФ. Поясним это примерами тестов.

Пример 1. Укажите номера всех функций, представленных в КНФ.

1) $f(A,B,C,D) = C + \bar{B}CD + \bar{A}CD + \bar{A}BD$;

2) $f(A,B,C,D) = (ABC\bar{D} + C)D + AC$;

3) $f(A,B,C,D) = ABC(C + D)$;

4) $f(A,B,C) = A(B\bar{C} + \bar{A}BC)$;

5) $f(A,B,C,D) = (A + D)(B + C + D)(D + AC)$;

6) $f(A,B,C,D) = CD$;

7) $f(A,B,C,D) = \bar{C} + BCD(C + D)$.

Решение. Выражения 2, 4, 5 и 7 — это формы высших порядков. Выражение 1 — ДНФ. К конъюнктивным нормальным формам относятся только выражения 3 и 6.

Ответ: 3, 6.

Пример 2. Укажите номера всех функций, представленных в КНФ.

1) $f(A,B,C,D) = A + B + C + D$;

2) $f(A,B,C,D) = A + CD + AD$;

3) $f(A,B,D) = \bar{A}BD$;

4) $f(A,B,C,D) = \bar{A}B\overline{\bar{C}D}$;

5) $f(A,B,E) = \overline{ABE}$;

6) $f(A,B,C,D) = A\bar{B}C(B + D)$;

7) $f(A,B,C,D) = (\bar{A} + B + C + D)AB\bar{C}D$.

Решение. Не являются КНФ выражения: 2 — так как это ДНФ, 4 и 5 — из-за знака инверсии над конъюнкцией. Остальные выражения представлены в КНФ.

Ответ: 1, 3, 6, 7.

Пример 3. Укажите номера всех функций, представленных в КНФ.

1) $f(A,B)=A+B$;

2) $f(A,B,C,D)=\overline{A}B\overline{C}$;

3) $f(A,B,C,D)=\overline{A+B+C+D}$;

4) $f(A,B,C,D)=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$;

5) $f(A,B,C,D)=\overline{A}(B+\overline{C})(C+D)$;

6) $f(A,B,C,D)=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$;

7) $f(A,B,C,D)=A\overline{B}C\overline{D}$;

8) $f(A,B,C,D)=\overline{A\overline{B}}C\overline{D}$;

9) $f(A,B,C,D)=(AB+C+\overline{D})(A+D)$.

Решение. Выражение 3 не является КНФ из-за знака инверсии над дизъюнкцией. Выражение 6 — ДНФ. В восьмой функции содержится инверсия над конъюнкцией, поэтому она к КНФ не относится. Выражение 9 не является КНФ из-за конъюнкции AB, находящейся в первой скобочной дизъюнкции.

Ответ: 1, 2, 4, 5, 7.

Пример 4. Укажите номера всех функций, представленных в КНФ.

1) $f(A,B,C,D,E)=ABCE$;

2) $f(A,B,C,D)=(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)$;

3) $f(A,B,C,D)=AB$;

4) $f(A,B,C,D)=AB+C+D+A$;

5) $f(A,B,C,D)=(A+B+C)D$;

6) $f(A,B,C,D)=A+B+\overline{C}+D+ABCD$;

7) $f(A,B,C,D)=\overline{C}D(\overline{B}+C+D)(A+\overline{C}+D)$;

8) $f(A,B,C,D)=\overline{\overline{C}D}(\overline{B}+C+D)(A+\overline{C}+D)$;

9) $f(A,B,C,D)=A+B+C+D$.

Ответ: 1, 2, 3, 5, 7, 9.

2.4 Тесты по теме № 5: «Алгебра Жегалкина»

Задание на тему «Алгебра Жегалкина» состоит в представлении полинома Жегалкина в СДНФ. Ответом к тесту является упорядоченный набор десятичных номеров минтермов, дизъюнкция которых есть найденная СДНФ.

Для перевода полинома Жегалкина в СДНФ можно пользоваться формулами вида:

$$P \oplus Q = P\overline{Q} + \overline{P}Q\,; \qquad P \oplus P = 0.$$

Пример 1. Представить в СДНФ полином Жегалкина

$$f = AC \oplus B \oplus A. \tag{1}$$

Обозначим:

$$K = B \oplus A = A\overline{B} + \overline{A}B.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} f &= AC \oplus K = \\ &= \overline{AC}K + AC\overline{K} = \\ &= (\overline{A} + \overline{C})K + AC\overline{K} = \\ &= AK + CK + AC\overline{K}. \end{aligned}$$

По теореме де Моргана находим $\overline{K}$:

$$\overline{K} = AB + \overline{A}\overline{B}.$$

Подставим это выражение в предыдущее:

$$\begin{aligned} f &= A(A\overline{B} + \overline{A}B) + C(A\overline{B} + \overline{A}B) + AC(AB + \overline{A}\overline{B}) = \\ &= A\overline{B} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$A\overline{B} = A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}.$$

Подставив это выражение в предыдущее, получим искомую СДНФ:

$$f = A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC + ABC \ = (2,\,3,\,4,\,7).$$

Полином Жегалкина можно найти и более простым путем. Для этого достаточно каждую конъюнкцию представить в виде дизъюнкции минтермов, объединив их знаками сложения по модулю 2. В случае рассмотренного примера

AC = (5, 7); B = (2, 3, 6, 7); A = (4, 5, 6, 7).

Подставим эти выражения в (1) и удалим все пары одинаковых минтермов:

$f = (5, 7) \oplus (2, 3, 6, 7) \oplus (4, 5, 6, 7) =$

$= (m_5 + m_7) \oplus (m_2 + m_3 + m_6 + m_7) \oplus (m_4 + m_5 + m_6 + m_7) =$

$= m_5 \oplus m_7 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_6 \oplus m_7 \oplus m_4 \oplus m_5 \oplus m_6 \oplus m_7 =$

$= m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_7 = (2, 3, 4, 7).$

Ответ: 2, 3, 4, 7.

Нахождение СДНФ на основе полинома Жегалкина можно еще упростить, если воспользоваться картой Вейча. Напомним, что при нанесении на карту Вейча полинома Жегалкина каждая конъюнкция наносится на нее полностью, независимо одна от другой. При этом в некоторых клетках может оказаться более чем по одной единице. Нанесем на карту функцию (1). Получим рис. 1.

11	111	1	1
1	11		

Рис. 1

	1	1	1
1			

Рис. 2

Строим новую карту (рис. 2), поставив в ней единицы в тех клетках, где на рис. 1 находится нечетное число единиц. Из рис. 2 видно, что искомая СДНФ имеет вид:

$$f = (2, 3, 4, 7).$$

Ответ: 2, 3, 4, 7. (В компьютер вводим 2347.)

Пример 2. Представить в СДНФ полином Жегалкина:

$$f = C \oplus B \oplus AB.$$

Решение. Наносим полином на карту Вейча (рис. 3).

11	111	11	1
	1	1	

Рис. 3

	1		1
	1	1	

Рис. 4

На рис. 4 приведена искомая СДНФ.

Ответ: 1, 2, 5, 7. (В компьютер вводим 1257.)

Пример 3. Представить в СДНФ полином Жегалкина:

$$f = A \oplus C \oplus AB.$$

Решение. Наносим полином на карту Вейча (рис. 5).

11	111	1	
1	11	1	

Рис. 5

	1	1	
1		1	

Рис. 6

На рис. 6 приведена искомая СДНФ.
Ответ: 1, 4, 5, 6. (В компьютер вводим 2456.)

Пример 4. Представить в СДНФ полином Жегалкина:

$$f = A \oplus B \oplus BC \oplus AB.$$

Решение. Наносим полином на карту Вейча (рис. 7).

111	1111	11	1
1	1		

Рис. 7

1			1
1	1		

Рис. 8

На рис. 8 приведена искомая СДНФ.
Ответ: 2, 4, 5, 6. (В компьютер вводим 2456).

3 Задачи из письменной контрольной работы

3.1 Тема 2: «Минимизация нормальных форм»

Минимизировать булевы функции из данной контрольной работы можно любым методом, но проще всего для этих целей применить карту Вейча, так как упрощаемые функции зависят только от четырех аргументов. Минимизацию дизъюнктивных и конъюктивных нормативных форм с применением карт Вейча проиллюстрируем несколькими примерами.

Пример 1. Найти минимальные ДНФ и КНФ следующей функции, заданной в СДНФ:

$$f = (4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15).$$

Решение. Наносим функцию на карту Вейча (рис. 9). Минимальная ДНФ имеет вид:

$$f = B + AC + A\overline{D}.$$

Чтобы найти КНФ, сначала минимизируем инверсию заданной функции. СДНФ ее инверсии приведена на рис 10. Минимальная ДНФ инверсии имеет вид:

$$\overline{f} = \overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{C}D.$$

1	1	1	1
1	1	1	1
	1		
1	1		

Рис. 9

1		1	1
		1	1

Рис. 10

По теореме де Моргана инвертируем это выражение и получаем минимальную КНФ:

$$f = (A + B)(B + C + \overline{D}).$$

Ответ:

Минимальная ДНФ: $f = B + AC + A\overline{D}.$

Минимальная КНФ: $f = (A + B)(B + C + \overline{D}).$

Пример 2. Найти минимальные ДНФ и КНФ следующей функции, заданной в СДНФ:

$$f = (1, 2, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 15).$$

Решение. Наносим функцию на карту Вейча (рис. 11). Эта функция имеет две минимальные ДНФ:

$$f_1 = A\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BC + ACD + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D.$$

$$f_2 = A\overline{C}\overline{D} + \overline{A}C\overline{D} + BCD + A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D.$$

Для нахождения КНФ строим карту Вейча для инверсии заданной функции (рис. 12). Инверсия заданной функции также имеет две минимальные ДНФ:

$$\overline{f_1} = \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C} + ABC\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD.$$

$$\overline{f_2} = \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{C}D + B\overline{C}D + ABC\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD.$$

1		1	
	1	1	
	1		1
1	1	1	

Рис. 11

	1		1
1			1
1		1	
			1

Рис. 12

Соответственно получаем и две минимальные КНФ:

$$f_1 = (A + C + D)(\overline{A} + C + \overline{D})(A + \overline{B} + C)\ \&$$
$$\&\,(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D)(A + B + \overline{C} + \overline{D}).$$

$$f_2 = (A + C + D)(\overline{A} + C + \overline{D})(\overline{B} + C + \overline{D})\ \&$$
$$\&\,(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D)(A + B + \overline{C} + \overline{D}).$$

Пример 3. Найти минимальные ДНФ и КНФ:

f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15).

Решение. У данной функции (рис. 13) также не единственный вариант минимальной ДНФ. Приведем два из них:

$$f = AC + \overline{A}\,\overline{B} + BD + \overline{C}\,\overline{D}.$$

$$f = AB + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{D} + CD.$$

1	1		1
1	1	1	1
	1	1	1
1	1	1	1

Рис. 13

		1	
1			

Рис. 14

Инверсия функции в минимальной ДНФ представима единственным способом (рис. 14):

$$f = A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D}.$$

В соответствии с этим для заданной функции существует и единственная минимальная КНФ:

$$f = (\bar{A} + B + C + \bar{D})(A + \bar{B} + \bar{C} + D).$$

Пример 4. Найти минимальные ДНФ и КНФ:

f = (0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15).

Решение. Одна из минимальных ДНФ имеет вид (рис. 15):

$$f = \bar{A}B\bar{C} + AC + \bar{B}\bar{D} + AD + CD.$$

	1		1
1	1	1	1
1	1	1	
1	1	1	1

Рис. 15

1		1	
			1

Рис. 16

Минимальная КНФ этой функции существует только одна (рис. 16):

$$\bar{f} = AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D.$$

$$f = (\bar{A} + \bar{B} + C + D)(A + \bar{B} + \bar{C} + D)(A + B + C + \bar{D}).$$

Пример 5. Найти минимальные ДНФ и КНФ:

f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 13, 15).

Решение. Существует единственная минимальная ДНФ этой функции (рис. 17):

$$f = \bar{A}C + BD + \bar{A}D + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}.$$

Минимальная КНФ представима не единственным способом (рис. 18). Один из вариантов имеет вид:

$$\bar{f} = \bar{A}\bar{C}\,\bar{D} + A\bar{B}D + AB\bar{D} + AC\bar{D}.$$

$$f = (A + C + D)(\bar{A} + B + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + D)(\bar{A} + \bar{C} + D).$$

		1	
1	1	1	1
		1	1
1		1	

Рис. 17

1	1		1
1	1		
	1		1

Рис. 18

Пример 6. Найти минимальные ДНФ и КНФ:

$$f = (0, 1, 2, 4, 5, 7, 9, 12).$$

Решение. Если начать минимизацию с простой импликанты $\overline{A}\overline{C}$, то минимальную форму не получим, так как конъюнкция $\overline{A}\overline{C}$ в минимальную ДНФ не входит (рис. 19). Для данной функции существуют только одна минимальная ДНФ:

$$f = B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BD + \overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}\overline{D}.$$

1			1
		1	1
1			1
		1	1

Рис. 19

	1	1	
1	1		
	1	1	
1	1		

Рис. 20

Ее КНФ существует также только одна (рис. 20):

$$\overline{f} = BC\overline{D} + ABD + \overline{B}CD + A\overline{B}\overline{D}.$$

$$f = (\overline{B} + \overline{C} + D)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{D})(B + \overline{C} + \overline{D})(\overline{A} + B + D).$$

3.2 Тема 3: «Минимизация ДНФ с учетом доопределения»

Эта работа выполняется так же, как и предыдущая. Особенность ее состоит только в выборе такого доопределения заданной функции, при котором получается выражение, содержащее наименьшее число вхождений переменных по сравнению с любыми другими способами доопределения. В данном подразделе представлено несколько примеров минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм.

Пример 1. Найти минимальную ДНФ с учетом неопределенных состояний:

f = (2, 7, 10, 13, 15). [0, 5, 8, 11, 14].

Решение. В круглых скобках перечислены номера минтермов, образующих заданную функцию четырех переменных. В квадратных скобках указаны неопределенные состояния. Нанесем функцию на карту Вейча. На ней же отметим крестиками неопределенные состояния (рис. 21). Если на этой карте на неопределенных состояниях 11 и 14 поставить нули, а остальные крестики заменить единицами, то получим искомую минимальную ДНФ:

$$f = BD + \overline{B}\overline{D}.$$

Пример 2. Найти минимальную ДНФ с учетом неопределенных состояний:

f = (1, 2, 6, 7, 10, 13, 15). [0, 3, 4, 5, 8, 11, 12, 14].

Решение. Нанесем функцию на карту Вейча (рис. 22). Если на неопределенном состоянии 8 принять значение функции, равное нулю, а на всех остальных — единице, то минимальная ДНФ примет вид:

$$f = \overline{A} + B + C.$$

	×		
1	1	1	×
	×		
×	1	1	×

Рис. 21

×	×	1	×
1	1	1	×
	×	×	1
×	1	1	×

Рис. 22

×		1	×
1	1		×
	×	×	1
	1	1	×

Рис. 23

Пример 3. Карта Вейча приведена на рис. 23.

f = (1, 2, 6, 10, 13, 15). [0, 3, 4, 5,11, 12].

$$f = ABD + \overline{B}C + \overline{A}\overline{D} + \overline{A}\overline{C}.$$

Пример 4. Карта Вейча приведена на рис. 24.

f = (1, 2, 4, 10, 11, 13, 15). [3, 7, 12, 14].

$$f = AB + \overline{B}C + B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D.$$

Пример 5. (Рис. 25).

f = (1, 2, 4, 6, 7, 8, 11, 14, 15). [0, 5, 10, 12, 13].

$$f = B + \overline{D} + AC + \overline{A}\overline{C}.$$

Пример 6. (Рис. 26).

f = (1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 13, 15). [3, 8, 12, 14].

$$f = B + C\overline{D} + \overline{A}D.$$

Пример 7. (Рис. 27).

f = (4, 5, 6, 7, 10, 12, 15). [3, 8, 13, 14].

$$f = B + A\overline{D}.$$

×	×		1
1	1	×	
	1	×	1
	1	1	

Рис. 24

×	1	1	1
×	1	1	×
	1		1
1	×	1	×

Рис. 25

×	×	1	1
1	1	1	1
		×	1
×	1	1	

Рис. 26

Пример 8. (Рис. 28).

f = (1, 2, 5, 6, 8, 9, 11, 12). [0, 3, 4, 13, 14].

$$f = \overline{C} + \overline{A}\overline{D} + \overline{B}D.$$

1	×	1	1
×	1	1	1
		×	
×	1		

Рис. 27

1	×	1	×
×			1
1	1	×	1
1		1	×

Рис. 28

×	×	1	1
	1		1
	×	1	1
1	1		1

Рис. 29

Пример 9. (Рис. 29).

f = (0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15). [11, 12, 14].

$$f = \overline{A}\overline{C} + AC + \overline{C}\,\overline{D} + B\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D.$$

1	×		1
×	1	1	1
		×	
×			1

Рис. 30

1	×	1	×
×	1		1
1	1	×	1
1			×

Рис. 31

×	×		1
	1	×	1
1	×	1	1
1	1		1

Рис. 32

Пример 10. (Рис. 30).

f = (0, 4, 5, 7, 12, 15). [3, 8, 13, 14].

$$f = \overline{C}\,\overline{D} + BD.$$

Пример 11. (Рис. 31).

f = (1, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 15). [0, 3, 4, 13, 14].

$$f = \overline{C} + B\overline{D} + AD.$$

Пример 12. (Рис. 32).

f = (0, 1, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 15). [7, 11, 12, 14].

$$f = A\overline{B} + CD + \overline{A}\overline{C}.$$

3.3 Тема 4: «Минимизация КНФ с учетом доопределения»

Нахождение минимальных КНФ с учетом неопределенных состояний осуществляется следующим образом:

1) наносим заданную функцию на карту Вейча;

2) на ней же отмечаем неопределенные состояния. Если в какой-либо клетке встретятся крестик и единица, то ставим крестик;

3) строим карту для инверсии заданной функции. Заметим, что инвертируются только нули и единицы, а все крестики (т.е. неопределенные состояния) остаются на прежних местах;

4) находим минимальную ДНФ инверсии функции с учетом неопределенных состояний;

5) найденную минимальную ДНФ инвертируем по теореме де Моргана. В результате получим минимальную КНФ.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти минимальную КНФ булевой функции, заданной в СДНФ:

$$f = (4, 5, 7, 10, 15). \quad [3, 8, 13, 14].$$

Решение. В соответствии с перечисленными пунктами наносим эту функцию на карту Вейча и на ней же отмечаем неопределенные состояния (рис. 33). На рис. 34 представлена инверсия заданной функции.

Минимальная ДНФ инверсии заданной функции, найденная с учетом неопределенных состояний, имеет вид (рис. 34):

$$\overline{f} = \overline{B}D + A\overline{C} + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}C\overline{D}.$$

$f =$

	×		1
×	1	1	1
		×	
×	1		

Рис. 33

$\overline{f} =$

1	×	1	
×			
1	1	×	1
×		1	1

Рис. 34

Инвертируем $\overline{f}$ и получаем искомую минимальную КНФ:

$$f = (B + \overline{D})(\overline{A} + C)(A + B)(A + \overline{C} + D).$$

Пример 2. Найти минимальную КНФ (рис. 35 и 36):

$f =$

1		1	1
×	×	1	
		×	×
×	1	×	1

Рис. 35

$\overline{f} =$

	1		
×	×		1
1	1	×	×
×		×	

Рис. 36

f = (0, 4, 6, 7, 10, 12).   [1, 2, 3, 8, 13, 15].

$$\overline{f} = \overline{B}D + \overline{C}D + ABC.$$

$$f = (B + \overline{D})(C + \overline{D})(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}).$$

Пример 3. Найти минимальную КНФ (рис. 37 и 38):

f = (6, 7, 10, 11, 12).   [1, 2, 3, 4, 13].

$$f = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(C + \overline{D})(B + C).$$

f =

1		1	×
×		1	
	1	×	×
	1	×	

Рис. 37

$\overline{f}$ =

	1		×
×	1		1
1		×	×
1		×	1

Рис. 38

Пример 4. Найти минимальную КНФ (рис. 39 и 40):

f = (0, 4, 6, 9, 12).   [1, 2, 3, 8, 13, 14].

$$f = (\overline{A} + \overline{C})(\overline{B} + \overline{D}).$$

f =

1	×	1	1
×			
1		×	×
×		×	1

Рис. 39

$\overline{f}$ =

	×		
×	1	1	1
	1	×	×
×	1	×	

Рис. 40

Пример 5. Найти минимальную КНФ (рис. 41 и 42):

f = (9, 10, 12, 14).   [1, 2, 3, 4, 8, 13].

$$f = A(\overline{C} + \overline{D}).$$

$f =$

1	1		×
×			
1		×	×
×	1	×	

Рис. 41

$\bar{f} =$

		1	×
×	1	1	1
	1	×	×
×		×	1

Рис. 42

Пример 6. Найти минимальную КНФ (рис. 43 и 44):

f = (3, 7, 9, 10, 14). [1, 2, 4, 8, 12, 13].

$$f = (\bar{A} + \bar{C} + \bar{D})(A + D)(A + C).$$

$f =$

×	1		×
×		1	
1		1	×
×	1	×	

Рис. 43

$\bar{f} =$

×		1	×
×	1		1
	1		×
×		×	1

Рис. 44

Пример 7. Найти минимальную КНФ (рис. 45 и 46):

f = (6, 7, 9, 10, 11, 15). [1, 2, 4, 8, 13, 14].

$$f = (\bar{B} + C)(A + B).$$

$f =$

	×	1	×
×	1	1	
1	1		×
×	1	×	

Рис. 45

$\bar{f} =$

1	×		×
×			1
		1	×
×		×	1

Рис. 46

Пример 8. Найти минимальную КНФ (рис. 47 и 48):

f = (3, 6, 9, 10, 12, 15). [1, 2, 4, 8, 13, 14].

$$f = (A+C)(A+\overline{B}+\overline{D})(\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}).$$

f =

1	×	1	×
×	1		
1		1	×
×	1	×	

Рис. 47

$\overline{f}$ =

	×		×
×		1	1
	1		×
×		×	1

Рис. 48

Пример 9. Найти минимальную КНФ (рис. 49 и 50):

f = (6, 9, 10, 15). [1, 2, 4, 12, 13].

$$f = (C+D)(A+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+D)(B+\overline{C}+\overline{D}).$$

f =

×		1	×
×	1		
1			×
	1	×	

Рис. 49

$\overline{f}$ =

×	1		×
×		1	1
	1	1	×
1		×	1

Рис. 50

Пример 10. Найти минимальную КНФ (рис. 51 и 52):

f = (3, 10, 15). [1, 2, 4, 9, 12, 13].

$$f = C(A+\overline{B})(\overline{B}+D)(\overline{A}+B+\overline{D}).$$

f =

×			×
×	1		
×		1	×
	1	×	

Рис. 51

$\overline{f}$ =

×	1	1	×
×		1	1
×	1		×
1		×	1

Рис. 52

3.4 Тема 5: «Операция импликации»

В задаче из контрольной работы на тему «Операция импликации» необходимо представить в СДНФ, минимальной ДНФ и минимальной КНФ заданное логическое выражение, содержащее операцию импликации, возможно в различных сочетаниях с дизъюнкцией, конъюнкцией и инверсией. Импликативные преобразования осуществляются с применением соотношения

$$P \to Q = \overline{P} + Q.$$

Пример 1. Представить в СДНФ, в минимальной ДНФ и минимальной КНФ:

$$f = [(\overline{A} \to BD) \to (\overline{C} \to D)](A \to \overline{B}C).$$

Решение. Сначала преобразуем выражения во всех круглых скобках:

$$[(\overline{A} \to BD) \to (\overline{C} \to D)](A \to \overline{B}C) =$$
$$= [(A + BD) \to (C + D)](\overline{A} + \overline{B}C).$$

Устраняем знак импликации из выражения, расположенного в квадратных скобках:

$$f = [\overline{A + BD} + C + D](\overline{A} + \overline{B}C).$$

Применяем теорему де Моргана:

$$f = [\overline{A}(\overline{B} + \overline{D}) + C + D](\overline{A} + \overline{B}C).$$

Раскрываем скобки и находим СДНФ и минимальные ДНФ и КНФ:

$$f = (\overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{D} + C + D)(\overline{A} + \overline{B}C) =$$
$$= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{D} + \overline{A}C + \overline{A}D + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{B}C + \overline{B}CD =$$
$$= (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11) =$$
$$= \overline{A} + \overline{B}C = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + C).$$

Ответ.

СДНФ: $f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11)$.

Минимальная ДНФ: $f = \overline{A} + \overline{B}C$.

Минимальная КНФ: $f = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + C)$.

Пример 2. Представить в СДНФ, в минимальной ДНФ и минимальной КНФ:

$$f = [\overline{\bar{A} \to BC} \to (AB \to \bar{D})] \to \overline{A \to \bar{B}C}.$$

Решение. По аналогии с предыдущим примером сначала преобразуем выражения в круглых скобках, а также под знаками инверсии:

$$f = [(A + BC) + (\bar{A} + \bar{B} + \bar{D})] \to \overline{\bar{A} + \bar{B}C} =$$

$$= [A + BC + \bar{A} + \bar{B} + \bar{D}] \to \overline{\bar{A} + \bar{B}C}.$$

Выражение в квадратных скобках тождественно равно единице, так как в нем суммируются A и $\bar{A}$, следовательно:

$$f = 1 \to \overline{\bar{A} + \bar{B}C} = 0 + \overline{\bar{A} + \bar{B}C} = A(B + \bar{C}) = AB + A\bar{C} =$$

$$= (8, 9, 12, 13, 14, 15).$$

Ответ.

СДНФ: $f = (8, 9, 12, 13, 14, 15)$.

Минимальная ДНФ: $f = AB + A\bar{C}$.

Минимальная КНФ: $f = A(B + \bar{C})$.

Заметим, что в минимальных ДНФ и КНФ переменная D отсутствует. Это значит, что от аргумента D функция не зависит (точнее, зависит несущественно). Но в заданной функции присутствуют все четыре аргумента, поэтому СДНФ найдена в предположении, что функция зависит не от трех аргументов, а от четырех.

Пример 3. Представить в СДНФ, в минимальной ДНФ и минимальной КНФ:

$$f = [(\bar{A} \to \bar{B}) \to (\overline{ABC} \to \bar{A})]AB\bar{C} \to (C \to AD).$$

Решение. Преобразуем выражения в круглых скобках:

$$f = [(A + \bar{B}) \to (ABC + \bar{A})]AB\bar{C} \to (\bar{C} + AD).$$

Устраняем знак импликации в квадратных скобках:

$$f = [\overline{A + \bar{B}} + (ABC + \bar{A})]AB\bar{C} \to (\bar{C} + AD) =$$

$$= [\bar{A}B + ABC + \bar{A}]AB\bar{C} \to (\bar{C} + AD).$$

Раскроем квадратные скобки. Получим нуль. Это значит, что выражение, расположенное слева от стрелки, тождественно равно нулю. Следовательно:

$$f = 0 \to (\overline{C} + AD) = \overline{0} + (\overline{C} + AD) = 1 + (\overline{C} + AD) = 1.$$

Ответ:
СДНФ: f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15).
Минимальная ДНФ: f = 1.
Минимальная КНФ: f = 1.

3.5 Тема 6: «Дифференцирование булевых функций»

Решать задачи этого типа можно табличным способом. Однако гораздо проще пользоваться формулой вида

$$\frac{\partial f(A,B,C,D)}{\partial D} = f(A,B,C,0) \oplus f(A,B,C,1), \qquad (2)$$

где $f(A,B,C,0)$ — нулевая остаточная функция, $f(A,B,C,1)$ — единичная остаточная функция. Проиллюстрируем нахождение производных несколькими примерами.

Пример 1. Найти производную по переменной D:

f = (0, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15).

Решение. Нанесем функцию на карту Вейча (рис. 53) и найдем минимальную ДНФ (в общем случае минимизация не является обязательной. Функцию можно оставить и в СДНФ. При этом усложнятся лишь алгебраические преобразования):

1	1	1	1
1	1	1	
1	1		
1			1

Рис. 53

$$f = \overline{C}\,\overline{D} + BC + AD.$$

Находим остаточные функции по переменной D, так как по этой переменной осуществляется дифференцирование заданной функции:

$$f(A,B,C,0) = \overline{C} + BC;$$
$$f(A,B,C,1) = BC + A.$$

В соответствии с формулой (2) наносим их на карту Вейча (рис. 54).

1	1	1	1
1			1

$\oplus$

1	1	1	
1	1		

$=$

			1
	1		1

Рис. 54

На левой карте записана нулевая остаточная функция, на средней — единичная, на правой — сумма по модулю 2, представляющая собой результат дифференцирования:

$$\frac{\partial f(A,B,C,D)}{\partial D} = \bar{A}\bar{C} + A\bar{B}C.$$

Это и есть ответ к заданному примеру.

Пример 2. Найти производную по переменной D:

$f = (0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15).$

Решение. Как и в предыдущем случае, нанесем заданную функцию на карту Вейча (рис. 55) и найдем ее минимальную ДНФ:

$$f = BC + \bar{C}D + A\bar{B}.$$

	1	1	
1	1	1	1
1	1		1
1	1		

Рис. 55

Остаточные функции имеют вид:

$$f(A,B,C,0) = BC + A\bar{B};$$

$$f(A,B,C,1) = BC + \bar{C} + A\bar{B}.$$

Наносим их на карты Вейча (рис. 56). Согласно этим картам получаем искомую производную:

$$\frac{\partial f(A,B,C,D)}{\partial D} = \bar{A}\bar{C} + B\bar{C}.$$

	1	1	
1	1		

$\oplus$

1	1	1	1
1	1		1

$=$

1			1
			1

Рис. 56

Пример 3. Найти производную по переменной D:

$$f = (1, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13).$$

Карта Вейча для этой функции приведена на рис. 57. Находим минимальную форму:

$$f = A\bar{C} + \bar{B}D + \bar{A}CD + B\bar{C}\,\bar{D}.$$

1			1
1		1	
1	1	1	1
1			

Рис. 57

Наносим на карты Вейча остаточные функции, имеющие вид (рис. 58):

$$f(A, B, C, 0) = A\bar{C} + B\bar{C};$$

$$f(A, B, C, 1) = A\bar{C} + \bar{B} + \bar{A}C.$$

1			1
1			

$\oplus$

1		1	
1	1	1	1

$=$

		1	1
	1	1	1

Рис. 58

Ответ: искомая производная имеет вид:

$$\frac{\partial f(A, B, C, D)}{\partial D} = \bar{A} + \bar{B}C.$$

Пример 4. Найти производную по переменной D:

$$f = (0, 2, 4, 6, 12, 13, 14).$$

Решение. Находим минимальную ДНФ:

$$f = AB\bar{C} + B\bar{D} + \bar{A}\bar{D}.$$

Остаточные функции имеют вид:

$$f(A, B, C, 0) = \bar{A} + B;$$

$$f(A, B, C, 1) = AB\bar{C}.$$

Ответ: $\dfrac{\partial f(A, B, C, D)}{\partial D} = \bar{A} + BC.$

Пример 5. Найти производную по переменной D:

$$f = (1, 3, 7, 13, 15).$$

Решение. Находим минимальную ДНФ:

$$f = ABD + BCD + \overline{A}\overline{B}D.$$

Остаточные функции имеют вид:

$$f(A, B, C, 0) = 0;$$

$$f(A, B, C, 1) = AB + BC + \overline{A}\overline{B}.$$

Ответ:

$$\frac{\partial f(A, B, C, D)}{\partial D} = AB + BC + \overline{A}\overline{B}.$$

Пример 6. Найти производную по переменной D:

$$f = (0, 2, 6, 12, 14).$$

Решение. Находим минимальную ДНФ:

$$f = AB\overline{D} + BC\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{D}.$$

Остаточные функции имеют вид:

$$f(A, B, C, 0) = AB + BC + \overline{A}\overline{B};$$

$$f(A, B, C, 1) = 0.$$

Ответ:

$$\frac{\partial f(A, B, C, D)}{\partial D} = AB + BC + \overline{A}\overline{B}.$$

Пример 6. Найти производную по переменной E, при условии, что функция зависит от пяти переменных и представлена в аналитической форме следующим образом:

$$f(A, B, C, D, E) = ABD + BCDE + \overline{A}\overline{B}D\overline{E}.$$

Решение. Находим остаточные функции:

$$f(A, B, C, D, 0) = ABD + \overline{A}\overline{B}D.$$

$$f(A, B, C, D, 1) = ABD + BCD.$$

Наносим их на карту Вейча (рис. 59), откуда получаем минимальную ДНФ искомой производной:

$$\frac{\partial f(A, B, C, D, E)}{\partial E} = \overline{A}CD + \overline{A}\overline{B}D.$$

1	1		
		1	1

$\oplus$

1	1	1	

$=$

		1	
		1	1

Рис. 59

Найдем производную по переменной E табличным методом. Для этого найдем все остаточные функции при различных наборах значений переменных A, B, C, D:

$$f(A,B,C,D,E) = ABD + BCDE + \overline{A}\overline{B}D\overline{E}.$$

$$f(0,0,0,0,E) = 0\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 0\cdot E + 1\cdot 1\cdot 0\cdot \overline{E} = 0.$$

$$f(0,0,0,1,E) = 0\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 1\cdot E + 1\cdot 1\cdot 1\cdot \overline{E} = \overline{E}.$$

$$f(0,0,1,0,E) = 0\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 0\cdot E + 1\cdot 1\cdot 0\cdot \overline{E} = 0.$$

$$f(0,0,1,1,E) = 0\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 1\cdot 1\cdot E + 1\cdot 1\cdot 1\cdot \overline{E} = \overline{E}.$$

$$f(0,1,0,0,E) = 0\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 0\cdot E + 1\cdot 0\cdot 0\cdot \overline{E} = 0.$$

$$f(0,1,0,1,E) = 0\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 1\cdot E + 1\cdot 0\cdot 1\cdot \overline{E} = 0.$$

$$f(0,1,1,0,E) = 0\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 0\cdot E + 1\cdot 0\cdot 0\cdot \overline{E} = 0.$$

$$f(0,1,1,1,E) = 0\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot E + 1\cdot 0\cdot 1\cdot \overline{E} = E.$$

$$f(1,0,0,0,E) = 1\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 0\cdot E + 0\cdot 1\cdot 0\cdot \overline{E} = 0.$$

$$f(1,0,0,1,E) = 1\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 1\cdot E + 0\cdot 1\cdot 1\cdot \overline{E} = 0.$$

$$f(1,0,1,0,E) = 1\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 0\cdot E + 0\cdot 1\cdot 0\cdot \overline{E} = 0.$$

$$f(1,0,1,1,E) = 1\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 1\cdot 1\cdot E + 0\cdot 1\cdot 1\cdot \overline{E} = 0.$$

$$f(1,1,0,0,E) = 1\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 0\cdot E + 0\cdot 0\cdot 0\cdot \overline{E} = 0.$$

$$f(1,1,0,1,E) = 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 1\cdot E + 0\cdot 0\cdot 1\cdot \overline{E} = 1.$$

$$f(1,1,1,0,E) = 1\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 0\cdot E + 0\cdot 0\cdot 0\cdot \overline{E} = 0.$$

$$f(1,1,1,1,E) = 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot E + 0\cdot 0\cdot 1\cdot \overline{E} = 1 + E = 1.$$

Согласно этому списку на наборах 1, 3 и 7 функция меняет свои значения с изменением переменной E, что полностью соответствует производной, представленной на рис. 59.

ЧАСТЬ 3
ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

1 Тестовое задание

1.1 Асинхронный автомат на *T*-триггерах

Триггер типа *T* является одним из наиболее распространенных на практике. Этот триггер имеет два установочных входа *R* (нулевой) и *S* (единичный) и один управляющий вход, называемый счетным. *T*-триггер меняет свое состояние с каждым импульсом, поступившим на его счетный вход. При этом смена состояний происходит под действием отрицательного фронта импульса, т.е. когда напряжение переходит с высокого уровня на низкий. На положительный фронт триггер не реагирует.

В простейшем случае триггер типа *T* применяют для построения асинхронных автоматов, реализующих некоторую последовательность состояний. Проиллюстрируем это на примере автомата, изображенного на рис. 1.

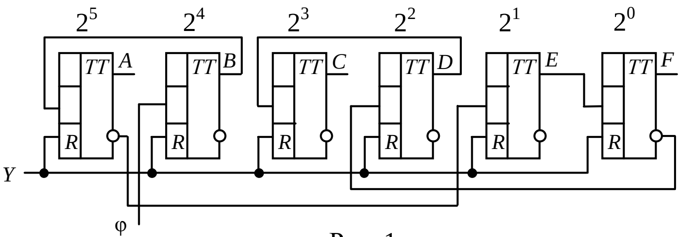

Рис. 1

Автомат состоит из шести *T*-триггеров *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, образующих двоичный регистр. Каждому триггеру поставлен в соответствие определенный разряд двоичного числа. Веса на рис. 1 указаны над триггерами в виде степеней числа 2.

Установим автомат в исходное состояние кратковременной подачей низкого уровня напряжения на вход *Y* (т.е. на установочные нулевые *R*-входы). В регистре окажется число 000000. Это значит, что на неинверсном выходе каждого триггера будет низкий уровень напряжения, а на инверсном — высокий.

Подадим на вход φ прямоугольный импульс напряжения. По его отрицательному фронту триггер *B* перейдет в единичное состояние, и с его прямого выхода на счетный вход триггера *A* поступит положительный фронт в виде перехода напряжения с низкого уровня на высокий, на который триггер *A* не отреагирует, т.е. останется в нулевом состоянии. А так как триггер *A* свое состояние не изменил, то и все остальные триггеры останутся в прежних состояниях. Таким образом, после первого входного импульса триггер *B* окажется в единичном состоянии, а все остальные — в нулевом и автомат окажется в состоянии 010000 (в десятичной системе это 16).

Подадим на вход автомата второй импульс. По его отрицательному фронту триггер *B* перейдет в нулевое состояние, в результате чего триггер *A* получит отрицательный перепад напряжения (отрицательный фронт) и перейдет в единичное состояние. При этом на прямом выходе триггера *A* напряжение перейдет с низкого уровня на высокий, а на инверсном — наоборот: с высокого на низкий. Следовательно, на счетный вход триггера *E* поступит отрицательный фронт, вследствие чего триггер *E* перейдет в единичное состояние. На его прямом выходе сформируется положительный фронт, т.е. напряжение перейдет с низкого уровня на высокий. Этот положительный фронт поступит на вход триггера *F*. Так как на положительный фронт триггер *F* не реагирует, то он останется в нулевом состоянии и все остальные триггеры свои состояния не изменят. Таким образом, после второго импульса автомат окажется в состоянии 100010 (в десятичной системе 34).

Подадим на вход автомата третий импульс. В единичное состояние перейдет только триггер *B*, а все остальные триггеры останутся в прежних состояниях, поскольку на вход триггера *A* поступит положительный фронт. Автомат окажется в состоянии 110010 (десятичное число 50).

Подадим на вход автомата четвертый импульс. Триггер *B* перейдет в нулевое состояние и отрицательным перепадом напряжения переведет в нулевое состояние триггер *A*. Все остальные триггеры останутся в прежних состояниях. Автомат установится в состояние 000010 (десятичное 2).

После пятого импульса состояние сменит только триггер *B* и автомат окажется в состоянии 010010 (десятичное 18).

Подадим на вход φ шестой импульс. Триггер *B* перейдет в нулевое состояние и отрицательным фронтом переведет триггер *A* в единичное состояние. В результате на счетный вход триггера *E* поступит отрицательный перепад напряжения, и триггер *E* перейдет в нулевое состояние. На прямом выходе триггера *E* напряжение перейдет с высокого уровня на низкий. Под действием этого перепада триггер *F* перейдет в единичное состояние. На его инверсном выходе сформируется отрицательный фронт, под действием которого триггер *D* перейдет в единичное состояние. На прямом выходе триггера *D* сформируется положительный перепад напряжения. Этот перепад поступит на вход триггера *C*. Так как фронт положительный, то триггер *C* останется в нулевом состоянии. Таким образом, после шестого импульса автомат окажется в состоянии 100101 (десятичное 37).

После седьмого импульса автомат перейдет в состояние 110101 (десятичное 53), после восьмого — 000101 и т.д.

1.2 Тест на тему № 6 «Асинхронный автомат»

Цель данного теста выяснить, насколько тестируемый усвоил принцип работы *T*-триггера и построенных на его основе асинхронных автоматов. Формулируется тестовое задание следующим образом: «Автомат находится в состоянии *t*. В каком состоянии будет находиться автомат, если на его вход φ подать два прямоугольных импульса?»

Ответ необходимо представить в десятичной системе.

Проиллюстрируем выполнение этого задания на примере автомата, приведенного на рис. 1, для $t = 27$. Переведем число 27 в двоичную систему:

$$27|_{10} = 11011|_2 .$$

Получилось пятизначное число, а триггеров в регистре 6. Следовательно, к найденному двоичному числу слева добавляем нуль: 011011. Будем считать, что это заданное исходное состояние автомата (рис. 1):

$$A = 0,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 0,\ E = 1,\ F = 1.$$

Подадим на вход φ импульс. Автомат перейдет в состояние 101000. Подадим на вход φ второй импульс. Автомат перейдет в состояние 111000. Переводим число 111000 в десятичную систему. Получим 56.

Это и есть ответ к данному тестовому заданию.

2 Задачи из письменной контрольной работы

2.1 Тема 7: «Синтез преобразователя кодов»

О весовых и невесовых кодах. Пусть дано двоичное число, например, 11010. Какое десятичное число ему соответствует? В общем случае однозначно ответить на этот вопрос невозможно из-за недостатка информации. Если это невесовой двоичный код, то необходима таблица, где для каждого кода указано соответствующее десятичное число. Соответствие может быть задано не только таблицей, но и какими-либо формулами или правилами (примером может служить код Грея, задаваемый формулами [1, с. 341]).

В весовых системах таблицы не требуются. Перевод двоичных кодов в десятичную систему осуществляется на основе полинома вида

$$N = a_{n-1}q_{n-1} + a_{n-2}q_{n-2} + \ \dots\ + a_1q_1 + a_0q_0,$$

где коэффициенты a_{n-1}, … , a_0 изображают цифры; n — длина кода, т.е. число входящих в него знаков 0 или 1. Числа q_{n-1}, q_{n-2}, … , q_1, q_0 обозначают веса. Именно этими весами и обусловлено все многообразие систем двоичного кодирования чисел, представленных в других системах счисления.

Самым распространенным весовым двоичным кодом является код, построенный на обычной двоичной системе счисления с весами, равными степени числа 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, … Например, если $n = 5$, то

$$q_4 = 16, \quad q_3 = 8, \quad q_2 = 4, \quad q_1 = 2, \quad q_0 = 1.$$

Тогда коду 11010 соответствует десятичное число

$$1{\cdot}16 + 1{\cdot}8 + 0{\cdot}4 + 1{\cdot}2 + 0{\cdot}1 = 26.$$

При других весах тому же коду может соответствовать другое десятичное число. Например, если

$$q_4 = 12, \quad q_3 = 3, \quad q_2 = 1, \quad q_1 = 1, \quad q_0 = 5.$$

то двоичному коду 11010 соответствует число 16, так как

$$1{\cdot}12 + 1{\cdot}3 + 0{\cdot}1 + 1{\cdot}1 + 0{\cdot}5 = 16.$$

Весовой код задают обычно упорядоченной последовательностью весов. Например, если заданными являются веса

$$q_4 = 4, \quad q_3 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_1 = 1, \quad q_0 = 4,$$

то это можно записать в более компактном виде, перечислив только веса: 41114. Из сокращенной записи видно, что код пятизначный и что веса левого и правого разрядов равны 4, а все остальные равны 1. Этой информации вполне достаточно, чтобы по коду найти его десятичный эквивалент. Например, коду 11010 соответствует число 6, коду 10101 — число 9 и т.д.

Таким образом, чтобы по записи весового двоичного кода найти его десятичный эквивалент, необходимо знать веса двоичных разрядов. На практике обычно считается, что если веса не указаны, то они представляют собой степени числа 2. Примером может служить четырехзначный код 8421, где веса равны:

$$8 = 2^3, \quad 4 = 2^2, \quad 2 = 2^1, \quad 1 = 2^0.$$

Во всех же остальных случаях необходимо указывать, в какой системе весов записываются двоичные коды.

Об избыточности кодирования десятичных цифр. В данной контрольной работе рассматривается комбинационный преобразователь входных кодов P в выходные коды Q. Для определенности будем считать их заданными, например, следующими весами:

$$P = 1224, \qquad Q = 11115.$$

Согласно этим записям входные коды являются четырехзначными, выходные — пятизначными.

Рассмотрим код P. Ему соответствуют четырехзначные двоичные коды. Всего их возможно 16. Но сумма весов в коде 1224 равна 9. Следовательно, закодировать десятичные числа, превышающие 9, в системе 1224 невозможно.

Подобные коды обычно используются для кодирования цифр десятичной системы счисления. При этом очевидно, что некоторые цифры могут быть закодированы неоднозначно, т.е.

различными двоичными последовательностями. Если из 16 возможных выбрать десять кодов для кодирования десятичных цифр, то останется шесть двоичных кодов. Их также можно ставить в соответствие десятичным цифрам, в результате чего некоторым десятичным цифрам будет соответствовать более одного двоичного кода. Полный список десятичных цифр и соответствующих им двоичных кодов имеет вид:

0 — 0000; 1 — 1000; 2 — 0100, 0010;
3 — 1100, 1010; 4 — 0110, 0001; 5 — 1110, 1001;
6 — 0011,0101; 7 — 1011, 1101; 8 — 0111, 9 — 1111.

Из списка видно, что каждая из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7 может быть закодирована двумя способами. Но при построении преобразователя кодов десятичным цифрам необходимо ставить в соответствие только по одному двоичному коду. В случае данной контрольной работы выбор кодов ничем не ограничен. Например, цифре 3 можно поставить в соответствие код 1100 либо 1010, а какой именно — безразлично. Выбор осуществляет студент, выполняющий контрольную работу.

Выходной код 11115 также предназначен для кодирования десятичных цифр, так как сумма его весов равна 9. Этот код является пятизначным, следовательно, всего существует 32 пятизначные последовательности нулей и единиц. Но для кодирования десятичных цифр используется только 10 последовательностей. Это значит, что избыточность выходных кодов при кодировании десятичных цифр гораздо больше по сравнению с входными кодами.

Полный список десятичных цифр и всех способов их кодирования в системе 11115 имеет вид:

0 — 00000;
1 — 10000, 01000, 00100, 00010;
2 — 11000, 10100, 10010, 01100, 01010, 00110;
3 — 11100, 11010, 10110, 01110;
4 — 11110;
5 — 00001;
6 — 10001, 01001, 00101, 00011;
7 — 11001, 10101, 10011, 01101, 01011, 00111;
8 — 11101, 11011, 10111, 01111;
9 — 11111.

Согласно этому списку цифры 0, 4, 5 и 9 кодируются однозначно. Цифрам 1, 3, 6 и 8 соответствует по четыре кода. Самыми «урожайными» с позиций избыточности кодов являются цифры 2 и 7. Каждую их них можно закодировать шестью способами. Но при построении преобразователя кодов из всех этих вариантов необходимо выбрать только по одному.

Синтез преобразователя весового двоичного кода. Выше в данном подразделе приведены образцы входного *P* и выходного *Q* весовых двоичных кодов. На их примере проиллюстрируем выполнение контрольной работы на тему «Синтез преобразователя кодов», построив комбинационный преобразователь двоичного весового кода *P* = 1224 в пятизначный двоичный весовой код вида *Q* = 11115.

Таблица 1

	A	B	C	D	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	1	0	0	1	1	0	0	0
12	1	1	0	0	1	1	1	0	0
6	0	1	1	0	1	1	1	1	0
14	1	1	1	0	0	0	0	0	1
3	0	0	1	1	1	0	0	0	1
11	1	0	1	1	1	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	×	×	×	×	×
2	0	0	1	0	×	×	×	×	×
5	0	1	0	1	×	×	×	×	×
9	1	0	0	1	×	×	×	×	×
10	1	0	1	0	×	×	×	×	×
13	1	1	0	1	×	×	×	×	×

Сначала построим таблицу (табл. 1). В ней три области: левая, средняя и правая. В средней области, там, где колонки обозначены буквами *A*, *B*, *C*, *D*, размещены входные двоичные коды с весами 1224. Справа в виде пяти колонок, обозначенных символами f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, расположены выходные двоичные коды с весами 11115, обозначающие те же десятичные цифры, что и в области входных кодов. Веса в таблице не указаны, но они подразумеваются: в средней части — 1224, справа — 11115.

В левой части таблицы приведена колонка, где записаны десятичные эквиваленты входных кодов, но не в системе 1224, а в обычной двоичной системе 8421. Здесь необходимы пояснения, чтобы разобраться, откуда появились коды вида 8421 и почему именно они оказались в таблице вместо кодов 1224.

В общем виде, т.е. без раскрытия внутреннего содержания, преобразователь кодов изображен на рис. 1. Проанализируем его работу. Допустим, что требуется выяснить, какой выходной код соответствует числу 4, поданному на вход преобразователя в виде двоичного кода 0110.

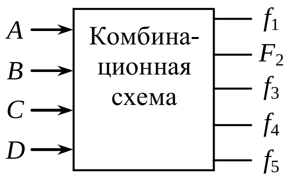

Рис. 1

Согласно таблице 1 (пятая сверху строка) на входной код 0110 схема должна отреагировать выходным кодом 11110. Это значит, что на наборе значений аргументов, равном 0110, булевы функции f_1, f_2, f_3 и f_4 должны принять единичное значение, а функция f_5 — нулевое.

Если потребуется определить выходной код, соответствующий входному числу 5, представленному кодом 1110 в системе весов 1224, то на вход преобразователя подаем код 1110. Согласно таблице 1 функции f_1, f_2, f_3 и f_4 на наборе значений аргументов 1110 должны принять нулевое значение, а функция f_5 — единичное. И т.д. Таким образом, комбинационная схема, представленная на рис 1, реализует пять булевых функций, зависящих от переменных A, B, C, D, и принимающих значения нуля или единицы в соответствии с таблицей 1. Но наборы значений аргументов задаются в обычной системе весов 8421. Поэтому во вспомогательной колонке указаны десятичные эквиваленты не кодов системы 1224, а наборов значений переменных.

В правой части таблицы 1 кроме нулей и единиц имеются крестики. Ими обозначены «лишние» двоичные коды, которые не были использованы для кодирования десятичных цифр. Рассматривая таблицу 1 как таблицу истинности для пяти булевых функций, найдем их минимальные ДНФ и КНФ с учетом неопределенных состояний.

Минимизируем функцию f_1:

$$f_1 = (3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 15); \quad [1, 2, 5, 9, 10, 13].$$

Карта Вейча приведена на рис. 2. Минимальная ДНФ, согласно этой карте, имеет вид

$$f_1 = D + A\overline{C} + \overline{A}B.$$

$f_1 =$

1		1	1
×	1	1	×
×	1	1	×
1	×	×	

Рис. 2

$\overline{f}_1 =$

	1		
×			×
×			×
	×	×	1

Рис. 3

Находим минимальную КНФ. По карте Вейча (рис. 3) минимизируем функцию $\overline{f_1}$:

$$\overline{f_1} = AC\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}.$$

Инвертируем это выражение по теореме де Моргана и получаем искомую КНФ:

$$f_1 = (\overline{A} + \overline{C} + D)(A + B + C).$$

Минимизируем вторую функцию (рис. 4).

$$f_2 = (4, 6, 7, 11, 12, 15); \quad [1, 2, 5, 9, 10, 13].$$

$$f_2 = AD + B\overline{C} + \overline{A}B.$$

$f_2 =$

1		1	1
×	1	1	×
×	1		×
	×	×	

Рис. 4

$\overline{f}_2 =$

	1		
×			×
×		1	×
1	×	×	1

Рис. 5

Находим минимальную КНФ. Инверсия функции f_2 приведена на рис. 5. Согласно этой карте:

$$\overline{f_2} = AC\overline{D} + \overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{C}.$$

В результате инвертирования этого выражения по теореме де Моргана получаем минимальную КНФ:

$$f_2 = (\overline{A} + \overline{C} + D)(A + B)(B + C).$$

Минимизируем третью функцию (рис. 6).

$$f_3 = (6, 7, 12, 15); \quad [1, 2, 5, 9, 10, 13].$$

$$f_3 = AB\overline{C} + \overline{A}BC + BD.$$

$f_3 =$

1		1	
×	1	1	×
×			×
	×	×	

Рис. 6

$\overline{f_3} =$

	1		1
×			×
×	1	1	×
1	×	×	1

Рис. 7

Находим минимальную КНФ. Инверсия функции f_3 приведена на рис. 7. Согласно этой карте получаем:

$$\overline{f_3} = AC\overline{D} + \overline{A}\overline{C} + \overline{B}.$$

По теореме де Моргана получаем минимальную КНФ:

$$f_3 = (\overline{A} + \overline{C} + D)(A + C)B.$$

Минимизируем четвертую функцию (рис. 8).

$$f_4 = (6, 15); \quad [1, 2, 5, 9, 10, 13].$$

$$f_4 = ABD + \overline{A}C\overline{D}.$$

$f_4 =$

		1	
×	1		×
×			×
	×	×	

Рис. 8

$\overline{f_4} =$

1	1		1
×		1	×
×	1	1	×
1	×	×	1

Рис. 9

Находим минимальную КНФ. Инверсия функции f_4 приведена на рис. 9. Согласно этой карте:

$$\overline{f_4} = A\overline{D} + \overline{A}D + \overline{B} + \overline{C}.$$

По теореме де Моргана получаем минимальную КНФ:

$$f_4 = (\overline{A} + D)(A + \overline{D})BC.$$

Минимизируем пятую функцию (рис. 10).

$$f_5 = (3, 7, 11, 14, 15); \qquad [1, 2, 5, 9, 10, 13].$$

$$f_5 = AC + D.$$

$f_5 =$

	1		
×	1	1	×
×	1	1	×
	×	×	

Рис. 10

$\bar{f}_5 =$

1		1	1
×			×
×			×
1	×	×	1

Рис. 11

Находим минимальную КНФ (рис. 11):

$$f_5 = (A + D)C.$$

Для построения преобразователя выбираем те функции, которые в аналитическом представлении имеют наименьшее число букв. Если ДНФ и КНФ по числу букв одинаковы, то берем ДНФ. В данном случае список булевых функций, имеет вид

$$f_1 = D + A\bar{C} + \bar{A}B.$$

$$f_2 = AD + B\bar{C} + \bar{A}B.$$

$$f_3 = (\bar{A} + \bar{C} + D)(A + C)B.$$

$$f_4 = ABD + \bar{A}C\bar{D}.$$

$$f_5 = AC + D.$$

Логическая схема преобразователя приведена на рис. 12.

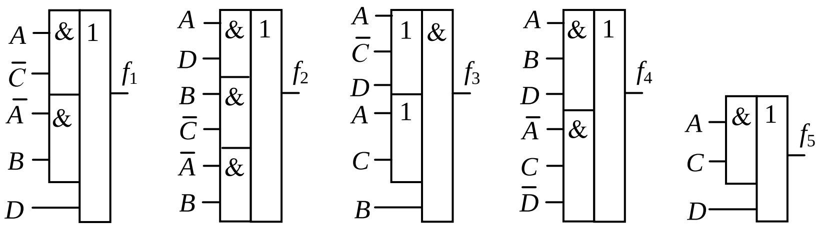

Рис. 12

Оформление решения. Решение задачи на тему «Синтез преобразователя кода» должно быть представлено в письменном виде со следующим содержанием:

а) условие задачи, как оно сформулировано в задании;

б) таблица истинности. Составляется по аналогии с таблицей 1, приведенной выше в данном подразделе;

в) каждую булеву функцию представить в СДНФ (по образцу, приведенному выше в данном подразделе);

г) минимальные ДНФ и КНФ для всех булевых функций;

д) карты Вейча для прямых и инверсных форм каждой из пяти функций — всего 10 карт (по образцу, приведенному в данном подразделе);

е) список пяти булевых функций, выбранных для построения логической схемы преобразователя и содержащих наименьшее число вхождений переменных;

ж) логическая схема преобразователя (подобно рис. 12).

2.2 Тема 8: «Автомат на *JK*-триггерах»

Сначала рассмотрим некоторые исходные теоретические положения, необходимые для синтеза автомата.

Триггер типа *JK*. Напомним основные сведения о триггере типа *JK*. Триггер имеет синхронизирующий вход C (синхровход) и два управляющих входа: *J* — единичный, *K* — нулевой (рис. 13). Управление по этим входам осуществляется следующим образом:

1) если $J = K = 0$, то триггер находится в режиме хранения информации независимо от того, поступают на его синхровход импульсы тактового генератора или нет;

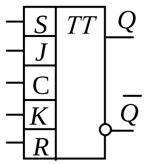

Рис. 13

2) при $J = 1$, $K = 0$ синхроимпульс переводит триггер в единичное состояние независимо от того, в каком состоянии он находился до подачи импульса;

3) если $J = 0$, $K = 1$, то синхроимпульс переводит триггер в нуль независимо от предыдущего состояния;

4) при $J = K = 1$ триггер меняет состояние на противоположное с каждым синхроимпульсом.

Кроме того, *JK*-триггер имеет установочные входы *R* и *S*. Эти входы используются в инициальных автоматах для установки их в исходное состояние. В процессе логического расчета входы *R* и *S* не учитываются. Лишь после того как будет построен автомат (не являющийся инициальным), в нем необходимо предусмотреть вход для его установки в исходное состояние. Тогда автомат перейдет в разряд инициальных.

Многотактный автомат на *JK*-триггерах. В синхронных многотактных автоматах импульсы, поступающие от генератора, подаются на синхровход каждого триггера, как показано на рис. 14. Этот вход автомата условимся обозначать буквой φ.

В простейшем случае автомат реализует одну или несколько последовательностей своих внутренних состояний, где под состоянием автомата понимается двоичное число, которое в данный момент находится в его внутренней памяти.

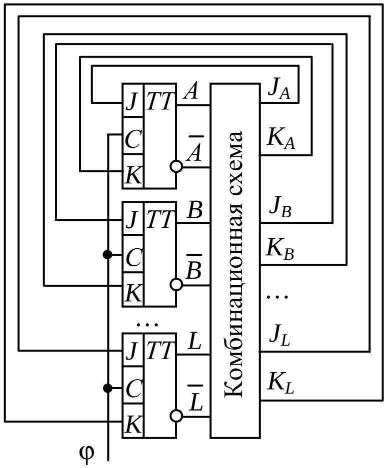

Рис. 14

На рис. 14 внутренняя память представлена регистром, состоящим из триггеров *A*, *B*, *C*,…, *L*. К их выходам подключена комбинационная схема, преобразующая состояния регистра в код, поступающий на управляющие входы триггеров.

Задача синтеза многотактного автомата сводится к разработке преобразователя состояний автомата в выходной код. Число выходов преобразователя в два раза больше числа триггеров (так как *JK*-триггеры двухвходовые).

Строится преобразователь по очень простому принципу: для каждого входного кода выходной код выбирается таким, чтобы синхроимпульс переводил автомат в заранее заданное состояние. Как выбирать эти выходные коды, показано на следующем примере.

Абстрактный синтез автоматов на *JK*-триггерах. Здесь и далее показан образец решения задачи на тему «Синтез автомата на *JK*-триггерах» из второй контрольной работы Логические условия для разработки автомата формулируются следующим образом:

Построить автомат на *JK*-триггерах, реализующий две последовательности:

если $A = 0$, то 0, 2, 5, 6, 4, 1, 3, 7;

если $A = 1$, то 1, 6, 4, 7, 2, 3, 0, 5,

где десятичные цифры обозначают состояния автомата. Обе последовательности являются циклически замкнутыми. Это значит, что при $A = 0$ после очередного тактового импульса автомат из состояния 7 переходит в состояние 0, а при $A = 1$ после состояния 5 автомат переходит в состояние 1 (также под действием синхроимпульса).

Исходным является нулевое состояние, т.е. 000.

Всего в каждой последовательности 8 состояний, следовательно, для автомата необходимо предусмотреть три триггера. А так как последовательностей две, то необходимо добавить еще один триггер. Таким образом, для построения автомата, реализующего две последовательности, необходимо четыре триггера.

Обозначим триггеры автомата буквами *A*, *B*, *C*, *D*. Триггеру *A* отведем роль переключателя последовательностей с одной на другую в соответствии с заданным условием.

Таблица 2

	A	B	C	D	J_B	K_B	J_C	K_C	J_D	K_D
0	0	0	0	0	0	×	1	×	0	×
2	0	0	1	0	1	×	×	1	1	×
5	0	1	0	1	×	0	1	×	×	1
6	0	1	1	0	×	0	×	1	0	×
4	0	1	0	0	×	1	0	×	1	×
1	0	0	0	1	0	×	1	×	×	0
3	0	0	1	1	1	×	×	0	×	0
7	0	1	1	1	×	1	×	1	×	1
9	1	0	0	1	1	×	1	×	×	1
14	1	1	1	0	×	0	×	1	0	×
12	1	1	0	0	×	0	1	×	1	×
15	1	1	1	1	×	1	×	0	×	1
10	1	0	1	0	0	×	×	0	1	×
11	1	0	1	1	0	×	×	1	×	1
8	1	0	0	0	1	×	0	×	1	×
13	1	1	0	1	×	1	0	×	×	0

Строим таблицу переходов состояний автомата (табл. 2). Последовательности состояний, представленных в двоичных кодах, указаны в колонках *B*, *C*, *D*.

Таблица по горизонтали разделена линией на две равные части, отделяющие один цикл от другого. В первой части, где $A = 0$, в колонках *B*, *C*, *D* приведена первая замкнутая последовательность трехзначных двоичных кодов. Во второй части — вторая последовательность, также замкнутая в своем цикле.

Правую половину таблицы заполняем на базе основных сведений о логике работы *JK*-триггера (см. начало данного подраздела). Пусть $A = 0$, и допустим, что автомат находится в состоянии 000, т.е. $B = C = D = 0$. Под действием синхроимпульса должно установиться состояние 010. Следовательно, триггер *C* должен перейти в 1, а триггеры *B* и *D* должны остаться в состоянии нуля.

Чтобы триггер *C* перешел в 1, на его единичный вход необходимо подать высокий уровень. В связи с этим в колонке J_C строки с нулевым номером (т.е. первой сверху) ставим единицу, а в колонке K_C той же строки ставим крестик. Если при минимизации функции K_C крестик будет заменен единицей, то триггер сменит свое состояние по пункту 4 основных сведений о *JK*-триггере. Если крестик будет заменен нулем, то смена состояния триггера произойдет по пункту 2.

Триггер *B* останется в нулевом состоянии, если на его единичный вход подать низкий уровень. В связи с этим в колонке J_B ставим нуль, а в колонке K_B — крестик. Если при минимизации крестик будет заменен нулем, то триггер перейдет в режим хранения состояния. При доопределении единицей триггер перейдет в 0 по пункту 3 основных сведений. То же самое относится и к триггеру *D*.

Предположим теперь, что синхроимпульс прошел на вход автомата и установил его в состояние 010. Следующим является состояние 101, т.е. все триггеры должны свои состояния сменить на противоположные. Триггеры *B* и *D* переводятся в единичное состояние так же, как это показано в предыдущем такте. Поэтому рассмотрим только триггер *C*, который из единичного состояния должен перейти в нулевое. Согласно пункту 3 основных сведений триггер *C* перейдет в нуль, если на его нулевой вход подать высокий уровень. Поэтому ставим единицу в колонке K_C во второй сверху строке. В колонке J_C при этом ставим крестик. Если при минимизации функция J_C будет доопределена нулем, то триггер *C* перейдет в нулевое состояние по пункту 3. Если же при доопределении крестик будет заменен единицей, то переход триггера *C* в нулевое состояние произойдет по пункту 4 основных сведений.

После завершения работы над правой частью таблицы 2 заполняем ее левую колонку десятичными числами, каждое из которых является эквивалентом соответствующих двоичных чисел, расположенных в области колонок *A*, *B*, *C*, *D*.

Структурный синтез автомата на *JK*-триггерах. Построением таблицы переходов завершается этап абстрактного синтеза автомата. Следующим является этап структурного синтеза, на котором автомат представляется в виде логической схемы, пригодной для ее реализации «в металле». Иными словами, в результате абстрактного синтеза должна быть получена схема, готовая к сборке с применением заданной серии логических элементов. В данной работе структурный синтез заканчивается на этапе представления автомата в виде схемы из абстрактных элементов И, ИЛИ, НЕ, построенной на основе минимальных ДНФ функций J_B, K_B, J_C, K_C, J_D, K_D.

Минимизируем функции J_B, K_B (рис. 15, 16).

$$J_B = (2, 3, 8, 9);\quad [4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15].$$

$$J_B = A\overline{C} + \overline{A}C. \qquad K_B = AD + CD + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}.$$

$J_B =$

×	×	×	×
×	×	×	×
1		1	
1		1	

Рис. 15

$K_B =$

			1
1	1	1	
×	×	×	×
×	×	×	×

Рис. 16

Минимизируем функции J_C, K_C (рис. 17, 18).

$$J_C = (0, 1, 5, 9, 12);\qquad [2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15].$$

$$J_C = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}D + \overline{B}D + AB\overline{D}. \qquad K_C = B\overline{D} + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{D} + A\overline{B}D.$$

$J_C =$

1	×	×	
	×	×	1
1	×	×	1
	×	×	1

Рис. 17

$K_C =$

×	1	1	×
×		1	×
×	1		×
×		1	×

Рис. 18

Минимизируем функции J_D, K_D (рис. 19, 20).

$$J_D = (2, 4, 8, 10, 12);\quad [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15].$$

$$J_D = B\bar{C} + A\bar{B} + \bar{B}C. \qquad K_D = A\bar{B} + BC + \bar{A}B.$$

$J_D =$

1			1
×	×	×	×
×	×	×	×
1	1	1	

Рис. 19

$K_D =$

×	×	×	×
	1	1	1
1	1		
×	×	×	×

Рис. 20

В общем случае, кроме ДНФ, следовало бы найти и все минимальные КНФ. Однако в данной контрольной работе вполне можно ограничиться только дизъюнктивными формами.

Полная логическая схема автомата приведена на рис. 21. Схема проста, однако некоторые пояснения относительно ее особенностей представляются не лишними.

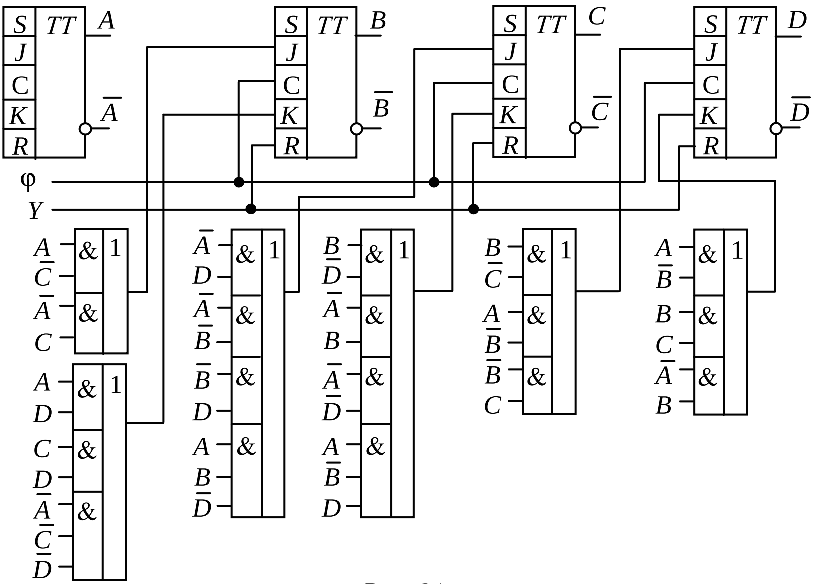

Рис. 21

Прежде всего, обратим внимание на триггер *A*, который изображен изолированно от всей схемы и на первый взгляд является лишним и к автомату не имеет никакого отношения. На самом же деле это не так. Его участие в работе схемы отражено в булевых функциях J_B, K_B, J_C, K_C, J_D, K_D, представляющих собой уравнения входов для триггеров *B*, *C* и *D*. У него свободными являются только входы. Это объясняется тем, что перевод триггера *A* в нулевое или единичное состояние осуществляется извне, поэтому на рис. 21 для управления его входами не предусмотрены никакие логические схемы.

Отметим также то обстоятельство, что на рис. 21 отсутствуют линии связи, соединяющие выходы триггеров с входами логических элементов. В принципе можно было бы изобразить все линии связи. Но тогда схема из-за густой паутины проводов окажется слишком громоздкой и труднообозримой. Поэтому вместо линий связи на рис. 21 на всех входах логических элементов указаны только буквы, показывающие, куда должны быть присоединены соответствующие входы каждого из логических элементов.

Автомат имеет входы φ и *Y*, где:

φ — вход, на который подаются прямоугольные импульсы тактового генератора. Под действием этих импульсов (по их отрицательным фронтам) автомат меняет свои состояния;

Y — установочный вход автомата. По этому входу автомат переводится в исходное состояние. Поскольку в данном случае исходным принято состояние 000, то шина *Y* подключена к нулевым установочным входам *R* всех трех триггеров. Перевод осуществляется кратковременной подачей на шину *Y* низкого уровня напряжения.

Так как в схеме автомата предусмотрена возможность установки его в состояние, называемое исходным, то этот автомат относится к классу инициальных автоматов.

Оформление решения задачи из контрольной работы

При оформлении решения задачи на тему «Синтез автомата на *JK*-триггерах» необходимо предусмотреть следующее:

а) привести полное условие задачи, как оно сформулировано в задании к заданной контрольной работе;

б) представить таблицу переходов. Образцом может служить вышеприведенная таблица 2 данного подраздела;

в) привести СДНФ функций J_B, K_B, J_C, K_C, J_D, K_D и для каждой из них указать все неопределенные состояния;

г) изобразить карты Вейча для минимизации каждой из шести функций J_B, K_B, J_C, K_C, J_D, K_D;

д) найти минимальные ДНФ шести булевых функций J_B, K_B, J_C, K_C, J_D, K_D, являющихся уравнениями входов для JK-триггеров;

е) привести полную логическую схему автомата. Образцом может служить схема, изображенная на рис. 21.

ЧАСТЬ 4
КОМБИНАТОРИКА

1 Вводные замечания

По комбинаторике предусмотрено два тестовых задания и одна контрольная задача.

Первое тестовое задание представлено задачей о шахматном городе. Для успешного его выполнения необходимо знать основное правило комбинаторики (правило произведения) и уметь применять формулу числа сочетаний без повторений.

Второе тестовое задание относится к применению комбинаторики в теории вероятностей. Для выполнения этого задания необходимо, кроме правила умножения и формулы числа сочетаний, знать и другие формулы комбинаторики: число перестановок и размещений с повторением и без повторений.

В контрольной работе предусмотрено решение только одной задачи, в основном из области комбинаторики двоичных чисел. В отличие от тестов контрольная работа содержит задачу, решение которой состоит из нескольких действий.

В следующих трех подразделах представлены образцы выполнения тестовых заданий и приведен ряд задач с решениями, относящихся к контрольным работам.

2 Тест на тему № 7: «Задача о шахматном городе»

Для тестирования по комбинаторике выбрана задача о шахматном городе. Шахматный город размером 5×8 приведен на рис. 1. На его площади, разграфленной вертикальными и горизонтальными линиями, расположены точки, обозначенные буквами A, B, C, D. Требуется определить число кратчайших путей, ведущих от точки A до точки B и проходящих через точки C и D (в заданном порядке). Движение возможно только по вертикальным и горизонтальным отрезкам.

Путь условимся обозначать упорядоченной последовательностью букв, обозначающих точки на рис. 1: A-C-D-B. Согласно записи A-C-D-B путь должен начаться в точке A, пройти через точку C, затем — через точку D к точке B. При этом все варианты путей должны быть кратчайшими.

Это условие является одинаковым для всех вариантов данного тестового задания.

Пример 1. Найти число кратчайших путей вида *A*-*C*-*D*-*B* (рис. 1).

Решение. Сначала определим число кратчайших путей, ведущих от точки *A* к точке *C*. Очевидно, что всякий кратчайший путь состоит из трех вертикальных отрезков и четырех горизонтальных.

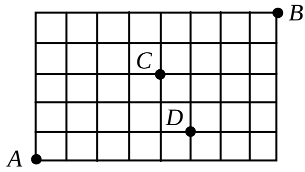

Рис. 1

Обозначим вертикальные отрезки единицами, а горизонтальные — нулями. Тогда всякий путь от *A* до *C* можно представить 7-значным двоичным числом, содержащим точно три единицы. Для нахождения количества этих 7-значных чисел можно воспользоваться формулой числа сочетаний без повторений либо формулой числа перестановок с повторениями. Согласно формуле числа сочетаний существует k_1 искомых чисел, где

$$k_1 = C_7^3 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Глядя на рис. 1, легко определить, что $k_2 = 3$, т.е. от точки *C* до точки *D* ведут три пути, в каждом из которых два вертикальных отрезка и один горизонтальный.

Тот же результат дает формула числа сочетаний:

$$k_2 = C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3.$$

От точки *D* до точки *B* каждый кратчайший путь представится 7-значным двоичным числом, содержащим четыре единицы и три нуля. Количество таких путей определим при помощи формулы числа сочетаний без повторений:

$$k_3 = C_7^4 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Общее число *k* искомых путей определяется по основному правилу комбинаторики — правилу произведения:

$$k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3; \qquad k = 35 \cdot 3 \cdot 35 = 3675.$$

Ответ: 3675.

3 Тест на тему № 8: «Теория вероятностей»

Для выполнения задания по этой теме необходимы некоторые сведения из теории вероятностей. Объем этих сведений невелик. Вполне достаточно представления о вероятности как о дроби, знаменатель которой показывает, сколько всего существует исходов некоторого эксперимента, а числитель — сколько из этих исходов удовлетворяют заданным условиям. Кроме этого, в некоторых случаях может оказаться полезным понятие произведения вероятностей. Если рассматривается несколько случайных событий и требуется найти вероятность того, что состоятся все события, то сначала необходимо определить вероятности каждого события, а затем найти произведение всех этих вероятностей.

В общем случае события могут быть зависимыми и независимыми. Если события независимы, то нахождение их вероятностей обычно особых затруднений не вызывает. Если же события зависимы, то потребуется лишь учесть то обстоятельство, что если одно событие состоялось, то это необходимо учитывать при нахождении вероятности второго события. В таких случаях пользуются не очень удачным термином «условная вероятность». Здесь слово «условная» говорит не о том, что мы о чем-то собираемся условиться (договориться). Оно обозначает лишь следующее: вероятность второго события определяется **при условии**, что первое событие состоялось.

Все особенности, относящиеся к вычислению вероятностей в пределах темы данного теста, рассмотрим на примерах.

Пример 1. Монету подбрасывают 8 раз. Найти вероятность того, что первым выпадет герб и последним также выпадет герб.

Решение. Вероятность того, что первым выпадет герб, равна 1/2. Вероятность того, что при последнем подбрасывании монеты выпадет герб, также равна 1/2. Оба эти события независимы. Следовательно,

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: p = 1/4.

Пример 2. Игральную кость подбрасывают 2 раза. Найти вероятность того, что второе выпавшее число будет в 2 раза больше первого.

Решение. Первый бросок может закончиться шестью исходами, и второй шестью. Следовательно, число всех исходов эксперимента равно 36. Это знаменатель искомой вероятности. Числитель равен 3. Это исходы 1 и 2, 2 и 4, 3 и 6. Таким образом, искомая вероятность равна 1/12.

Ответ: 1/12.

Пример 3. Некто задумал двузначное десятичное число N (с нуля двузначные числа не начинается). Найти вероятность того, что если каждую цифру представить в двоичном коде 8421, то в восьмизначном двоично-десятичном коде будет точно две единицы.

Решение. Всего двузначных десятичных чисел, не начинающихся с нуля, существует 90: 10, 11, 12, .., 99. Это знаменатель искомой вероятности. Определим числитель. В двоично-десятичном коде каждая десятичная цифра заменяется тетрадой — четырехзначным двоичным кодом. Например:

$35|_{10} = 00110101|_2$; $48|_{10} = 01001000|_2$; $30|_{10} = 00110000|_2$.

Если две единицы находятся в первой тетраде, то во второй их нет. Всего существует шесть тетрад с двумя единицами. Четырьмя тетрадами кодируются десятичные цифры 3, 5, 6 и 9, следовательно, существует четыре двоично-десятичных кода, оканчивающихся четырьмя нулями:

00110000, 01010000, 01100000, 10010000.

Если в первой тетраде одна единица, то и во второй одна. Это тетрады вида: 0001, 0010, 0100, 1000. Из них можно составить 16 двоично-десятичных кодов:

00010001, 00100001, 01000001, 10000001,
00010010, 00100010, 01000010, 10000010,
00010100, 00100100, 01000100, 10000100,
00011000, 00101000, 01001000, 10001000.

Таким образом, всего существует 20 двоично-десятичных кодов, в каждом из которых точно две единицы. Искомая вероятность равна 20/90. После сокращения: 2/9.

Ответ: 2/9.

Пример 3. В тире три мишени. Перед мишенями пять стрелков. Каждый стрелок самостоятельно, независимо от других, выбирает мишень и производит один выстрел без промаха. Найти вероятность того, что поражена будет только одна мишень (пятью выстрелами).

Решение. Пронумеруем мишени цифрами троичной системы 0, 1, 2 и поставим в соответствие каждому исходу стрельбы пятизначное троичное число. Например, код 10021 обозначает: первый стрелок выбрал первую мишень, второй и третий — нулевую, четвертый — вторую, пятый — первую. Всего существует 3^5 = 243 пятизначных троичных кодов, которые могут начинаться с нуля. Столько же существует и исходов стрельбы. Это знаменатель искомой вероятности. Определим числитель. Всего существует только три исхода стрельбы, когда поражена одна мишень из трех. Им соответствуют коды: 00000 — все пули попали в нулевую мишень, 11111 — все пули попали в первую мишень, 22222 — все пули попали в вторую мишень. Искомая вероятность равна 3/242. После сокращения на 3 получаем 1/81.

Ответ: 1/81.

Пример 4. В урне 4 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что если наугад извлечь 4 шара, то два из них будут белыми и два черными.

Решение. Всего шаров 12. Из них 4 шара можно выбрать

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

способами. Это знаменатель искомой вероятности. Для выбора двух черных шаров из восьми существует $C_8^2 = 28$ вариантов. Выбор двух белых шаров из четырех возможен $C_4^2 = 6$ способами. Тогда искомая вероятность равна:

$$p = \frac{28 \cdot 6}{495} = \frac{56}{165}.$$

Ответ: 56/165.

Пример 5. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал составленное из букв разрезной азбуки слово «искусство», выбрал из них четыре карточки и расположил их в один ряд. Найти вероятность того, что у него получится слово «куст».

Решение. Рассмотрим четыре события: A — выбрана буква «к», B — выбрана буква «у», C — выбрана буква «с», D — выбрана буква «т». Найдем их вероятности. Вероятность события A равна: $p(A) = 1/9$. Так как событие A состоялось, то среди рассыпанных осталось 8 карточек. Следовательно, вероятность события B равна: $p(B) = 1/8$. Теперь осталось 7 карточек и вероятность события C равна: $p(C) = 3/7$. Осталось 6 карточек. Вероятность события D равна: $p(D) = 1/6$. По правилу произведения вероятностей получаем:

$$p = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{1008}.$$

Ответ: 1/1008.

Пример 6. Из колоды, в которой 36 карт, наугад вынимают две карты. Найти вероятность того, что обе они будут пиковой масти.

Решение. Две карты из 36 можно извлечь $C_{36}^2 = 630$ способами. Следовательно, знаменатель найден. В колоде из 36 карт содержится 9 карт пиковой масти. Две из них можно извлечь $C_9^2 = 36$ способами. Искомая вероятность равна 36/630. После сокращения получаем $p = 2/35$.

Ответ: 2/35.

Пример 7. Некто задумал 10-значное двоичное число (числа могут начинаться с нуля). Найти вероятность того, что в числе содержится хотя бы один нуль и хотя бы одна единица.

Решение. Всего возможно 1024 10-значных двоичных чисел. Существует одно число, состоящее из десяти нулей, и одно число, состоящее из десяти единиц. Во всех остальных 1022 числах содержится хотя бы один нуль и хотя бы одна единица. Следовательно, искомая вероятность равна $p = 1022/1024$. После сокращения на 2 $p = 511/\ 512$.

Ответ: 511/ 512.

4 Задачи из письменной контрольной работы. Тема 9: «Комбинаторика»

Прежде чем решать комбинаторные задачи из данной контрольной работы, рекомендуется просмотреть решения всех нижеприведенных задач. Знакомство с ними может существенно снизить трудозатраты на выполнение контрольной работы и повысит вероятность того, что решение задачи будет верным.

Пример 1. Десятизначное двоичное число разделили на две неравные части — левую и правую. Левая часть состоит из четырех знаков, правая — из шести. Сколько существует таких чисел, в каждом из которых слева единиц больше, чем справа?

Решение. В левой части может быть 0 единиц (т.е. ни одной), либо одна, либо две, либо три, либо четыре. В соответствии с этим разобьем задачу на пять более простых задач:

а) в левой части нет единиц. В этом случае нет ни одного десятизначного двоичного числа, удовлетворяющего условию задачи;

б) в левой части одна единица, тогда в правой части должны быть только нули. Всего существует 4 таких числа:

0001 000000; 0010 000000; 0010 000000; 1000 000000;

в) в левой части две единицы, тогда в правой может быть либо 0 единиц, либо одна единица. Две единицы в левой части дают $C_4^2 = 6$ четырехзначных чисел. Столько же существует искомых чисел, если в правой части единиц нет. Одна единица в правой части может располагаться 6 способами. Тогда существует 6·6 = 36 искомых чисел. Одно их них: 0101 001000. Таким образом, всего существует 36 + 6 = 42 числа, в каждом из которых слева две единицы, а справа нет единиц или 1 единица;

г) слева три единицы, тогда справа их может быть либо 0, либо 1, либо 2. Три единицы слева могут располагаться четырьмя способами. Если справа единиц нет, то получаем 4 искомых числа. Если справа одна единица, то существует 4·6 = 24 искомых числа. Одно из них: 1011 010000. Если справа две единицы, то существует $4C_6^2 = 60$ искомых чисел. Одно из них имеет вид: 1011 001010. Таким образом, всего получаем:

$$4 + 24 + 60 = 88,$$

т.е. существует 88 чисел, у которых слева три единицы, а справа 0, либо 1, либо 2 единицы;

д) слева четыре единицы. Справа же может быть либо 0 единиц, либо 1, либо 2, либо 3. Четыре единицы слева дают только один вариант их расположения. Если справа единиц нет, то получаем одно число из искомых. Оно имеет вид: 1111 000000. Если справа одна единица, то возможно 6 искомых чисел. Одно из них: 1111 001000. Если справа две единицы, то существует $C_6^2 = 15$ искомых чисел. Одно из них: 1111 010100. Если справа три единицы, то возможно $C_6^3 = 20$ искомых чисел. Сложим полученные результаты:

$$1 + 6 + 15 + 20 = 42.$$

То есть всего существует 42 числа, у которых слева четыре единицы, а справа 0, либо 1, либо 2, либо 3 единицы.

Сложим числа, полученные в результате решения всех пяти простых задач:

$$0 + 4 + 42 + 88 + 42 = 176.$$

Ответ: 176.

Ответ к данной задаче можно проверить. Для этого решим еще две задачи:

1) сколько существует чисел, в каждом из которых слева столько же единиц, сколько и справа?

2) сколько существует чисел, в каждом из которых слева единиц меньше, чем справа?

Сумма ответов ко всем трем задачам должна быть равной 1024. Именно столько всего существует десятизначных двоичных чисел.

Решаем первую проверочную задачу. Если слева единиц нет, то их не должно быть и справа. Такое число существует только одно: 0000 000000.

Если слева одна единица, то и справа должна быть только одна. Например: 0100 000010. Всего возможно $4 \cdot 6 = 24$ таких числа.

Если слева и справа по две единицы, то всего таких чисел существует $C_4^2 \cdot C_6^2 = 6 \cdot 15 = 90$.

Если слева и справа по три единицы, то количество таких чисел равно $C_4^3 \cdot C_6^3 = 4 \cdot 20 = 80$.

Если слева и справа по четыре единице, то количество таких чисел равно $C_4^4 \cdot C_6^4 = 1 \cdot 15 = 15$.

Сложим полученные числа: 1 + 24 + 90 + 80 + 15 = 210.

Таким образом, **ответ к первой проверочной** задаче: 210.

Решаем вторую проверочную задачу. Как и в исходной задаче, рассмотрим пять простых задач:

а) слева единиц нет. Тогда справа может быть одна единица (таких чисел 6), либо две (таких чисел существует $C_6^2 = 15$), либо три (количество их $C_6^3 = 20$), либо четыре (таких чисел существует $C_6^4 = 15$), либо пять ($C_6^5 = 6$), либо шесть (одно число). Всего: 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63;

б) слева одна единица. Она может располагаться четырьмя вариантами среди четырех разрядов. Каждому из них соответствует справа две единицы (15 чисел), либо три (20 чисел), либо четыре (15 чисел), либо пять (6 чисел), либо шесть (одно число). Всего: 4·(15 + 20 + 15 + 6 + 1) = 228;

в) слева две единицы. Существует 6 четырехзначных двоичных чисел, содержащих по две единицы. Каждому из них соответствует справа три единицы (20 чисел), либо четыре (15 чисел), либо пять (6 чисел), либо шесть (одно число). Всего получаем 6·(20 + 15 + 6 + 1) = 252 числа;

г) слева три единицы. Существует 4 четырехзначных двоичных числа, содержащих по три единицы. Каждому из них соответствует справа четыре единицы (15 чисел), либо пять (6 чисел), либо шесть (одно число). Всего 4·(15 + 6 + 1) = 88 чисел;

д) слева четыре единицы. Четырехзначное такое число существует только одно. Справа возможно пять единиц (6 чисел) либо шесть (одно число). Всего 6 + 1 = 7 чисел.

Сложим полученные числа и получим **ответ ко второй проверочной** задаче: 63 + 228 + 252 + 88 + 7 = 638.

Таким образом, существует 176 чисел, в которых слева больше единиц, чем справа; существует 210 чисел, в которых слева столько же единиц, сколько и справа; существует 638 чисел, в которых слева меньше единиц, чем справа. Сложим эти три числа:

$$176 + 210 + 638 = 1024.$$

Отсюда следует, что исходная задача решена правильно.

Пример 2. В n-значном двоичном числе точно три единицы, которые нигде рядом не стоят. Известно, что существует 220 таких чисел. Найдите n.

Решение. Если в n-значном числе три единицы, то число нулей в нем равно $n-3$. Запишем эти $n-3$ нулей в один ряд. Между нулями, а также слева и справа от них можно ставить по одной единице. Всего возможно $n-2$ таких мест, т.е. на единицу больше, чем нулей. При этом всякий раз будут получаться числа, в которых нет рядом стоящих единиц. Так как в данном случае имеется три единицы, то расположить их можно по $n-2$ местам k способами, где

$$k = C_{n-2}^{3} = \frac{(n-2)!}{3!(n-2-3)!} = \frac{(n-2)!}{3!(n-5)!}.$$

Запишем это выражение следующим образом:

$$k = \frac{(n-2)!}{3!(n-5)!} = \frac{(n-5)!(n-4)(n-3)(n-2)}{3!(n-5)!}.$$

После сокращения получаем:

$$k = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{3!}.$$

Число k известно. Оно равно 220. Получаем уравнение:

$$\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{3!} = 220.$$

Запишем его в виде

$$(n-4)(n-3)(n-2) = 220 \cdot 6 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3.$$

Раскрывать скобки нет необходимости. Слева записаны три числа в порядке возрастания на единицу. Из чисел правой части составим такие же три числа. Это можно сделать следующим образом: 10, 11, 12. Решаем уравнение $n – 2 = 12$, откуда получаем: $n = 14$.

Ответ: $n = 14$.

Решение можно проверить. Для этого определим количество всех 14-значных двоичных чисел, в каждом из которых точно три единицы и которые нигде рядом не стоят. Если в 14-значном числе три единицы, то в нем 11 нулей. Запишем их в ряд, отделив один нуль от другого точками и поставив по одной точке слева и справа от нулей:

.0.0.0.0.0.0.0.0.0.0.0.

Получилось 12 точек. Каждую точку можно заменить одной единицей. Всего единиц 3. Следовательно, заменить единицами можно любые три точки (остальные точки при этом удаляются). Всего существует k способов выбора трех нулей для замены их единицами, где

$$k = C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3} = 220.$$

Именно это число приведено в условии задачи, следовательно, решение верно.

Пример 3. Десятизначное двоичное число, в каждом из которых нет рядом стоящих единиц, разделили на две равные части — левую и правую. Сколько существует 10-значных двоичных чисел, в каждом из которых слева нулей больше, чем справа?

Решение. Рассмотрим левую часть. Запишем все пятизначные числа, не содержащие рядом стоящих единиц. Всего их существует 13:

00000	10000	10100	10101	
	01000	10010		
	00100	10001		(1)
	00010	01010		
	00001	01001		
		00101		

Здесь четыре колонки. В первой нет единиц, во второй одна, в третьей две и в четвертой три единицы. Очевидно, что такие же числа могут стоять и в правой части.

Разобьем задачу на ряд простых подзадач. Пусть слева в 10-значном числе записано 00000. Тогда справа может быть любое число из 13 за исключением того же числа 00000, поскольку согласно условию задачи слева должно быть больше нулей, чем справа. Следовательно, найдено 12 чисел, удовлетворяющих условию примера.

Пусть слева содержится одна единица. Из них четыре числа оканчиваются нулями. После каждого из них может быть поставлено любое число из третьей и четвертой колонок из списка (1). Это значит, что найдено еще 28 чисел из искомых. Если слева записано число 00001, то правое число не может начинаться с единицы. Отсюда получаем еще три искомых числа. Добавим их к 28 — получим 31 число.

Пусть слева содержится две единицы и три нуля — третья колонка в списке (1). Тогда справа может быть только одно число 10101. Слева могут быть записаны только те числа, которые оканчиваются нулем. Следовательно, на этом этапе получаем три новых числа.

Результаты трех вычислений сложим: 12 + 31 + 3 = 46. Столько существует 10-значных двоичных чисел, в каждом из которых нет рядом стоящих единиц и где слева нулей больше, чем справа.

Ответ: 46.

Этот ответ можно проверить. Обозначим: k_1 — количество чисел, удовлетворяющих условию примера; k_2 — количество чисел, удовлетворяющих тому же условию примера, но для случая, когда слева нулей меньше, чем справа; k_3 — количество чисел, в которых слева столько же единиц, сколько и справа; k — общее количество 10-значных чисел, в каждом из которых нет рядом стоящих единиц. Очевидно, что справедливо соотношение

$$k = k_1 + k_2 + k_3. \tag{2}$$

Их этих четырех величин известными являются только две: $k_1 = k_2 = 46$. Необходимо найти k и k_3.

Определяем число k:

а) если в числе нет единиц, то стоять рядом они не могут. Такое число существует одно;

б) если в числе только одна единица, то в нем также единицы стоять рядом не могут. Таких чисел существует 10;

в) если в числе две единицы, то всего возможно $C_9^2 = 36$ таких чисел;

г) если в числе три единицы, то количество их: $C_8^3 = 56$;

д) если в числе четыре единицы, то всего возможно таких чисел $C_7^4 = 35$;

е) если в числе пять единиц, то количество их: $C_6^5 = 6$.

Суммируем все эти числа:

$$k = 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 = 144.$$

Осталось определить число k_3:

а) если слева и справа нет единиц, то существует только одно число из искомых;

б) если слева четыре нуля, то и справа должно быть четыре нуля. Из списка (1) видно, что если левое число оканчивается нулем, то после каждого из них справа можно поставить любое число из второй колонки. Получится 20 искомых чисел. Например: 01000 10000, 00010 10000 и т.д. Если же левое число оканчивается единицей, то справа можно поставить только четыре числа из второй колонки:

00001 01000, 00001 00100, 00001 00010, 00001 00001.

Всего получаем 24 искомых числа;

в) если слева две единицы и левое число оканчивается нулем (всего их три), то справа после каждого из них можно поставить любое число из шести. Получаем 18 искомых чисел. Если же левое число оканчивается единицей, то справа можно ставить только числа, начинающиеся с нуля. Получаем еще девять чисел. Всего получаем 27 чисел из искомых.

Суммируем результаты проведенных вычислений:

$$k_3 = 1 + 24 + 27 = 52.$$

Находим число k:

$$k = 46 + 46 + 52 = 144.$$

Проверочное соотношение (2) выполняется, следовательно, задача решена правильно.

Пример 4. Сколько существует 9-значных двоичных чисел, каждое из которых начинается с единицы и оканчивается нулем и в каждом числе нулей больше, чем единиц?

Решение. Запишем заданное число в виде:

$$1 * * * * * * * 0,$$

где звездочки можно заменять двоичными знаками.

Представим задачу в виде ряда простых подзадач:

а) заменим все звездочки нулями. Тогда в числе будет 8 нулей и одна единица. Следовательно, одно число найдено;

б) одну из звездочек заменим единицей, а все остальные — нулями. Получим 7 искомых чисел;

в) единицами заменим две звездочки. Тогда в числе будет три единицы и 6 нулей. Получим $C_7^2 = 21$ новых искомых чисел;

г) единицами заменим три звездочки. Тогда в числе будет 4 единицы и 5 нулей. Таких чисел существует $C_7^3 = 35$;

д) единицами заменим 4 звездочки. Тогда в числе будет 5 единиц и 4 нуля, т.е. нулей окажется меньше, чем единиц.

Суммируем полученные промежуточные результаты:

$$1 + 7 + 21 + 35 = 64.$$

Ответ: 64.

Пример 5. Семизначное двоичное число 1001011 арифметически сложили с двоичным числом a. Сумма $1001011 + a$ оказалась восьмизначным числом, т.е. с единицей в старшем разряде. Например, при a = 1110011 получается восьмизначное число: 1001011 + 1110011 = 10111110. Найдите число значений a, при которых сумма $1001011 + a$ является восьмизначным числом, т.е. содержит единицу в старшем разряде? Найдите $a_{\min}$ и $a_{\max}$.

Решение. Если к числу 1001011 (75 в десятичном представлении) арифметически прибавить его инверсный код 0110100 (десятичное 52), то получим семизначное число 1111111 (127). Прибавим к инверсному коду единицу. Получим 0110101 (53). Это наименьшее число, которое в сумме с числом 1001011 (75) дает восьмизначное число 10000000 (128). Отсюда следует, что наименьшее значение величины a найдено. Оно равно 0110101 (53), т.е. $a_{\min}$= 53.

Наибольшее восьмизначное число состоит из восьми единиц: 11111111 (255). Следовательно, всего восьмизначных чисел с единицей в старшем разряде существует:

$$11111111 – 01111111 = 10000000 \text{ (десятичное 128)}.$$

Столько же существует и значений a, при которых сумма $1001011 + a$ является восьмизначным числом. Отсюда находим наибольшее значение величины a:

$$a_{\max} = 128 + 52 = 180.$$

Ответ: всего существует 128 значений a, при которых сумма $1001011 + a$ является восьмизначным числом;

$a_{\min} = 53$;

$a_{\max} = 180$.

Пример 6. Даны два двоичных числа a и b. Число a семизначное, число b пятизначное. Эти числа приставили одно к другому: слева a, справа b. В результате получилось 12-значное число c (будем называть их c-числами). Сколько существует 12-значных c-чисел, если в числе a нечетное число единиц и в числе b — нечетное?

Решение. Разобьем данную задачу не несколько простых подзадач:

а) пусть в числе a содержится одна единица. Получим 7 значений величины a. Каждому из них можно поставить в соответствие 16 правых чисел b. Число 16 получено следующим образом. Существует пять 5-значных двоичных чисел, содержащих по одной единице, кроме того, существует $C_5^3 = 10$ чисел, содержащих по три единицы и одно число, состоящее из пяти единиц. В сумме — 16. Таким образом, если слева одна единица, то всего возможно $7 \cdot 16 = 112$ c-чисел;

б) пусть в числе a содержится три единицы. Таких чисел существует $C_7^3 = 35$. Каждому из них можно поставить в соответствие 16 правых чисел. Следовательно, получаем еще 560 c-чисел;

в) допустим, что в числе a пять единиц. Тогда получим $C_7^5 \cdot 16 = 336$ c-чисел;

г) в числе a может быть 7 единиц. Такое число существует только одно. Следовательно, получаем еще 16 новых c-чисел.

Суммируем полученные результаты:

$$112 + 560 + 336 + 16 = 1024.$$

Ответ: 1024.

Этот же ответ можно получить гораздо более коротким путем. Число a семизначное. Всего их существует 128. Среди них в половине чисел четное число единиц, тогда в 64 числах — нечетное. Из 32 правых чисел 16 содержат нечетное число единиц. Тогда всего возможно $64 \cdot 16 = 1024$ c-чисел.

Пример 7. 12-значное двоичное число разделили на две равные части: левая часть a, правая — b. Сколько существует 12-значных двоичных чисел, для которых выполняется условие: $a + b$ = 111111, т.е. арифметическая сумма чисел a и b есть шестизначное двоичное число без нулей?

Решение. Равенство вида $a + b$ = 111111 выполняется только в том случае, когда числа a и b являются взаимно инверсными, т.е. переходят одно в другое заменой всех единиц нулями и всех нулей единицами. Следовательно, если выбрано число a, то ему может быть поставлено в соответствие только одно число b. Всего существует 64 числа, которые могут быть записаны в левой части. Столько же существует и искомых 12-значных чисел.

Ответ: 64.

Пример 8. 11-значное двоичное число c разделили на две части a и b так, что в левой части точно пять знаков. Сколько всего существует 11-значных чисел, для которых выполняется условие: $a > b$.

Решение. Рассуждаем следующим образом. Если $a = 0$, то неравенство $a > b$ невозможно. При $a = 1$ существует одно значение c: 00001 000000. При $a = 2$ существует два значения c: 00010 000000 и 00010 000001. При $a = 3$ существует три значения c и так далее до $a = 31$, что дает 31 значение c. Всего:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 31 = 496.$$

Ответ: 496.

Найденный ответ можно проверить, если решить еще две задачи: найти количество 11-значных чисел, для которых выполняется условие: $a = b$ и $a < b$.

Если $a = b$, то существует 32 искомых числа.

Если $a < b$, то рассуждаем по аналогии с исходной задачей: при $a = 0$ количество искомых чисел равно 63; при $a = 1$ их количество равно 62 и так далее до $a = 31$, которое дает 32 искомых числа. Всего:

$$63 + 62 + 61 + \ldots + 32 = 1520.$$

Сложим результаты вычислений для $a > b$, $a = b$ и $a < b$:

$$496 + 32 + 1520 = 2048,$$

т.е. столько, сколько существует 11-значных двоичных чисел.

ЧАСТЬ 5

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

1 Вводные замечания

По теории графов предусмотрено два тестовых задания и одна задача из письменной контрольной работы.

Темы тестов: «Кодирование деревьев» и «Эйлеровы графы».

Чтобы успешно пройти первый тест, студент должен иметь представление о таких понятиях, как инцидентность, деревья и леса, связность графа, достижимость в графе, циклы, висячие вершины, помеченные графы.

Второй тест охватывает дополнительный круг понятий. Это эйлеровы и полуэйлеровы графы, обход графа, четность и нечетность степени вершины, уникурсальная линия, замкнутые и разомкнутые простые цепи.

Задача из контрольной работы предусматривает умение находить:

а) все простые цепи, соединяющие две вершины неориентированного графа;

б) все простые циклы, начинающиеся и оканчивающиеся в заданной вершине неориентированного графа;

в) все простые цепи, соединяющие две вершины орграфа (ориентированного графа).

2 Тесты по теории графов

2.1 Тесты по теме № 9 «Кодирование деревьев»

Последовательность действий при кодировании деревьев (методом Прюфера) поясним на примерах.

Пример 1. Найти код дерева, представленного на рис. 1.

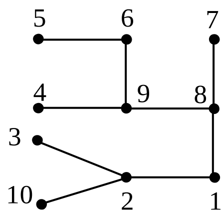

Рис. 1

Решение. Находим висячую вершину с наименьшим номером. Это вершина 3. Удаляем вершину 3 вместе с ребром. Номер вершины, инцидентной удаленному ребру, есть первая цифра искомого кода. Это цифра 2.

Получился новый граф, изображенный на рис. 2.

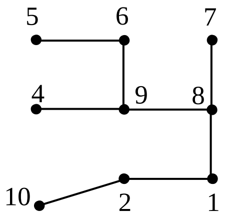

Рис. 2

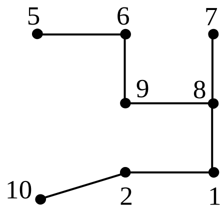

Рис. 3

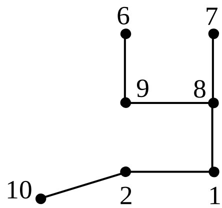

Рис. 4

В новом графе (рис. 2) содержится четыре висячих вершины: 4, 5, 7 и 10. Вершину с наименьшим номером, т.е. вершину 4, удаляем ее вместе с ребром. Вершина, инцидентная удаленному ребру, имеет номер 9. Следовательно, цифра 9 — это второй знак искомого кода.

В результате удаления ребра 4–9 получился очередной граф, приведенный на рис. 3. В этом графе три висячие вершины с номерами: 5, 7 и 10. Наименьшим из них является номер 5. Удаляем вершину 5 вместе с ребром и получаем третий знак кода — цифру 6.

Новый граф приведен на рис. 4. В этом графе три висячие вершины. Наименьший номер — 6. Четвертый знак искомого кода — цифра 9.

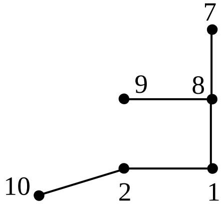

Рис. 5

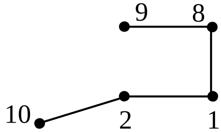

Рис. 6

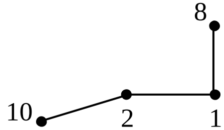

Рис. 7

На рис. 5 удаляем вершину 7 и получаем пятый знак кода. Это цифра 8.

На рис. 6 удаляем вершину 9. Цифра 8 — это шестой знак кода.

На рис. 7 удаляем вершину 8. Цифра 1 — это седьмой знак кода.

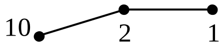

Рис. 8

Рис. 9

На рис. 8 удаляем вершину 1 вместе с ребром 1–2. Цифра 2 — это восьмой знак искомого кода. После удаления вершины 1 получился граф, состоящий из двух вершин и одного ребра (рис. 9). Когда получается такой граф, кодирование заканчивается.

Таким образом, искомый код имеет вид: 29698812.

Ответ: 29698812.

Пример 2. Найти код дерева, изображенного на рис. 10.

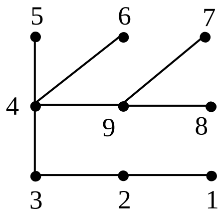

Рис. 10

Решение. В этом графе искомый код начинается с цифры 2. Действуя точно так же, как и в предыдущем примере, получаем: 2344499.

Ответ: 2344499.

Пример 3. Найти код дерева, приведенного на рис. 11.

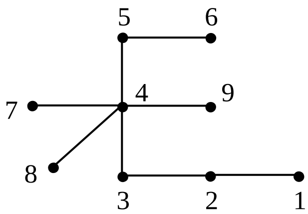

Рис. 11

Решение. В графах на рис. 10 и 11 содержится цепь 1–2–3–4, оканчивающаяся висячей вершиной с наименьшим номером, равным 1. В связи с этим первые три знака кодов обоих графов совпадают. Но затем равенство знаков в кодах нарушается, и код дерева, приведенного на рис. 11, принимает вид 2345444.

Ответ: 2345444.

Пример 4. Найти код дерева, изображенного на рис. 12.

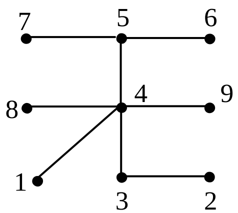

Рис. 12

Решение. Действуя как и в предыдущих случаях, начиная с наименьшего номера висячей вершины, получаем искомый код: 4345544.

2.2 Тест по теме № 10 «Эйлеровы графы»

Признак, при помощи которого выявляются эйлеровы графы, прост: граф называется эйлеровым, если в нем нет нечетных вершин. Кроме того, существует понятие полуэйлерового графа: граф называется полуэйлеровым, если в нем точно две нечетные вершины.

Тест состоит в выборе из заданного набора графов сначала всех эйлеровых, а затем — всех полуэйлеровых графов.

Пример. Укажите сначала номера всех эйлеровых графов, а затем — всех полуэйлеровых (рис. 13).

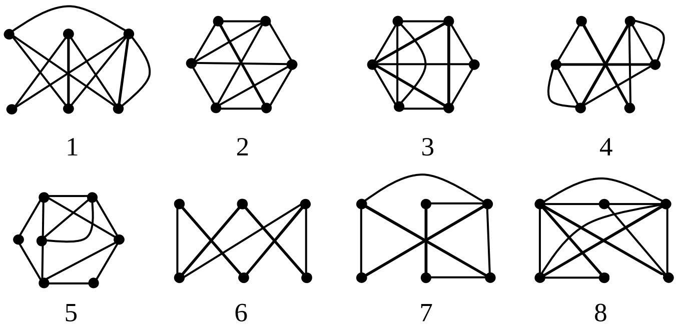

Рис. 13

Решение. В графе 1 четыре нечетные вершины, следовательно, он не является эйлеровым и не является полуэйлеровым. В графе 2 две нечетные вершины. Это полуэйлеров граф. Третий граф содержит две нечетные вершины: степень одной из них равна 3, другой — 5. Граф является полуэйлеровым. В четвертом графе все вершины являются четными, следовательно, это эйлеров граф. В графе 5 также нет нечетных вершин, поэтому граф 5 является эйлеровым. Граф 6 — полуэйлеров, так как в нем только две нечетные вершины. Две нечетные вершины содержится и в графе 7. Следовательно, граф 7 — полуэйлеров. В графе 8 четыре нечетные вершины. Этот граф не относится ни к эйлеровым, ни к полуэйлеровым.

Ответ:

Номера эйлеровых графов: 4, 5;

Номера полуэйлеровых графов: 2, 3, 6, 7.

3 Задачи из письменной контрольной работы. Тема 10: «Нахождение простых цепей в графе»

3.1 Содержание работы

Задача по теории графов, входящая во вторую контрольную работу, состоит из трех пунктов.

По первому из них требуется найти все простые цепи, соединяющие две заданные вершины неориентированного графа. В разных вариантах контрольной работы заданными могут быть различные вершины, например 1 и 6 либо 2 и 4 и т.д. В данном же случае для определенности заданными будем считать вершины 1 и 5. Тогда тему контрольной работы можно сформулировать следующим образом: найти все простые цепи, соединяющие вершины 1 и 5 неориентированного графа, заданного множеством ребер:

$$G = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\},$$
$$\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}.$$

Для решения задачи сначала следует построить граф. Для этого в выражении G имеется полная информация. Из записи G видно, что в графе пять вершин:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

где V — множество вершин графа.

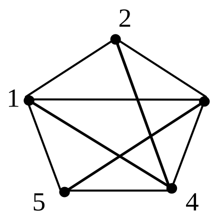

Рис. 14

Элементами множества G являются ребра графа, заданные подмножествами множества V, содержащими по два элемента. Например, первое подмножество имеет вид $\{1,2\}$. Эта запись обозначает: вершины 1 и 2 соединены ребром. Точно так же интерпретируются все остальные элементы множества G.

Граф изображен на рис. 14.

По второму пункту задачи для того же неориентированного графа требуется найти все простые циклы, которые начинаются в вершине 1 и в ней же оканчиваются.

По третьему пункту задача формулируется как и первая, но при условии, что граф является ориентированным (орграфом), т.е. теперь надо считать, что в множестве G перечислены не ребра графа, а дуги, где первая цифра — начало дуги. Например, запись {1,2} обозначает: дуга соединяет вершины 1 и 2, при этом стрелка направлена от вершины 1 к вершине 2.

В следующих трех подразделах приведены образцы решения всех трех пунктов задачи о поиске всех простых цепей.

3.2 Простые цепи в неориентированном графе

Применение алгоритма нахождения всех простых цепей, соединяющих две заданные вершины графа, проиллюстрируем на примере графа, изображенного на рис. 14. При этом будем полагать, что заданными являются вершины 1 и 5 и что начальной является вершина 1, а конечной — вершина 5. В общем же случае, так как граф является неориентированным, начальной можно объявить и пятую вершину, а конечной — первую. Результаты от этого не изменятся.

• На первом этапе найдем все варианты выхода из первой вершины, т.е. найдем все простые цепи, выходящие из вершины 1 и содержащие точно по одному ребру:

1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 1 – 5.

Одна простая цепь, соединяющая вершины 1 и 5, найдена (она подчеркнута).

• На втором этапе найдем все простые цепи, содержащие точно по два ребра и выходящие из вершины 1. Для этого воспользуемся результатами предыдущего этапа:

1 – 2 – 3,	1 – 3 – 2,	1 – 4 – 2,
1 – 2 – 4,	1 – 3 – 4,	1 – 4 – 3,
	1 – 3 – 5,	1 – 4 – 5.

Получены еще две искомые цепи (подчеркнуты).

• На третьем этапе находим все простые цепи, ведущие из вершины 1 и содержащие точно по три ребра. Для этого воспользуемся результатами второго этапа:

1 – 2 – 3 – 4,	1 – 3 – 2 – 4,	1 – 4 – 2 – 3,
1 – 2 – 3 – 5,	1 – 3 – 4 – 2,	1 – 4 – 3 – 2,
1 – 2 – 4 – 3,	1 – 3 – 4 – 5,	1 – 4 – 3 – 5,
1 – 2 – 4 – 5.		

На третьем этапе получено еще четыре искомых цепи. Все они подчеркнуты.

• Четвертый этап в случае данного графа является последним:

1 – 2 – 3 – 4 – 5,	1 – 3 – 2 – 4 – 5,	1 – 4 – 2 – 3 – 5,
1 – 2 – 4 – 3 – 5,	1 – 3 – 4 – 2 – ?	1 – 4 – 3 – 2 – ?

На последнем этапе получено четыре простые цепи из искомых. Это самые длинные простые цепи. Они проходят через все вершины графа.

Две последние цепи оканчиваются вопросительным знаком. Это значит, что они являются тупиковыми, так как любое движение из вершины 2 приводит к повтору номеров вершин, в результате чего появляется цикл. Все подобные цепи удаляем.

3.3 Простые циклы в неориентированном графе

Эта задача решается точно так же, как и предыдущая. Решение ее проиллюстрируем на примере графа, изображенного на рис. 14.

На первом этапе найдем все простые цепи, выходящие из вершины 1 и содержащие точно по одному ребру:

1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 1 – 5.

На втором этапе найдем все простые цепи, выходящие из вершины 1 и содержащие точно по два ребра:

1 – 2 – 1,	1 – 3 – 1,	1 – 4 – 1,	1 – 5 – 1,
1 – 2 – 3,	1 – 3 – 2,	1 – 4 – 2,	1 – 5 – 3,
1 – 2 – 4,	1 – 3 – 4,	1 – 4 – 3,	1 – 5 – 4,
	1 – 3 – 5,	1 – 4 – 5.	

Найдено четыре простых цикла, правда, содержащих по два ребра (подчеркнуты). Но формально и они удовлетворяют определению простого цикла: если в простой цепи при вершинном ее представлении (т.е. в виде последовательности номеров вершин) первая и последняя вершины совпадают, то цепь называется простым циклом.

Третий этап:

1 – 2 – 3 – 1, 1 – 3 – 2 – 1, 1 – 4 – 2 – 1, 1 – 5 – 3 – 1,
1 – 2 – 3 – 4, 1 – 3 – 2 – 4, 1 – 4 – 2 – 3, 1 – 5 – 3 – 2,
1 – 2 – 3 – 5, 1 – 3 – 4 – 1, 1 – 4 – 3 – 1, 1 – 5 – 3 – 4,
1 – 2 – 4 – 1, 1 – 3 – 4 – 2, 1 – 4 – 3 – 2, 1 – 5 – 4 – 1,
1 – 2 – 4 – 3, 1 – 3 – 4 – 5, 1 – 4 – 3 – 5, 1 – 5 – 4 – 2,
1 – 2 – 4 – 5, 1 – 3 – 5 – 1, 1 – 4 – 5 – 1, 1 – 5 – 4 – 3,
1 – 3 – 5 – 4, 1 – 4 – 5 – 3.

На третьем этапе получено десять искомых простых циклов, содержащих по три ребра.

Четвертый этап дает 16 новых простых циклов:

1 – 2 – 3 – 4 – 1, 1 – 3 – 2 – 4 – 1, 1 – 4 – 2 – 3 – 1,
1 – 2 – 3 – 4 – 5, 1 – 3 – 2 – 4 – 5, 1 – 4 – 2 – 3 – 5,
1 – 2 – 3 – 5 – 1, 1 – 3 – 4 – 2 – 1, 1 – 4 – 3 – 2 – 1,
1 – 2 – 3 – 5 – 4, 1 – 3 – 4 – 5 – 1, 1 – 4 – 3 – 5 – 1,
1 – 2 – 4 – 3 – 1, 1 – 3 – 5 – 4 – 1, 1 – 4 – 5 – 3 – 1,
1 – 2 – 4 – 3 – 5, 1 – 3 – 5 – 4 – 2, 1 – 4 – 5 – 3 – 2,
1 – 2 – 4 – 5 – 1, 1 – 5 – 3 – 2 – 1, 1 – 5 – 4 – 2 – 1,
1 – 2 – 4 – 5 – 3, 1 – 5 – 3 – 2 – 4, 1 – 5 – 4 – 2 – 3,
1 – 5 – 3 – 4 – 1, 1 – 5 – 4 – 3 – 1,
1 – 5 – 3 – 4 – 2, 1 – 5 – 4 – 3 – 2.

На заключительном (пятом) этапе получаем еще двенадцать простых циклов. Особенность этих двенадцати циклов в том, что они проходят через все вершины графа:

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 1, 1 – 3 – 2 – 4 – 5 – 1,
1 – 2 – 3 – 5 – 4 – 1, 1 – 3 – 5 – 4 – 2 – 1,
1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 1, 1 – 4 – 5 – 3 – 2 – 1,
1 – 2 – 4 – 5 – 3 – 1, 1 – 5 – 4 – 2 – 3 – 1,
1 – 4 – 2 – 3 – 5 – 1, 1 – 5 – 4 – 3 – 2 – 1.
1 – 5 – 3 – 2 – 4 – 1,
1 – 5 – 3 – 4 – 2 – 1,

Таким образом, всего в графе, приведенном на рис. 1, существует 42 простых цикла, начинающихся и оканчивающихся в вершине 1. Из них 4 цикла содержат по два ребра (например, 1 – 2 – 1), 10 циклов – по три ребра (например, 1 – 2 – 3 – 1), 16 циклов — по четыре ребра (например, 1 – 2 – 3 – 4 – 1) и 12 циклов — по пять ребер (например, 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 1).

3.4 Простые цепи в ориентированном графе

В двух предыдущих случаях заданный граф считался неориентированным. Теперь же будем считать, что он является ориентированным и что каждая пара номеров вершин обозначает не ребро, а дугу. При этом первая цифра в обозначении дуги является ее началам, а вторая — концом.

Чтобы записать аналитическое выражение ориентированного графа, вместо фигурных скобок, где указаны пары вершин, следует поставить круглые скобки для обозначения того, что записанные в них пары чисел являются упорядоченными. Например:

$$G = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), \\ (2,3), (2,4), (3,4), (3,5), (4,5)\}.$$

Построим для этого выражения граф (рис. 15). Согласно записи (1,2) проводим дугу от вершины 1 к вершине 2. Согласно паре (1,3) проводим дугу от вершины 1 к вершине 3 и т.д.

В соответствии с заданием найдем все простые цепи, соединяющие вершины 1 и 5 этого орграфа. При их отыскании действуем точно так же, как и в случае первой задачи, но с учетом ориентации дуг.

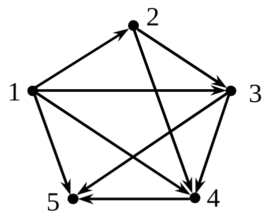

Рис. 15

Первый этап. Из вершины 1 выходит четыре дуги

1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, <u>1 – 5</u>.

Последняя из этих однореберных цепей оканчивается цифрой 5. Следовательно, одна из искомых простая цепь получена (подчеркнута).

Второй этап. Находим все простые цепи, выходящие из вершины 1 и состоящие из двух дуг:

1 – 2 – 3,   1 – 3 – 4,   <u>1 – 4 – 5</u>,
1 – 2 – 4,   <u>1 – 3 – 5</u>.

Получены еще две искомые цепи (обе подчеркнуты).

Третий этап:

1 – 2 – 3 – 4,   <u>1 – 3 – 4 – 5</u>,   <u>1 – 2 – 4 – 5</u>,
<u>1 – 2 – 3 – 5</u>.

На четвертом (заключительном) этапе получаем только одну простую цепь. Она проходит через все вершины данного ориентированного графа:

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5.$$

Таким образом, всего в ориентированном графе, изображенном на рис. 15, содержится 7 простых цепей, ведущих от вершины 1 к вершине 5. Среди них одна цепь состоит из одной дуги, две цепи состоят из двух дуг, три — из трех, и одна цепь содержит четыре дуги.

Завершим подраздел следующим замечанием. Если в неориентированном графе при поиске всех простых цепей, соединяющих вершину a с вершиной b, начальной можно считать любую из них, то в случае ориентированного графа такой свободы нет. Например, из рис. 15 видно, что не существует ни одной простой цепи, ведущей от вершины 5 к вершине 1, но существует 7 вершин, которые ведут от первой вершины к пятой.

3.5 Оформление решения задачи

В выполненной контрольной работе решение задачи на тему «Нахождение простых цепей в графе» должно быть представлено тремя пунктами со следующими сведениями.

Поиск простых цепей:

а) полное условие задачи, как оно сформулировано в задании;

б) рисунок графа;

в) перечни всех простых цепей по каждому этапу;

г) общее число найденных простых цепей.

Поиск простых циклов:

а) полное условие задачи;

б) перечни всех простых цепей по каждому этапу;

в) общее число найденных простых цепей.

Поиск простых цепей в орграфе:

а) полное условие задачи, как оно сформулировано в задании;

б) рисунок ориентированного графа;

в) перечни всех простых цепей по каждому этапу;

г) общее число найденных простых цепей.

ЧАСТЬ 6
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

1 Интуитивное понятие алгоритма

1.1 Определения понятия алгоритма

Понятие алгоритма является и очень простым, и одновременно очень сложным. Простота обусловлена его повсеместным распространением, особенно в среде специалистов, которым приходится заниматься различными вычислениями, осуществляемыми вручную или с помощью компьютеров. Сложность же заключается в том, что всякие попытки дать ему точное определение наталкиваются на непреодолимые трудности. В связи с этим существует много различных формулировок понятия алгоритма. Все они интуитивно ясны, т.е. не требуют дополнительных разъяснений, но не являются математически строгими. Например, Д.П. Горский под алгоритмом понимает конечный набор правил, при помощи которых можно чисто механически решать любую конкретную задачу из некоторого их класса.

В повседневной практике обычно вполне достаточно интуитивно ясного представления о том, что такое алгоритм. Например, школьники начальных классов, не имея вообще никакого представления об алгоритмах, успешно осваивают правила выполнения арифметических действий. Эти правила в виде небольшого набора инструкций (отдельно для сложения чисел, отдельно для умножения и др.) применимы к любым числам, т.е. обладают массовостью. В данном разделе рассмотрим несколько алгоритмов, понимаемых в интуитивном смысле.

1.2 Алгоритм нахождения наибольшего общего делителя

Одна из наиболее ранних разработок в области построения алгоритмов относится к задаче нахождения наибольшего общего делителя двух заданных положительных целых чисел. Например, числа 16 и 12 делятся на 1, на 2 и на 4. Из этих делителей число 4 является наибольшим. Следовательно, число 4 и есть наибольший общий делитель чисел 16 и 12.

Алгоритм нахождения наибольшего общего делителя, автором которого считают древнегреческого (III век до новой эры) математика Евклида, состоит в следующем.

Обозначим буквами a и b два целых положительных числа. Пусть $a \geq b$. Тогда:

1) число a делим на число b. Получится остаток c. Если остаток равен нулю, то число b есть искомый результат, и на этом работа алгоритма заканчивается. Если же $c \neq 0$, то переходим ко второму этапу;

2) число b делим на число c. Получится остаток d. Если $d = 0$, то работа алгоритма заканчивается, и искомым является число c. Если же $d \neq 0$, то переходим к третьему этапу;

3) число c делим на число d. Получится остаток e. Если $e = 0$, то искомым является число d, и т.д.

Очевидно, что при любых a и b после конечного числа шагов наибольший общий делитель будет найден.

1.3 Пример логической задачи

Пусть даны два сосуда a и b. В сосуд a входит точно пять литров воды, а в сосуд b — точно три литра. Требуется выполнить такие действия, в результате которых в пятилитровом сосуде оказалось бы четыре литра воды. Пользоваться какими-либо другими сосудами запрещается.

Один из алгоритмов решения этой задачи состоит в следующей последовательности действий:

1) полагаем, что в исходном состоянии сосуды пусты. Наливаем в сосуд a пять литров. Состояния сосудов: 5-0 (эта запись обозначает: в сосуде a содержится пять литров, а сосуд b пуст);

2) из сосуда a переливаем в сосуд b три литра. Состояния сосудов: 2-3, т.е. в сосуде a осталось два литра, а в сосуде b находится три литра;

3) из сосуда b выливаем воду. Состояния сосудов: 2-0;

4) из сосуда a переливаем воду в сосуд b. Состояния: 0-2;

5) наполняем сосуд *a*. Состояния: 5-2;

6) в сосуд *b* доливаем воду из сосуда *a*. В сосуде *a* останется 4 литра. Алгоритмический процесс на этом заканчивается.

1.4 Общие свойства алгоритмов

Любые алгоритмы, независимо от того, понимаются они в интуитивном смысле или математически точном, характеризуются следующими свойствами:

1) наличие исходных данных. Всякий алгоритмический процесс возможен только при наличии исходных данных. Эти исходные данные перерабатываются алгоритмом в соответствующий результат;

2) дискретность алгоритма. Это значит, что всякий алгоритм состоит из последовательности строго различимых действий (шагов);

3) детерминированность алгоритма. Детерминизм — (лат. determinare — определять) — учение о всеобщей причинной обусловленности, закономерной связи всех явлений в природе, обществе и мышлении. Это определение полностью характеризует одно из главных свойств всякого алгоритма, заключающееся в том, что после выполнения каждого его этапа следующее действие определяется строго однозначно. Другими словами: любой исполнитель, совершающий действия в соответствии с указаниями алгоритма, при одних и тех же исходных данных всегда будет получать один и тот же результат;

4) определенность алгоритма. Все указания, определяющие действия каждого шага алгоритма должны быть настолько ясными и понятными для исполнителя, что ему не оставалось бы совершенно никаких возможностей различно толковать пути решения задачи. Это требование является обязательным для любого алгоритма.

5) результативность алгоритма. Суть этого свойства в том, что после выполнения определенного (конечного) числа элементарных операций, предписываемых алгоритмом, будет найден искомый результат. Все безрезультатно обрывающиеся алгоритмические процессы, а также уходящие в бесконечность, ни-

какого интереса не представляют, ни практического, ни теоретического;

6) массовость алгоритма. Под этим понимается возможность применения алгоритма ко многим исходным данным. В предыдущих подразделах показано, что в одних случаях множество исходных данных может быть бесконечным, как в алгоритме Евклида, в других же случаях определение множества исходных данных связано с определенными трудностями. Например, в задаче о сосудах кажется, что приведенный алгоритм применим только к одному варианту исходных данных. На самом же деле исходные данные могут быть и другими. Например, один сосуд может быть 10-литровым, а другой — шестилитровым. Если требуется отмерить 8 литров, то можно действовать по тому же алгоритму, что и в случае 5-литрового и 3-литрового сосудов. Разумеется, существуют задачи, когда можно считать, что множество исходных данных есть синглетон. В качестве примера приведем следующую задачу.

«Дано 6 спичек. Требуется построить из них четыре равносторонних треугольника. Длина стороны каждого треугольника равна длине спички. Ломать (а также расщеплять) спички не разрешается».

Алгоритм решения этой задачи состоит в выполнении следующих действий. Сначала строится треугольник на плоскости, на что потребуется три спички. Затем в каждую вершину треугольника ставится по одной из оставшихся трёх спичек, а другие их концы соединяются вместе. Получится объёмная фигура — тетраэдр, у которого каждая грань является правильным треугольником. Всего у тетраэдра четыре грани, следовательно, задача решена: шестью спичками построено четыре равносторонних треугольника.

Если считать, что длина спичек не имеет значения, то для решения данной задачи существует единственный вариант исходных данных — 6 спичек. Но тетраэдр можно построить из шести других одинаковых отрезков, отличающихся по длине от спичек. В этом случае можно считать, что алгоритм применим не только к спичкам, но и вообще к одинаковым отрезкам любой длины и что множество исходных данных является бесконечным.

Приведенные примеры показывают, что многие практически встречающиеся задачи могут быть решены только на основе интуитивного представления о том, что алгоритм — это общий способ решения некоторой задачи при различных исходных данных.

2 Уточнения понятия алгоритма

2.1 Необходимость уточнения понятия алгоритма

Существуют задачи, для решения которых не удается найти алгоритмы их решения. Возникают вопросы: почему не удается? Потому, что задача является слишком сложной и алгоритм будет найден, но позже, другими, более настойчивыми исследователями? А может задачу никому не удастся решить по той причине, что алгоритм ее решения вообще отсутствует? Если алгоритм решения данной задачи не существует, то как это доказать?

Чтобы ответить на эти и им подобные вопросы, необходимо дать более точный ответ на вопрос: что такое алгоритм? Поэтому многие специалисты предпринимали попытки дать понятию алгоритма точное определение. Эта задача в 20-х годах была одной из центральных математических проблем. Усилиями таких исследователей, как Д. Гильберт, К. Гёдель, А.Чёрч, Э. Пост, А. Тьюринг, А.А. Марков и др., было предложено несколько точных определений понятия алгоритма, однако полностью эта работа не завершена до сих пор и исследования в этой области продолжаются.

С того времени было изучено немало подходов, в рамках которых понятие алгоритма определялось гораздо точнее по сравнению с интуитивными представлениями. Основными из них являются следующие подходы, известные под названиями:

1) рекурсивные функции;
2) нормальные алгоритмы Маркова;
3) машины Тьюринга-Поста.

В данном пособии ограничимся иллюстрацией только одного из подходов к уточнению понятия алгоритма (на примере машины Тьюринга-Поста).

2.2 Машины Тьюринга-Поста

Тьюринг Алан Мэтисон (1912–1954) в 1937 г. в «Трудах Лондонского математического общества» опубликовал работу, где высказал идею, что алгоритмические процессы — это такие процессы, которые могут быть реализованы механически, при помощи определенным образом сконструированной машины.

Немного раньше, в октябре 1936 г., совершенно независимо от Тьюринга, подобную же идею опубликовал американский математик Эмиль Л. Пост в статье «Финитные комбинаторные процессы, формулировка 1». Обе идеи были настолько похожи одна на другую, что редакция журнала к статье Поста сделала примечание: «Читателю рекомендуется сравнить статью А.М. Тьюринга ″О вычислимых числах″, долженствующую появиться вскоре в ″Трудах Лондонского математического общества″».

Следует отметить, что термин «машина» применяет только Тьюринг, в статье Поста этот термин не используется. Возможно поэтому в литературе по теории алгоритмов в основном ссылаются на Тьюринга, а статья Поста долгое время в публикациях не упоминалась, хотя построения Поста гораздо проще машины Тьюринга, а элементарность шагов у Поста доведена до теоретического предела. Изложение идей Поста в виде машины было представлено В.А. Успенским. В связи с этим идеи Поста будем интерпретировать, подобно Тьюрингу, в виде машины.

Машина Тьюринга крайне проста. Её основу составляет узкая лента неограниченной длины в обе стороны. Лента разделена на одинаковые ячейки, например квадраты. Каждая ячейка предназначена для записи в неё только одного знака, т.е. буквы из некоторого алфавита, содержащего любое число букв, а в пределе состоящего из двух знаков — пустого и какой-либо метки, например знака $\vee$, применяемого В.А. Успенским.

Лента — это внешняя память машины. Кроме неё, в структуру машины входит логический блок, представляющий собой управляющее устройство, содержащее внутреннюю память, которую можно представить как множество двоичных регистров для хранения букв внутреннего алфавита. Главное назначение логического блока — управление работой всей машины.

Кроме ленты и управляющего устройства в конструкцию машины входит подвижная каретка. На ней размещена считывающая головка, которая в каждый момент времени обозревает только одну ячейку. Считывающая головка может:

1) перейти на одну ячейку влево (благодаря подвижной каретке);

2) перейти на одну ячейку вправо;

3) записать в обозреваемую ячейку одну букву из алфавита, если она пуста, или стереть записанный в ячейке знак;

4) остановить работу.

Объединяет перечисленные составляющие механическое устройство, передвигающее каретку и записывающее буквы на ленту в зависимости от состояния внутренней памяти машины и считываемого с ленты знака. Механическое устройство может перемещать каретку относительно ленты либо ленту относительно головки. Принципиальной разницы в этом нет. И всё же для определённости условимся считать, что механический блок перемещает каретку относительно неподвижной ленты.

2.3 Программирование машины Поста

Существуют многочисленные варианты построения машины Тьюринга. Проиллюстрируем один из них на простейшем примере машины в понимании В.А. Успенского.

Чтобы составить какую-либо программу для любой машины, необходимо, прежде всего, располагать системой команд. Согласно В.А. Успенскому в соответствии с идеями Поста число команд равно 6. Это теоретический предел. Перечислим их:

$a. \rightarrow b$ — команда имеет номер a. Стрелка обозначает сдвиг каретки вправо на одну клетку. Буква b — это номер команды, к которой должно перейти управляющее устройство, после того как будет выполнена команда с номером a;

$a. \leftarrow b$ — то же самое, но каретка сдвигается влево на одну ячейку и машина переходит к выполнению команды b;

$a. \vee b$ — обозначает запись в клетку ленты непустого знака (или метки, согласно терминологии В.А. Успенского);

a. ε b — команда стирания знака, записанного в обозреваемой ячейке ленты;

$a. \begin{smallmatrix} \nearrow b_1. \\ \searrow b_2. \end{smallmatrix}$ — команда условного перехода (передачи управления). Обозначает переход к команде b_1, если обозреваемая ячейка пуста, и переход к команде b_2, если в обозреваемой ячейке записана метка;

a. Стоп — команда остановки.

Эти шесть команд образуют функционально полный набор, обеспечивающий построение любых программ для машины Поста. Применение перечисленных команд для реализации алгоритма проиллюстрируем на простейшем примере задачи прибавления единицы к некоторому числу a.

Пусть каретка стоит против пустой клетки, а справа от нее на расстоянии конечного числа пустых ячеек записано число a, представленное в унарном коде, т.е. в виде конечной последовательности подряд идущих меток: $\vee\vee\vee\ldots\vee$, между которыми пустых клеток нет. Например, число 0 можно закодировать одной меткой, число 1 — двумя метками, число 2 — тремя и т.д. Требуется составить программу так, чтобы меток оказалось на единицу больше, причем метку необходимо поставить в конце унарного кода.

Программа имеет вид:

1. $\rightarrow$ 2. Так как каретка стоит против пустой клетки, то проверять, есть ли в ней метка, нет необходимости. Можно сразу дать команду на перемещение каретки вправо с требованием перейти после этого к выполнению команды с номером 2.

2. $\begin{smallmatrix} \nearrow 1 \\ \searrow 3 \end{smallmatrix}$ Соседняя ячейка может оказаться занятой меткой. Поэтому необходима проверка. Если метки нет, то надо повторить первую команду. А при наличии метки необходимо перейти к выполнению третьей команды.

3. $\rightarrow$ 4. Каретка стоит против ячейки с меткой. Длина числа a неизвестна, но содержит не менее одной метки. Поэтому третьей командой осуществляется сдвиг каретки в правую ячейку и переход к выполнению команды 4.

4. $\begin{matrix}\nearrow 5 \\ \searrow 3\end{matrix}$ Проверка условия: если метка есть, то повторить команду 3. Если метки нет, выполнить команду 5.

5. $\vee$ 6. Так как это первая после ряда меток пустая ячейка, то в неё необходимо записать метку и перейти к команде 6.

6. Стоп. Этой командой работа алгоритма завершена.

В чём же состоит смысл уточнения понятия алгоритмического процесса с привлечением машин Тьюринга и Поста? В том, что реализация алгоритмического процесса при помощи машин осуществляется полностью механически, где нет места неоднозначности толкования ни одного действия, где не требуется подвергать смысловому анализу ни исходные данные, ни последовательность выполнения операций, ни результат переработки исходных данных. Иными словами, алгоритм — это всё то, что может быть реализовано в виде программы на машине Тьюринга или Поста.

2.4 Об алгоритмически неразрешимых проблемах

Существует ряд задач, которые длительное время не поддавались решению. Примерами могут служить задачи о квадратуре круга и трисекции угла, а также задача удвоения куба. Формулируются они следующим образом:

1. В задаче о квадратуре круга требуется найти алгоритм построения квадрата, равновеликого данному кругу. Иными словами: дан круг определенного радиуса. Требуется построить квадрат, площадь которого равнялась бы площади круга. При этом разрешается пользоваться только циркулем и линейкой, причем линейка может использоваться лишь для проведения прямых, соединяющих те или иные две точки. Предполагается, что на самой линейке нет никаких делений, и запрещается наносить на нее какие-либо точки, штрихи, значки и др. Эта задача является массовой, поскольку заданный круг может быть любого радиуса. Существует строгое доказательство, что задача о квадратуре круга является алгоритмически неразрешимой.

2. Согласно условию задачи трисекции угла требуется разделить заданный угол на три равные части. При этом, как и в предыдущем случае, пользоваться можно только циркулем и линейкой. Очевидно, что задача трисекции угла также является

массовой, так как угол, который требуется разделить на три равные части, может быть любым. И для этой задачи существует строгое доказательство ее алгоритмической неразрешимости.

3. Задача удвоения куба формулируется следующим образом. Дан куб *A*, длина ребра которого равна *a*. Требуется найти длину ребра куба *B*, объем которого в два раза больше объёма заданного куба *A*. При нахождении длины ребра куба *B* разрешается пользоваться только циркулем и линейкой, как и в задаче о квадратуре круга. Задача удвоения куба является массовой, так как длина ребра заданного куба *A* может быть любой. Эта задача также является алгоритмически неразрешимой.

Заметим, что эти задачи алгоритмически неразрешимы только при заданных ограничениях относительно используемых операций. Если же снять ограничения, т.е. расширить набор разрешенных операций, то некоторые неразрешимые задачи могут оказаться разрешимыми. Например, Архимед дал решение задачи трисекции угла, добавив в набор допустимых операций следующие две:

1) разрешается наносить на линейку пары точек, являющихся копиями соответствующих точек на чертеже, и переносить эти точки снова на бумагу;

2) линейку можно применять не только для проведения отрезков. Разрешается так перемещать линейку, что одна из заранее поставленных на ней точек скользит по окружности, а другая — по какой-либо прямой.

Если же требуется построить несуществующий объект, то не помогут никакие расширения допустимых операций.

Завершим подраздел следующим замечанием. Теория алгоритмов призвана освещать не столько прикладные вопросы, сколько общетеоретические. Для лиц, занимающихся решением прикладных задач, вполне достаточно интуитивного представления об алгоритмах, и математическая теория алгоритмов представляет для них интерес лишь с позиций кругозора. Но при более глубоком её изучении, особенно вопросов, связанных со сложностью алгоритмических задач, теория алгоритмов может явиться хорошим подспорьем в становлении профессионального программиста.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Дискретная математика отличается большим разнообразием тем и направлений развития и соответственно характеризуется обширным понятийным аппаратом. Данный курс состоит только из пяти тем, но так как в каждой теме насчитывается большое число понятий, то и список контрольных материалов содержит довольно много вопросов — 186. По содержанию все эти вопросы отражают большинство понятий теоретической части, предусмотренной учебной программой по дискретной математике.

В нижеприведенном списке после формулировок вопросов в круглых скобках указаны числа. Это номера страниц из учебного пособия «Основы дискретной математики» [3], где можно найти все необходимые сведения для правильного ответа на каждый из 186 вопросов.

Теория множеств

1. Как обозначаются множества? (12)
2. Записать с применением знака принадлежности элемента множеству: «Элемент t принадлежит множеству P». (12)
3. Что такое синглетон? (12)
4. Как читается запись: $a, t, m \in P$? (12)
5. Как обозначается пустое множество? (12)
6. Как читается запись:

$$P = \{x \mid 0 \le x < 10 \wedge x \text{ — целое число}\}? \ (13)$$

7. Какие множества называются равными? Пример. (13)
8. Что такое мощность множества? Пример. (13)
9. Что такое кардинальное число множества? Поясните примерами. (14)
10. Как формулируется интуитивный принцип объемности в теории множеств? (13)
11. Какие множества называются эквивалентными? Поясните примерами. (14)
12. Чем по смыслу отличаются записи:

$$m \in P \quad \text{и} \quad m \subset P? \ (16)$$

13. Что такое булеан множества? Приведите пример. (14)

14. Что такое объединение множеств, пересечение множеств? Поясните примерами. (17, 18)

15. Какое множество называют универсальным? (18)

16. Что такое дополнение множества? Пример. (18)

17. Что такое разность множеств, симметрическая разность множеств? (20)

18. Что такое диаграмма Венна? Приведите пример диаграммы. (21–22)

19. Что такое декартово произведение множеств? Поясните примером. (26)

20.Что такое бинарное отношение? Пример. (27)

21. Что такое степень множества? Пример. (28)

22. Что такое кортеж в теории бинарных отношений? Приведите пример. (28)

23. Что такое квадрат множества? Пример. (28)

24. Что такое антисимметричность? Пример. (29)

25. Какое отношение называется транзитивным? Приведите пример. (29)

26. Что такое рефлексивность в теории бинарных отношений? Поясните примером. (30)

27. Какое отношение называют отношением эквивалентности? Поясните примером. (30)

28. Чем отличается отношение строгого порядка от отношения нестрогого порядка? Пример. (31)

29. Назовите четыре вида соответствий. (32, 33)

30. Какие отношения называются функциональными? Приведите пример. (33)

31. Что такое биекция, сюръекция? Примеры. (32, 34)

Математическая логика

1. Что такое формальная логика? (36)

2. В чем суть понятия «классическая логика»? (37)

3. Чем отличается классическая логика от неклассической? (37)

4. Что такое понятие (40), суждение (41), умозаключение (51)? Поясните примерами.

5. Что называется логическими действиями? (38)

6. Назовите основные приемы познавательной деятельности. (39, 40)

7. Что такое закон обратного отношения в традиционной логике? (41)

8. Что такое категория в традиционной логике? (41)

9. Что такое дефиниция в традиционной логике? (40)

10. Назовите виды категорических суждений. (43, 44)

11. Что такое контрарность? (48)

12. Что такое контрадикторность? (49)

13. Что такое умозаключение? Пример. (51)

14. Назовите два основных вида умозаключений. (52)

15. Что такое категорический силлогизм? Пример. (53)

16. Что такое аксиома категорического силлогизма? Поясните на примере. (54)

17. Что такое меньший, больший и средний термины в категорическом силлогизме? Пример. (54)

18. Что такое модус категорического силлогизма? Поясните примером. (55)

19. Что такое фигура силлогизма? Пример. (56)

20. Перечислите логические законы и охарактеризуйте каждый из них. (57, 58)

21. Что такое логическая константа? (61)

22. Перечислите аксиомы, определяющие дизъюнкцию, конъюнкцию и инверсию. (62, 63)

23. Что такое терм? Пример. (64)

24. Что называется набором значений переменных? Поясните примером. (65)

25. Что такое тавтология? Пример. (65)

26. Какие формулы в алгебре логики называют общезначимыми? Пример. (65)

27. В чем суть свойства двойственности в алгебре логики? Поясните примером. (68)

28. Перечислите девять теорем одной переменной. (68)

29. Что такое ДНФ? Пример. (69)

30. Что такое КНФ? Пример. (69)

31. Как записываются теоремы поглощения и склеивания для ДНФ и КНФ? (70)

32. Как формулируются теоремы де Моргана? (70)

33. Какая функция называется остаточной? (72)

34. Какую таблицу в булевой алгебре называют таблицей истинности (соответствия)? Пример. (72)

35. Что такое минтерм? Пример. (74)

36. Что такое СДНФ? Пример. (74)

37. Какие булевы функции называют ортогональными? Пояснить примером. (76)

38. По какому признаку определяется сложность булевой формулы? Пояснить примером. (77)

39. В чем суть минимизации булевой формулы? Пояснить примером. (77)

40. Какие аргументы булевой функции называют фиктивными? (78)

41. Что такое импликанта булевой функции? Пояснить примером. (78)

42. Что такое простая импликанта булевой функции? Пояснить примером. (80)

43. Какая форма булевой функции называется сокращенной? Пример. (80)

44. Что такое макстерм? Пример. (86)

45. Что такое СКНФ? Пример. (86)

46. Что такое конституента единицы? Пример. (75)

47. Что такое конституента нуля? Пример. (86)

48. Какие функции называют неполностью определенными? Пример. (87)

49. Что значит доопределить функцию? Пример. (88)

50. Что такое симметрическая функция? Пример. (89)

51. Что такое a-число симметрической функции? (89)

52. В каких случаях симметрические функции поддаются минимизации в классе ДНФ? Пример. (90)

53. Какие логические операции применяются в алгебре Жегалкина? (90)

54. Приведите аксиомы операции «сумма по модулю 2» алгебры Жегалкина. (91)

55. В чем главное отличие сильной дизъюнкции от слабой? (63, 90)

56. Чем отличается операция «включающее ИЛИ» от операции « исключающее ИЛИ»? (63, 90)

57. Чем отличается альтернативная дизъюнкция от строгой дизъюнкции? (90)

58. В чем физический смысл производной от булевой функции? Пример. (95)

59. Как найти интеграл булевой функции табличным методом? (98)

60. Как найти интеграл булевой функции аналитическим методом? (99)

61. Что такое импликация? Пример. (100)

62. Что такое антецедент и консеквент? Пример. (100)

63. Приведите пример доказательства истинности силлогизма. (102)

64. Что такое многозначная логика? Пример. (103)

65. Приведите аксиомы дизъюнкции, конъюнкции и отрицания в логике Шестакова. (106, 107)

66. Что такое модальная логика? (110)

67. Что такое логика предикатов? Пример. (111)

68. Что такое свободная переменная в логике предикатов? Пример. (111)

69. Что такое квантор общности? Пример. (114)

70. Что такое квантор существования? Пример. (116)

71. Что такое обобщенная дизъюнкция? Пример (116)

72. Что такое обобщенная конъюнкция? Пример (115)

73. В чем суть аксиоматического метода? (121)

74. Что такое формальная теория? (122)

75. Чем отличается теорема от аксиомы? (122)

76. Что такое интерпретация в формальной системе? Пример. (124)

77. Что такое формализованный язык? (124)

Теория конечных автоматов

1. Что такое конечный автомат с технической точки зрения? (127)

2. Какие технические устройства называются контактными? Пример. (128)

3. Как построить контактную структуру на основе булевой функции? (131)

4. Какое техническое устройство называют элементом Шеффера? (137)

5. Какое техническое устройство называют элементом Пирса? (138)

6. Что такое суперпозиция и в чем ее физический смысл? Пояснить примером. (139)

7. Что такое двоичный регистр? (142)

8. Что такое автоматный базис? Пример. (146)

9. Перечислите пять замечательных классов булевых функций и приведите примеры. (147–149)

10. Как формулируется теорема Поста о функциональной полноте? Приведите пример функционально полной системы булевых функций. (149)

11. Какие булевы функции называют элементарными? Примеры. (150)

12. Какие булевы функции называют противоречием? Пример. (151)

13. Сколько существует минимальных функционально полных систем элементарных булевых функций? (154)

14. Какие автоматы называют однотактными и какие — многотактными? (154, 155)

15. Что такое вероятностный автомат? (155, 244)

16. Какие автоматы называют эквивалентными? Поясните примерами из комбинационных схем. (155)

17. Что такое *RS*-триггер? Изобразите его логическую схему. (156)

18. Что такое триггер типа *T*? Приведите его условное обозначение. (157–159)

19. В чем суть асинхронного принципа работы автомата. Пример. (159)

20. В чем суть синхронного принципа работы автомата. Пример. (159)

21. Что такое *JK*-триггер? Изобразите его логическую схему. (164)

22. В чем состоит главное отличие автомата Мили от автомата Мура? (169, 171)

23. Какой автомат называют инициальным? (173)

24. В чем суть тестирования автоматов? (174)

Комбинаторика

1. Что такое комбинаторная конфигурация? (176)

2. Что такое рекуррентное соотношение? Поясните примером. (177, 192)

3. Что такое факториал? (177)

4. Сформулируйте основное правило комбинаторики (правило произведения). Приведите пример. (178)

5. Как формулируется правило суммы в комбинаторике? Пример. (180)

6. В чем суть принципа включения-исключения? (181)

7. Запишите формулы для числа перестановок, размещений и сочетаний с повторениями и без повторений. Поясните их примерами. (183–192, 195)

8. Что такое минимальное покрытие множества? (198)

9. Что такое латинский прямоугольник? Пример. (199)

10. Какие латинские квадраты называют ортогональными? Пример. (200)

11. Что такое матрица Адамара? (203)

12. Что такое шифрование? Пример. (204)

Теория графов

1. Что такое подграф, надграф? Примеры. (208, 209)
2. Какой граф называют частичным? Пример. (209)
3. Какие вершины называют висячими? Пример. (210)
4. Что такое инцидентность? Пример. (209)
5. Приведите примеры однородных графов. (210)
6. Что такое полный граф? Пример. (210)
7. Что такое дополнение графа? Пример. (211)
8. Какие графы называют помеченными? (211)
9. Что такое матрица смежности? Пример. (214)
10. Что такое матрица инцидентности? Пример. (214)
11. Что такое степень связности графа? Пример. (217)
12. Какие вершины называют связными? Пример. (216)
13. Что такое эйлерова цепь? Пример. (221)
14. Что такое уникурсальная линия? (222)
15. Что такое обход графа? (222, 223)

16. Какие графы называют гамильтоновыми? (223)
17. Как формулируется задача о коммивояжере? (223)
18. Что такое двудольный граф, полный двудольный граф? Примеры. (225)
19. Какие графы называют плоскими? Пример. (225)
20. Какие графы называют планарными? Пример. 225)
21. Что такое грань графа? Пример. (226)
22. Что такое надразбиение ребра? Пример. (227)
23. Какие графы называют изоморфными? Пример. (211)
24. Какие графы называют гомеоморфными? (226)
25. В чем суть критерия Понтрягина-Куратовского (227)
26. Какие графы называют двойственными? Пример. (228)
27. Что такое остов графа? Пример. (229)
28. Какой граф называют лесом, деревом? Примеры. (228)
29. Как формулируется гипотеза четырех красок? (232)
30. Что такое хроматическое число графа? (231)
31. Какие графы называют ориентированными. (232)
32. Что такое основание орграфа? Пример. (233)
33. Какой граф называют смешанным? Пример. (233)
34. Что такое достижимость в орграфе? Пример. (234)
35. Какие графы называют сильно связными и какие — слабо связными? Примеры. (235)
36. Какие графы называют турнирами? Пример. (236)
37. Что такое трансверсаль? Пример. (236)

Элементы теории алгоритмов

1. Что такое алгоритм в интуитивном представлении?
2. Перечислите общие свойства алгоритмов.
3. Что такое машина Тьюринга-Поста?
4. Перечислите команды машины Поста.
5. Что такое алгоритмически неразрешимые проблемы. Пояснить примерами.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Шевелев Ю.П. Дискретная математика: Учеб. пособие. — СПб.: Лань, 2008. — 592 с.
2. Шевелев Ю.П. Математическая логика и теория алгоритмов. — Томск: Дельтаплан, 2007. — 219 с.
3. Шевелев Ю.П. Основы дискретной математики: Учеб. пособие. — Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2009. — 258 с.

Дополнительная:

1. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. — М.: Высшая школа, 1986. — 311 с.
2. Фор Р. и др. Современная математика. — М.: Мир, 1966. — 266 с.
3. Фудзисава Т., Касами Т. Математика для радиоинженеров.— М.: Радио и связь, 1984. — 240 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рабочая программа по дискретной математике

Специальность: 210405 «Радиосвязь, радиовещание и телевидение».

Факультет — радиотехнический (РТФ).

Профилирующая кафедра — ТОР.

Общая трудоемкость освоения курса — 85 часов.

Экзамен.

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Целью преподавания дисциплины «Дискретная математика» является изучение студентами основ математического аппарата, применяемого для решения задач управления и алгоритмизации процессов обработки информации. Задачей курса является ознакомление студентов с элементами теории множеств, логическими функциями, комбинаторикой, графами и конечными автоматами.

2 ПРОГРАММА КУРСА

2.1 Теория множеств

Множества, их элементы, подмножества, пустое множество, синглетон, универсальное множество, булеан множества, диаграммы Эйлера-Венна. Объединение, пересечение, дополнение, разность, симметрическая разность. Законы де Моргана. Декартово произведение множеств, степень множества. Понятия бинарного и n-арного отношений. Симметрия, транзитивность и рефлексивность отношений. Отношения соответствия, эквивалентности. Отображения.

2.2 Математическая логика

Традиционная логика. Понятие, суждение, категорические суждения, умозаключение. Логический квадрат. Модусы и фигуры силлогизма. Логические законы.

Понятия высказывания и двоичной переменной. Аксиомы булевой алгебры логики. Операции дизъюнкции, конъюнкции и инверсии. Язык алгебры логики. Теоремы одной переменной. Теоремы двух и большего числа переменных: поглощения, склеивания и де Моргана.

Булевы функции, способы их задания: аналитический, табличный, числовой, диаграммами Карно (Вейча). Эквивалентность формул. Принцип двойственности. Дизъюнктивные и конъюнктивные формы. Разложение булевых функций по переменным (теорема Шеннона). Метод Квайна. Понятия импликанты и простой импликанты. Неопределенные состояния. Минимизация булевых функций в классе ДНФ и КНФ с учетом неопределенных состояний. Симметрические булевы функции.

Понятие функциональной полноты системы функций. Пять замечательных классов булевых функций: функции, сохраняющие нуль; функции, сохраняющие единицу, монотонные функции; линейные функции; самодвойственные функции. Понятие суперпозиции. Функциональная замкнутость замечательных классов. Теорема Поста о функциональной полноте. Элементарные функции. Функционально полные системы элементарных функций.

Алгебра Жегалкина. Перевод полиномов Жегалкина в булеву алгебру, и наоборот. Карты Вейча в алгебре Жегалкина.

Булево дифференциальное исчисление: понятие производной булевой функции и ее физический смысл, производные первого порядка. Табличный и аналитический способы интегрирования булевых функций.

Логика предикатов. Кванторы общности и существования. Проблема разрешимости в логике предикатов. Интерпретации. Элементы теории моделей. Нечеткая и модальные логики. Многозначные логики. Критерий полноты в многозначной логике.

2.3 Теория конечных автоматов

Понятие конечного автомата. Контактные элементы. Синтез параллельно-последовательных структур.

Основные логические элементы. Элементы Пирса и Шеффера. Синтез комбинационных структур на примерах преобразователей кодов. Синтез сумматора.

Триггеры — запоминающие элементы. Триггеры типов *RS*, *T* и *JK*. Синхронные и асинхронные автоматы. Синтез синхронных многотактных автоматов. Примеры простейших автоматов: счетчики с произвольной последовательностью счета, распределители импульсов. Автоматы Мили и Мура. Эксперименты с автоматами, тестирование автоматов.

2.4 Комбинаторика

Понятие факториала. Правило суммы и произведения. Принцип включения-исключения. Диаграммы Эйлера-Венна. Комбинаторные конфигурации: перестановки, размещения и сочетания. Основные формулы для числа перестановок, сочетаний и размещений с повторениями и без повторений. Рекуррентные соотношения и производящие функции. Комбинаторные задачи: о покрытии множеств, о латинских прямоугольниках и квадратах. Комбинаторика в теории вероятностей. Непосредственный подсчет вероятностей с применением формул комбинаторики. Блок-схемы, конечные проективные плоскости. Матрицы Адамара. Модели шифросистем.

2.5 Элементы теории графов

Граф, подграф, надграф, частичный граф. Смежность, инцидентность, степень вершины. Однородный и полный графы, дополнение графа. Матрицы смежности и инциденций. Маршруты, цепи, циклы. Алгоритм поиска всех простых цепей в графе. Цикломатическое число графа. Связность графа. Эйлеровы графы, уникурсальная линия в графе. Гамильтоновы графы. Задача поиска гамильтонова цикла в графе. Деревья и леса. Кодирование деревьев методом Пруфера. Построение дерева по его коду. Хроматическое число графа. Двудольные графы. Полные двудольные графы. Изоморфизм. Планарные и плоские графы. Критерий Понтрягина—Куратовского. Понятие ориентированного графа (орграфа). Сильная связность в орграфах. Элементы теории трансверсалей. Метод нахождения всех трансверсалей. Задача о коммивояжере. Экстремальные и оптимизационные задачи. Анализ графа цепи Маркова. Транспортная сеть, нахождение ее максимальной пропускной способности. Перечисление графов.

2.6 Теория алгоритмов

Понятие алгоритма. Интуитивное определение понятия алгоритма. Способы задания алгоритмов. Свойства алгоритмов. Типы алгоритмов. Формализация понятия алгоритма. Машины Тьюринга-Поста. Программирование машины Тьюринга-Поста. Равносильность формализаций алгоритма. Алгоритмически разрешимые и неразрешимые проблемы.