Ж.А.ТӘШЕНЕВ АТЫНДАҒЫ УНИВЕРСИТЕТ

Авданов Нұрғазы Жубанұлы

«Мектеп геометриясында метрикалық қатыстарды оқып үйрену технологиясы»

ДИПЛОМ ЖҰМЫСЫ

6В01501 - «Математика мұғалімдерін даярлау» білім беру бағдарламасы бойынша

Шымкент, 2023

Ж.А.ТӘШЕНЕВ АТЫНДАҒЫ УНИВЕРСИТЕТ

«Қорғауға жіберілді»
«Математика және информатика»
кафедрасының меңгерушісі
__________ PhD докторы Пазылбек С.
(қолы)

«____» ____________20___ж

ДИПЛОМ ЖҰМЫСЫ

Тақырыбы: **«Мектеп геометриясында метрикалық қатыстарды оқып үйрену технологиясы»**

6В01501 - «Математика мұғалімдерін даярлау» білім беру бағдарламасы бойынша

Орындаған _________ Авданов Н.Ж.
(қолы) (аты-жөні)

Ғылыми жетекшісі,
т.ғ.к., доцент _________ Жолдасов С.А.
(қолы) (аты-жөні)

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Зерттеу жұмысының өзектілігі. Қазіргі қоғамда қалыптасып келе жатқан ғылым және оқытушылық ақпараттардың даму қарқынына сәйкес мектеп математика курсының бағдарламасына көптеген талаптар енгізілуде.

Математика ғылымын табысты дамыту үшін оқушылардың математикалық қабілеттерін қалыптастырып, олардың бойындағы дарындылықты жетілдіру қажет. Оқыту процесіндегі басты мақсат- оқушыларға дайын білімді беру ғана емес, сондай-ақ оларға дербес ойлауды үйрету. Осы мақсатқа орай оқушылырадың ой қызметтеріне азық бола алатын білім беру міндеті туып отыр. Оқушыларға кеңістіктегі вектор және координаталық әдіс тақырыбын ұғындыру- математика пәні мұғалімдері үшін қиын, күрделі меңгерілетін тақырып болып табылады. Себебі, аталған тақырыпқа байланысты әдістемелік құралдар аз жетілдірілген.

Орта мектепте математиканы оқытуда оқушылардың өздігінше есептер шығарылуына өте көп көңіл бөлінеді. Себебі өздігінше есептер шығара алатын оқушыларды ғана біз математиканың теориялық негіздерін терең игерген және ол теорияны іс жүзінде еркін қолдана алады деп санаймыз.

Мұғалімнің негізгі мақсаты да осында. Яғни оқушыға математикалық теория мен формулаларды ғана үйретіп қоймай, оған есеп шығаруды да үйрету. Бұл мәселені шешуде геометрия пәнін оқыту өте көп қиыншылықтарға кездеседі. Оның негізгі себептерінің бірі геометрияның көптеген есептері стандартты түрде берілмейді. Кейде бір геометриялық есепті шешу үшін бірнеше теоремалар мен формулаларды, оның ішінде алгебра және тригонометрия элементтерін білуі керек. Стереометрия курсын оқытқанда және бір қиыншылық туады, ол стереометриялық фигураларды елестету дағдысына үйрену және стереометриялық фигураларды нақты және көрнекті етіп жазықтықтағы кескнін салуды үйренгенде ғана есептерді жақсы шығаруға үйрете аламыз.

Математикаға бөлінген уақыттың 40%-ін геометрия алады. Геометрияны оқытудың басты мақсаттарының бірі-оның теориялық негіздерін білу және оларды практикада қолдану дағдыларын меңгеру[1].

Геометрия курсы қандай жолмен құрылмасын онда міндетті түрде теоремаларды дәлелдеудің, есептерді шығарудың әртүрлі әдістері қарастырылады. Олардың ішінде векторлық әдіс, координат әдісі және геометриялық түрлендірулер әдісі ерекше орын алады. Бұл әдістер өзара тығыз байланысты.

Геометрияның теориясын дәлелдеу мен есептерін шешудегі барынша тиімді әдістердің бірі -*векторлық әдіс.* Есептерді жалпы түрде шешуде де векторлардың атқаратын мәні зор. Бұл жөніндегі көптеген теориялық мәселелер мазмұнында теория тікелей қолданатын есептермен қосарланып баяндалу керек. Теориялық тұжырымдарды қолданып есептер шеше алған оқушы ғана сол оқу материалын меңгере алады.

Диплом жұмысының мақсаты:

Математика курсындағы есептерді шығаруда векторлық әдісті пайдаланып шешудің әдіс- тәсілдерін үйрету.

Оқушылардың теорияда алған білімдерін, ақыл-ой белсенділігін, шығармашылық қабілеттерін, дағдыларын қалыптастыру және ойлау қабілеттерін дамыту.

Дипломдық жұмыстың міндеттері:

- векторлық әдіс пен координат әдісі арасындағы байланысты зерттеу;
- векторлық әдісті нақтылы теорияға сүйене отырып, есептер шығару барысында дәлелдеу;

Жұмыстың методологиялдық базасы: Жоғары математика және физика, бағдарламалық қамтамасыз ету кафедраларының оқу әдістемелік кабинеті.

Жұмыстың практикалық маңыздылығы: Оқушыларды математика курсы бойынша алған теориялық білімін, дағдыларын қалыптастыру және өз бетімен алған білімін практикада тиімді пайдалану.

Мәселенің зерттелу деңгейі:

Векторлық әдіс арқылы есептерді практика барысында шешу жолдары болып табылады. Геометриялық және тригонометриялық теңсіздіктерді векторлық әдісті пайдаланып дәлелдеу және вектордың математикада қолданыстарын зерттеу.

Зерттеу пәні: Геометриялық есептерді шешуде векторларды пайдалану әдістемесі.

Зерттеу нысаны – 9,10 -сыныптарда геометрия пәнін оқыту үрдісі, есептерді шешуде векторларды қолдануды жетілдіру.

Диплом жұмысының құрылымы:

Бұл дипломдық жұмыс кіріспеден, 2тараудан және қорытынды, пайдаланылған дерек көздерінен тұрады[2].

1 тарау математика курсында векторлық алгебра, векторларға жалпы мағлұматтар және вектордың математикада қолданыстарынан құралады.

2 тарау есептер шығаруда векторлық әдістерді пайданып шешудің әдіс тәсілдерінен тұрады.

Тақырыптың зерттеу деңгейі: Математика пәнін оқыту барысында алған білімдерді өмірлік практиканың қарапайым есептерін шешуге, физика, химия, сызу, ақпараттану және есептеу техникасы негіздерін т.б. пәндерді оқып үйренуге пайдала білуге үйренеді, шәкірттердің өз бетінше білім алуын қамтамасыз етеді (мысалы, оқулық және ғылыми-көпшілік әдебиетпен жұмыс).

Ғылыми жаңалығы: Аналитикалық геометрия элементтерін орта мектепте оқыту әдістері.

1. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУДА ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРАНЫ ҚАЛЫПТАСТЫРУ

1.1 Математиканы оқыту және оның ғылыми-жаратылыстық білім беруде алатын орны

Сеченов И.М. былай деген: "Математиканың тәжірибелі ғылымдардан өзгешелігі, математика айна-қатесіз қорытындыларға келеді. Тәжірибелі ғылымдардың жаңалықтары салыстырмалы, ал математиканың жаңалықтары- даусыз ақиқат". Ұлы физик А.Эйнштейн (1889-1955) И.М. Сеченовтың пікірін былай деп толықтырды: "Басқа барлық ғылымдардың ішінде *математикаға* деген құрмет ерекше, оның бір ғана себебі бар, бұл ғылымның шарттарының барлығы сөзсіз ақиқат және оларды жоққа шығару мүмкін емес, ал басқа ғылымдардың тұжырымдары белгілі бір дәрежеде даулы және оны жаңа ашылған жаңалықтардың көмегімен жоққа шығару қаупі әрдайым төніп тұрады". Математиканың ерекше рөлін оның шығу тегі де айқындайды: МАӨНМА деген грек сөзі "ғылым", "таным" деген мағына береді. Сондықтан математика - ең көне, әрі ең алғашқы пән, осы себепті оны оқыту күллі білім беру ісінің негізгі бастауы болып табылады. Олай дейтініміз 1784 жылы-ақ "Философияның Коперннигі" И.Кант (1724-1804): "Қандайда бір ғылымда математиканың қаншалық үлесі болса, онда соншалық ақиқат бар", -деген болатын. Математика королі К.Ф. Гаусс (Princeps Mathematicorum, C.F. Gauss, 1777-1855): "Математика - ғылым атаулының патшайымы" деген еді. Осылай деп математикаға дабырайтып атақ бергенмен, математика бүкіл ғылым атаулының әрі қызметшісі, әрі құлы, себебі математиканы қолданбайтын ғылым саласын табу жоқтың қасы, ал олардың кейбір бөлімдері дәл сол күйінде математикамен қосарланып айтылады: математикалық биология, математикалық лингвистика, математикалық физика және химия, және т.б.

ЮНЕСКО (UNESCO) XXI ғасырды компьютер ғасыры деп атады, бұл математиканың рөлін бұрынғыдан да күшейтіп, оның компьютерде есеп шығаруда тиімді алгоритмдер жасаумен айналысатын жаңа бөлімі - алгоритмиканың қажеттілігін арттырды, сондықтан біз өмір сүріп жатқан заманды білімді алгоритмдендіру дәуірі деп те атайды. Математикаландыру-инженерлік-техникалық саладағы мамандар: биологтардың, физиктер мен химиктердің, экономистердің біліктілігінің сапасын арттырудың маңызды шарты-бұл осы маман иелерін математикамен қаруландыру. Мұны ғылымның кемеңгерлері айтқан пікірлер толығымен растайды. Мәселен "Теорфизиканың серісі". Нобель сыйлығының иегері В.Гейзенберг (1901-1976): "Физикада (және ғылымның кез келген түрінде де) фактілерді ғылыми игеру процесі барысында алдымен қолданылатын тіл -математика тілі, нақтылап айтсақ, бұл -физиктерге болашақ эксперименттерінің қорытындыларын болжауға мүмкіндік беретін математикалық схема (модель)". Белгілі математик А.Д.Александров (1912-1999): "Бүгінде математика маңызды рөл атқармайтын адам қызметінің ешбір саласын табу мүмкін емес. Математика табиғат, техника, қоғамтану ғылымдарында пайдаланылатын негізгі қаруға айналды. Тіпті заңгерлер мен тарихшылар да математикалық әдістерді қолданады". Гуманитарлық және қоғамдық ғылымдарда да дәл осылай айту қисынды. Гуманитарлық саладағы мамандарды даярлауда математикаға көп мән беріле бастауының себебі, ғылыми-техникалық дамудың бүгінгі сатысында ғылымдардың өзара бір-біріне ену және интеграциялану процесі жүріп жатыр. Ресей Жаратылыстану ғылымдарды академиясының академигі, белгілі экономист А.В.Тодойсичуктың айтуынша, соңғы зерттеулер көрсеткеніндей, қоғамдық және гуманитарлық ғылым салаларында көбіне базалық физико-математикалық немесе техникалық білімі бар ғалымдар ең үздік нәтижеге қол жеткізіп отырған[3].

Экономика саласы бойынша Нобель сыйлығы лауреаттарының көпшілігінің мамандығы математик болуы әсте де кездейсоқтық емес. Математикалық әдістердің қолданбалы түрін айтпаған күннің өзінде, нақты математикамен айналысу адамның логикасын дамытып, абстрактілі ойлау мүмкіндігін арттырады. "Математиканы тек ақыл-ойды қалыпқа келтіретіндігі үшін ғана оқып-үйрену керек" деген еді Москва мемлекеттік университетінің ірге-тасын қалаушы М.В.Ломоносов (1711-1765).

XX ғасырдың 70-жылдарынан математиканың формалды бөлімдері бойынша қолданбалы бағытты насихаттайтын оқулықтар шыға бастады: "Осы заманғы қолданбалы алгебра" (Г.Биркгоф, Т.Барти, 1970 жыл), ("Қолданбалы абстрактілі алгебра" (Р.Лидл, П.Пильц, 1990), "Алгебралық алгоритмика" (П.Ноден, К.Китте, 1992) және басқалар. Осы мағынада мектептегі математиканың, соның ішінде алгебра курстарының мазмұны өте таяз болып көрінеді. Мәселен, орта мектептің жоғары сыныптарында антикалық және ортағасырлық математиканың кейбір фактілері ғана (оның өзінде тар ауқымда ғана) оқытылады (прогрессиялар және оған келтірілетін квадраттық теңдеулер мен есептер үйретіледі, ал диофанттар анализі (III ғасыр), Кардано және Феррари формулалары (XVI ғасыр) ұмыт қалған, тіпті "алгебраның атасы" Ф.Виеттің (1540-1603) теоремасының өзі тар ауқымда (тек квадраттық теңдеулерді өткенде) қарастырылмайды. Қазақстанның "жаңа буын" алгебра оқулықтары мазмұны жағынан А.П.Киселевтің (XIX ғасыр) 8-10 сыныптарға арналған оқулығынан алысқа ұзап кете қоймаған, Ол аз болғандай, кейбіреуінде оның практика үшін өте маңызды "Комплекс сандар", "Анықталмаған теңдеулер", "Терулер және бином Ньютоны" тақырыптары тіпті де қарастырылмайды.

Орта мектептің геометрия оқулығында 9-10 сыныптарда «Векторлар» тақырыбына аз уақыт берілген. Оқушылар жоғары оқу орнында қарастырылатын аналитикалық геометрияның кейбір элементтерін біле бермейді. Геометрияның теориясын дәлелдеу мен есептерін шешудегі барынша тиімді әдістердің бірі *векторлық әдіс.* Есептерді жалпы түрде шешуде де векторлардың атқаратын мәні зор. Бұл жөніндегі көптеген теориялық мәселелер мазмұнында теория тікелей қолданатын есептермен қосарланып баяндалу керек. Теориялық тұжырымдарды қолданып есептер шеше алған оқушы ғана сол оқу материалын меңгере алады[4].

1.2 Векторлар және оған қолданылатын сызықтық амалдар

Скалярлық және векторлық шамалар: Тұрмыста және ғылым салаларында сан мәнімен ғана анықталатын шамалар кездеседі. Мәселен, аудан, көлем, масса, температура және басқалары. Мұндай шамаларды скалярлық немесе сандық шамалар деп атайды. Ал, мәселен, үдеу, жылдамдық, күш, т. б. шамалары өздерінің сан мәндерімен қоса бағыттары берілгенде ғана анықталады. Мұндай шамаларды векторлық деп атайды[4].

Векторлық шамаларды геометриялық тұрғыдан алғанда бағытталған кесінді арқылы бейнелейді.

Берілген екі нүкте түзудің кесіндісін анықтайды. Бұл нүктелердің бірін кесіндінің басы деп, ал екіншісін кесіндінің ұшы деп атайды. Сөйтіп, жазықтықта немесе кеңістікте реттеліп алынған екі нүкте арқылы бағытталған кесінді пайда болады.

Анықтама. Жазықтықтағы немесе кеңістіктегі бағытталған кесіндіні вектор деп, ал басы мен ұшы беттесетін векторды нольдік вектор деп атайды.

Жазу барысында векторды белгілейтін әріптердің үстіне сызықша қояды: мысалы $\vec{AB}$. Векторды бұлай жазғанда вектордың басы болатын нүкте міндетті түрде алдымен жазылады, ал оның ұшының белгілеуі екінші орында тұрады.

Вектордың басы мен ұшы тиянақты болмаған жағдайда векторды белгілеу үшін үстіне сызықша қойылған бір әріпті де қолданады: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ т. б.

Нольдік векторды $\vec{O}$ арқылы белгілейді.

Анықтама. Вектордың басы мен ұшының ара қашықтығы оның ұзындығы деп аталады. Ұзындықты кейде модуль деп те атайды.Вектордың ұзындығын $\left|\vec{a}\right|$ немесе $\left|\vec{AB}\right|$ таңбалары арқылы белгілейді, оқығанда $\left|\vec{a}\right|$ немесе $\left|\vec{AB}\right|$ векторының ұзындығы.

Нольдік-вектордың ұзындығы нөлге тең:

$\left|\vec{O}\right| = O, \quad \left|\vec{AA}\right| = O$

Анықтама. Егер екі вектор бір түзуде жатса немесе параллель болса, онда мұндай векторларды коллинеар деп атайды.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ коллинеар векторлар $\vec{a} \parallel \vec{b}$ деп жазылады

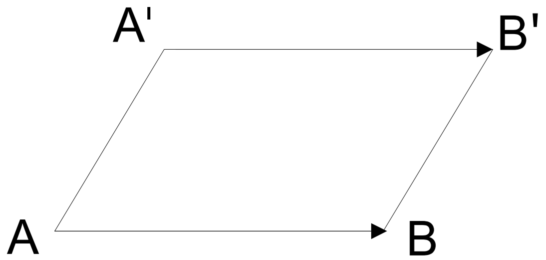
Нольдік вектор кез-келген векторға коллинеар болады. Өйткені нольдік вектордың тиянақты бір бағыты жоқ. Анықтама бойынша қандай да болмасын вектор өзіне-өзі коллинеар болатындығы түсінікті.

Анықтама. Егер $\vec{a}$ мен $\vec{в}$ векторлары коллинеар, бірдей бағытталған және олардың ұзындықтары тең болса, онда мүндай векторларды тең деп атайды.

Басқаша айтқанда $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ және $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$ болса, онда $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары тең болады, яғни $\vec{a} = \vec{в}$. [5]

Сонымен екі вектордың теңдігін айқындау үшін осы анықтамадағы үш шарттың (коллинеарлығы; бірдей бағытталғандығы және ұзындықтарының теңдігі) орындалуын тексеру керек. Егер бұл шарттардың, ең болмағанда біреуі орындалмаса, онда векторлардың өзара тең болмағандығы.

Векторлар теңдігінің анықтамасына сүйене отырып және кезкелген A' нүктесін сайлап алып, берілген $\vec{AB}$ векторына тең болатын $\vec{A'B'}$ векторын салуға болады (Тең векторлар сурет – 1), мұндағы $ABA'B'$ - параллелограмм. $AB = \vec{A'B'}$ теңдігі параллелограмм қасиеттерінен келіп шығады.



Тең векторлар сурет – 1

Векторды санға көбейту. Векторларға қолданылатын амалдардың бірі - $\vec{a}$ векторын α санына көбейту. Бұл ұғымға анықтама бермес бұрын нақты α санының абсолют шамасын анықтап алалық: α нақты санының абсолют шамасы (модулі) былай анықталады:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & егер\ \alpha \rangle 0\ болса; \\ 0, & егер\ \alpha = 0\ болса; \\ -\alpha, & егер\ \alpha \langle 0\ болса; \end{cases}$$

Анықтама. $\vec{a}$ векторының нөлден өзге α санына көбейтіндісі дегеніміз мынандай шарттарды қанағаттандыратын $\vec{b}$ векторын айтады:

біріншіден, $\vec{b}$ векторы $\vec{a}$ векторына коллинеар;

екіншіден, $\vec{b}$ -нің модулі α мен $\vec{a}$ -ның модулдерінің көбейтіндісіне тең, яғни

$$\left|\vec{b}\right| = |\alpha|\left|\vec{a}\right|$$

үшіншіден, егер $\alpha \rangle 0$ болса, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бірдей бағытталған, ал $\alpha \langle 0$ болса, онда бұл векторлар қарама-қарсы бағытталған.

Векторды санға көбейтудің мынадай қасиеті бар:

Кез-келген α, β сандары және кез-келген $\vec{a}$ векторы үшін $\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = (\alpha\beta)\vec{a}$ (1.1) теңдігі орындалады. Шынында да, (1.1) теңдіктің екі жағында тұрған векторлардың ұзындықтары бірдей, ол $|\alpha|\,|\beta|\left|\vec{a}\right|$ көбейтіндісіне тең. Осы айтылып отырған векторлардың бағыттары да бірдей.

Егер α мен β - ның таңбалары бірдей болса, онда $\vec{a}$ -ның бағытындай, ал α мен β ның таңбалары қарама-қарсы болса, сол екі вектордың бағыты $\vec{a}$ -ның бағытымен қарама-қарсы. Егер α мен β және $\vec{a}$ -ның ең болмағанда береуі нөльге тең болса, онда теңдіктің екі жағында нөл тұрады.

Сонымен (1.1) теңдік толық дәлелденді. Теорема. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болу үшін $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ (1.2)
теңдігі орындалатындай λ санының табылуы қажетті және жеткілікті. [6]

Дәлелі: Қажеттілігі. а) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ үшін $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ орындалатын λ саны болатынын дәлелдейік.

1) Егер $\vec{b} = 0$ болса, онда $\lambda = 0$ үшін $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

2) $\vec{b} \neq 0$ болсын: егер $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ болса, онда $\lambda = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ үшін $\vec{b} = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$, себебі $\vec{b} \uparrow\uparrow \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$

және $|\vec{b}| = \left| \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \right| \cdot |\vec{a}| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$

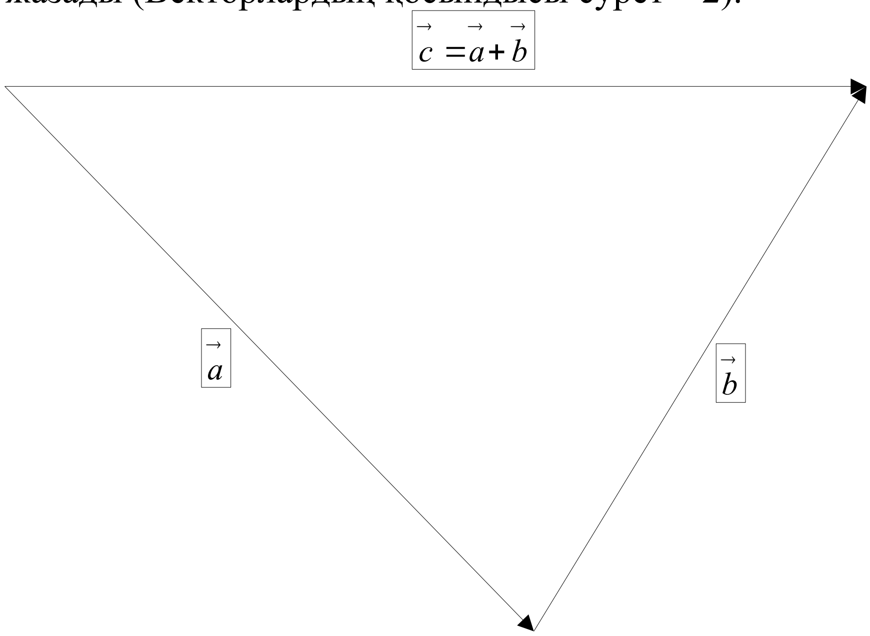
б) егер $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ болса, онда $\lambda = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ үшін $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ теңдігін аламыз

Жеткіліктілігі: Егер $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ болса, онда $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары анықтама бойынша коллинеар болады.

В е к т о р л а р д ы қ о с у. Вектордың ұғымын мазмұнды да пайдалы ететін оларға амалдар қолдану әдісі болып табылады. Жоғарыда векторды санға көбейту туралы айтып өттік. Шын мәнінде $\lambda \vec{a}$ көбейтіндісі $\vec{a}$ векторын созу мен сығуға байланысты болып тұр.

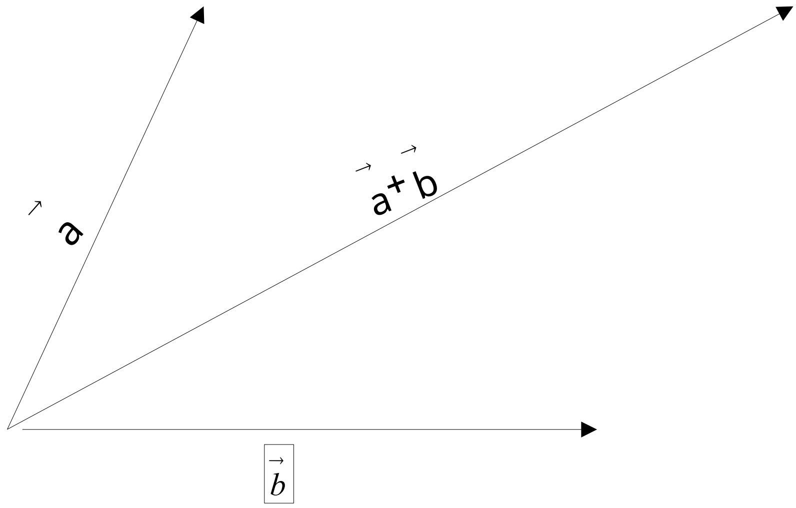
Егер $|\lambda|$ болса. $\lambda > 1$ $\vec{a}$-ны созу, ал $|\lambda| < 1$ болса, онда $\vec{a}$-ны сығу. Векторларды қосу - оларды нүктеге көшіруге байланысты нәрсе.

Анықтама. $\vec{a}$ векторының ұшы $\vec{b}$ векторының басы болған жағдайда $\vec{a}$ векторы мен $\vec{b}$ векторынын қосындысы деп $\vec{a}$ векторының басы мен $\vec{b}$ векторының ұшынан жасалған $\vec{c}$ векторын айтады және мұны $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ деп жазады (Векторлардың қосындысы сурет – 2).



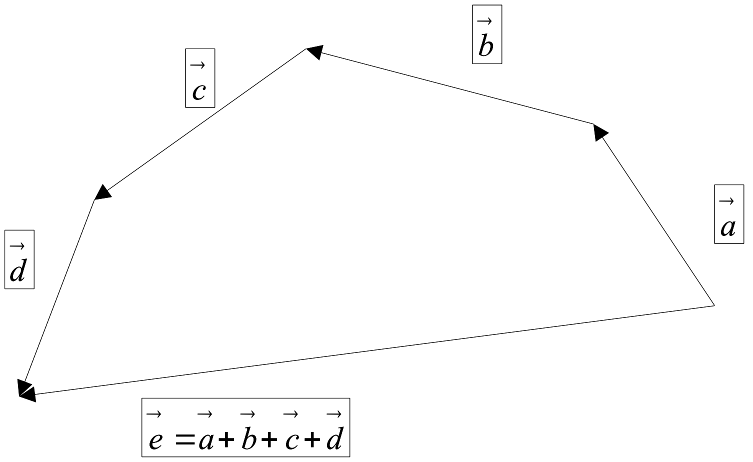
Векторлардың қосындысы сурет – 2

Әртүрлі орналасқан $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының қортындысын табу үшін $\vec{a}$ векторының ұшына $\vec{b}$ кторын көшіру керек (1.3-сурет). Векторлар қосындысын бұлай құруды «параллелограмм ережесі» деп атайды [7]. Өйткені косынды вектор осы векторларға тұрғызылған параллелограмм' диагоналына тең болады. (Параллелограммның диагоналы сурет – 3).



Параллелограммның диагоналы сурет – 3

Үш және одан да көп векторларды қосу үшін оларды біртіндеп келесі қосылғыштың басы ілгері қосылғыштың ұшы болатындай етіп салу керек. Сонда алғашқы салынған вектордың басы мен соңғы салынған вектордың ұшы қосынды болатын векторды анықтайды, яғни қосынды вектор векторлар ағымына қарама-қарсы бағытталады. (Сурет-4).



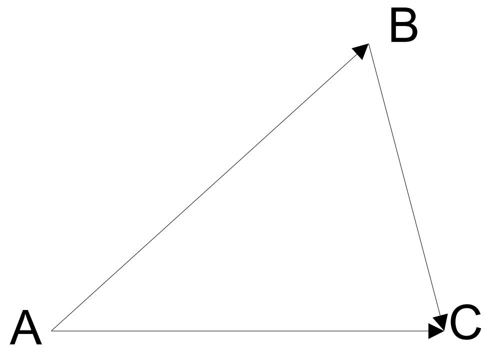
Векторлардың қосындысы сурет – 4

Векторларды қосу механикада қалай қолданылатындығын айтып өтелік.

Дене A нүктесінен B нүктесіне, содан кейін B нүктесінен C нүктесіне қозғалатын болсын. Механиқада $\vec{AB}$ векторын дененің A нүктесінен B

нүктесіне оны ауыстыруы дейді. Сол сияқты $\vec{BC}$ және $\vec{AC}$ векторларының B нүктесінен C-ге, A нүктесінен C-ге орын ауыстырулары да болады. $\vec{AC}$ векторы $\vec{AB}$ мен $\vec{BC}$ векторларының қосындысы болады (Сурет-5) және оны былай жазады:

$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$



Екі вектордың қосындысы сурет - 5

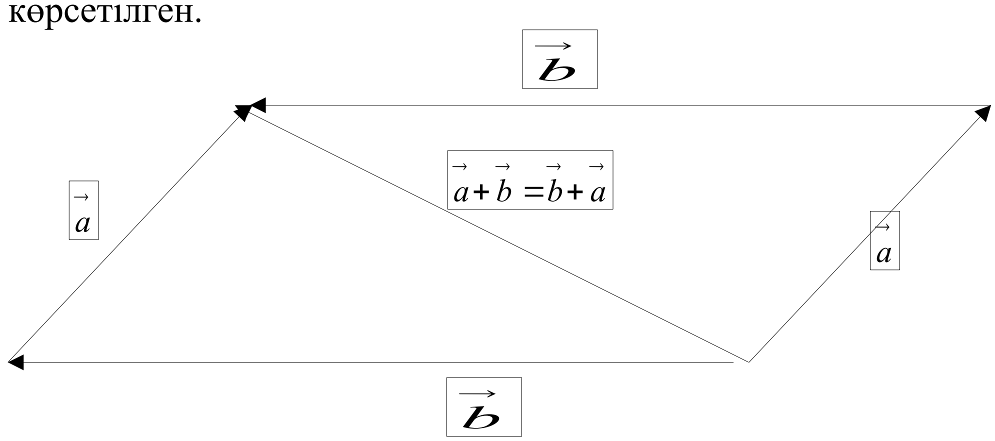
Векторларды қосу операциясын векторлардың қосындысын табу деп түсінеміз. Векторлардықосудың коммунативтік және ассоциативтік қасиеттері бар, яғни кез-келген $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлары үшін

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

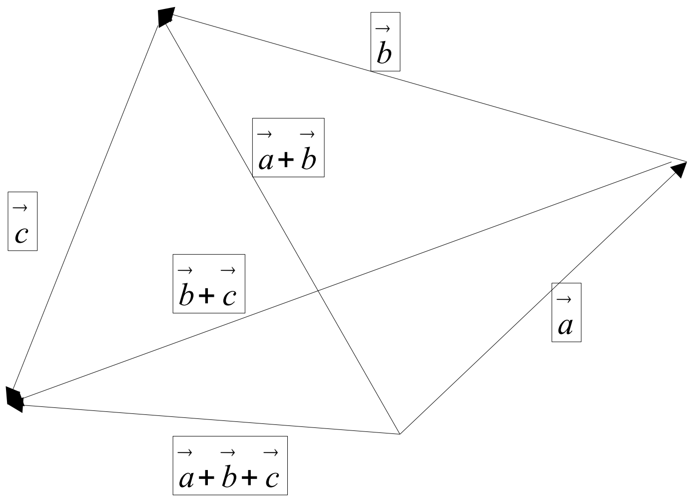
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

теңдіктері орындалады[8].

Коммутативтік қасиет сурет – 6, ассоциативтік қасиет сурет – 7 дәлелденіп көрсетілген.



Коммутативтік қасиет сурет – 6



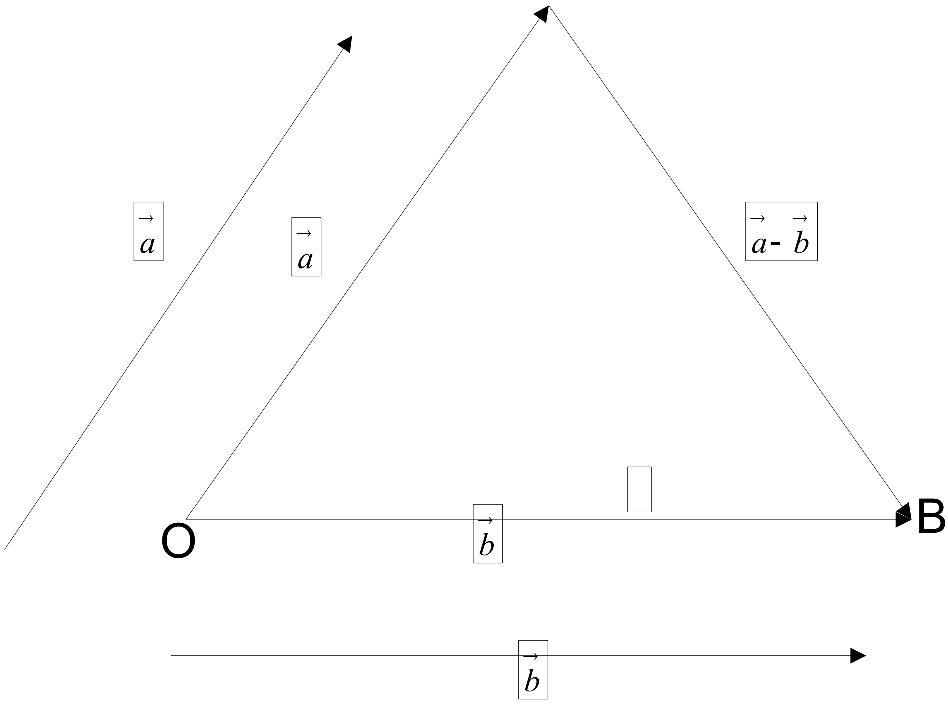
Ассоциативтік қасиет сурет – 7

Векторды санға көбейту және векторларды қосу амалын біріктіретін мынандай қасиет орындалады: $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ α - нақты саны.

В е к то р л а р д ы а л у. Векторларды алу операциясы сандарды алу амалы сияқты анықталады,

Анықтама. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторының айырмасы деп $\vec{b}$ векторына қосқанда $\vec{a}$ векторын беретін $\vec{x}$ векторын айтады және айырманы $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$ (1.3) деп белгілейді. Сонымен, (1.3) теңдікпен анықталатын векторды $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ теңдігі орындалатындай $\vec{x}$ -векторы деп түсіну керек.

Сонымен, $\vec{a}-\vec{b}$ айырмасын салу $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларын бір нүктеден салу керек те, содан кейін $\vec{b}$ векторының ұшынан $\vec{a}$ векторының ұшына қарай вектор салу керек (Векторларды ұштастыру – 8),



Векторларды ұштастыру сурет – 8

екі тең вектордың айырмасы нольдік вектор болады: $\vec{a}-\vec{a}=0$

Анықтама. Берілген $\vec{a}$ векторына коллинеар, ұзындықтары тең және бағыты $\vec{a}$-ға қарама-қарсы векторды $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы деп атайды. $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы векторды $-\vec{a}$ деп белгілейміз $\vec{AB}$ векторына $\vec{BA}$ векторы қарама-қарсы болады, өйткені

$$\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{0} \tag{1.5}$$

Сонымен, (1.5) теңдік бойынша

$$\vec{AB}=-\vec{BA} \tag{1.6}$$

теңдіктен мынандай ереже шығады: теңдіктің бір жағындағы вектор қосылғышты теңдіктің екінші жағына таңбасын өзгертіп көшіруге болады.

1.3 Векторлар жүйесінің сызықтық тәуелділігі және берілген базистегі вектор координаталары

Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Векторларға қатысты тағы да бір өте маңызды ұғым енгізелік.

Анықтама. Егер $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_n$ векторлары үшін бәрі бірдей нольге тең емес $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ сандары

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + ... + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \qquad (1.7)$$

теңдігін қанағаттандыратындай етіп табылса, онда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_n$ векторларын сызықтық тәуелді деп, ал (1.7) теңдік тек қана $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ сандарының бәрі бірдей нольге тең болғанда орындалса, онда бұл векторларды сызықты тәуелсіз деп атайды.

Теорема. Егер екі вектор бір түзуге параллель болса, онда олар сызықты тәуелді. Егер үш вектор бір жазықтыққа параллель болса, онда олар сызықты тәуелді. Кеңістіктегі кез-келген төрт вектор сызықтық тәуелді.[9]

Дәлелдеу.Үш $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары бір жазықтыққа параллель болсын деп ұйғара-лық. Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бір түзуге параллель болса, онда векторлардың коллинеарлық шарты бойынша $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ орындалады, демек $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторла-ры тәуелді болады. Ал егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бір түзуге параллель болмаса, онда $\vec{c}$ векторын келесідей жіктеуге болады: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ демек $x\vec{a} + y\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}$ ендеше $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары сызықтық тәуелді болғаны, өйткені $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$. Сонымен бір жазықтыққа параллель болатын үш $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары сызықтық тәуелді болады. Енді кеңістікте жататын төрт $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ және $\vec{d}$ векторларын қарастыралық. Егер $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары бір жазықтыққа параллель болса, онда $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$ сызықтық тәуелділігі бар; ендеше $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + (-1)\vec{d} = \vec{0}$.

Ал егер $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары бір жазықтыққа паралллель болмаса, онда $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ демек $x\vec{a} + y\vec{o} + z\vec{c} + o\vec{d} = \vec{0}$ сызықтық тәуелділігі бар.

Сонымен кеңістікте тәуелсіз үш вектор табылады, ал кез-келген вектор сызықтық тәуелді болады. Кеңістіктің өлшемі үшке тең деп айтқанда, міне осындай мәселені естен шығармау керек. Мәселен жазықтықтың өлшемі екіге тең.

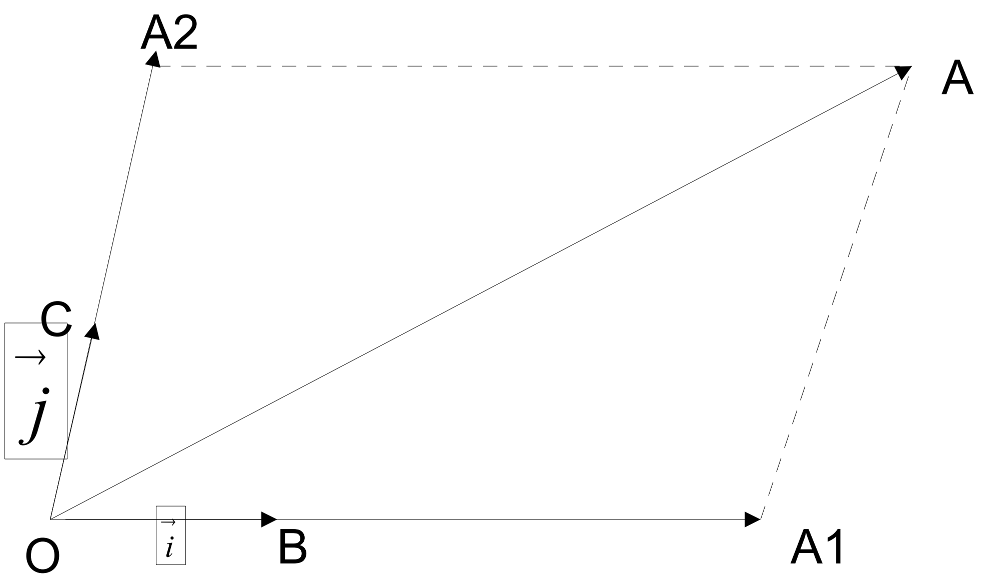
Вектордың координаттары. Вектордың анықтамасы және векторға қолданылатын амалдар вектордың жазықтықта немесе кеңістікте орналасуына байланысты емес. Алайда, кейбір мәселелерді қозғағанда вектордың жазықтықта немесе кеңістікте орналасуына орай мәселе ерекше шешіледі.

Теорема. Нөлдік және коллинеар емес екі $\vec{i}$ және $\vec{j}$ векторы бойынша кез келген $\vec{a}$ векторы үшін

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad (1.8)$$

теңдігі орындалатындай x және y нақты сандары табылады және бұл сандар бір мәнді түрде табылады. [10]

Дәлелдеу. Коллинеар емес $\vec{i} = \vec{OB}$ және $\vec{j} = \vec{OC}$ векторларын қарастыралық. Енді кез-келген $\vec{a} = \vec{OA}$ векторына зер салайық. Әрине, бұл векторлардың басы бір нүкте болатындығы теорема дәлелдеуінің жалпылығына нұқсан келтірмейді. Өйткені бұлай болмаған жағдайда барлық векторларды О нүктесіне көшіруге болады. Диагоналы $\vec{OA}$ болатын және қабырғаларының бағыттарын $\vec{OB}$ мен $\vec{OB}$ векторларының бағыттарымен бірдей етіп OA_1AA_2 параллелограмын құрамыз (Параллелограммның құраушы векторы сурет – 9). Сонда $\vec{OA_1}$ векторы $\vec{OB}$ векторымен, ал $\vec{OA_2}$ векторы $\vec{OC}$ векторымен коллинеар болады. Демек векторлардың колли-неарлық шарты бойынша $\vec{OA_1} = x\vec{i}$ және $\vec{OA_2} = y\vec{j}$ теңдіктері орындалатындай x пен y сандары табылады. Екінші жағынан, $\vec{a} = \vec{OA} = \vec{OA_1} = \vec{OA_2}$ болғандықтан $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Сонымен (1.8) теңдіктің мүмкіндігі дәлелденді.



Параллелограммның құраушы векторы сурет – 9

Енді $\vec{a}$ векторының $\vec{i}$ мен $\vec{j}$ векторлары бойынша (1.8) түрде бір мәнді жазылатындығын дәлелделік. Шынында да, егер $\vec{a}$ векторы мұндай екі түрде жазылатынболса, онда $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$; $\vec{a} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ болар еді де, мұны $x_1\vec{i} + y_1\vec{j} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ немесе $(x_1 - x_2)\vec{i} = (y_2 - y_1)\vec{j}$ деп жазған болар едік.

Ұйғаруымыз бойынша, $x_1 = x_2$ $y_1 = y_2$ теңдіктерінің ең болмағанда бірі орындалмайды. Айталық, $x_1 \neq x_2$ болсын, сонда $\vec{i} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\vec{j}$ ал бұл $\vec{i}$ мен $\vec{j}$ векторларының коллинеар болмауымен қайшылықта болып тұр. Олай болса, $\vec{a}$ векторыньщ (1.8) түрде жазылуы екі түрлі деп ұйғару қайшылыққа әкеліп соқтырады. Теорема толық дәлелденді.

(1.8) формула бойынша анықталатын x пен y сандарын $\vec{a}$ векторының координаттары деп атайды, Мұны былай да айтады: $\vec{i}, \vec{j}$ жүйесінде $\vec{a}$ векторының координаттары (x, y) болады.

Анықтама. Егер кеңістіктегі екі және одан да көп векторларға параллель бо-латын жазықтық табылса, онда мұндай векторларды компланар деп атайды[9].

Сонымен , коллинеар ұғымы жазықтықтағы векторларға тән болса, ал ком-планар ұғымы кеңістіктегі векторларға қатысты.

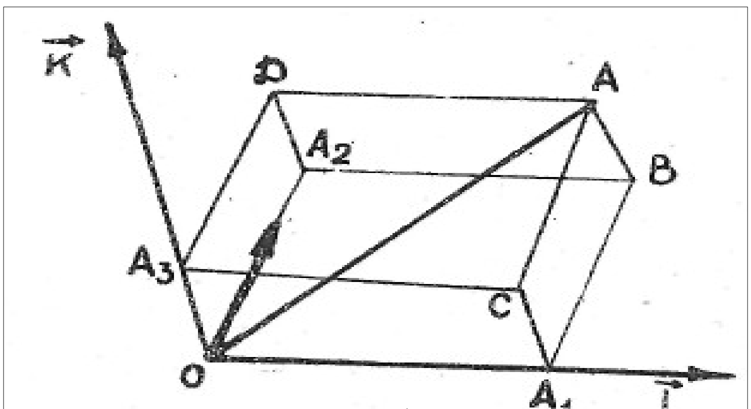
Теорема. Нөльдік және компланар емес үш $\vec{i}, \vec{j}$ және $\vec{k}$ векторлары бойынша кез-келген $\vec{a}$ векторы үшін

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.9}$$

теңдігі орындалатындай x, y және z нақты сандары табылады және мұндай сандар бір мәнді түрде табылады.

(1.9) формула бойьшша табылғаи x, y және z сандарын $\vec{a}$ векторының $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ жүйесіндегі координаттары деп атайды.

Бұл теореманы дәлелдеу жолы жоғарыдағы теореманы дәлелдеу сияқты: егер $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ үш векторы бір жазықтықта жатпайтын болса онда кез-келген $\vec{a} = \vec{OA}$ векторын жіктеу үшін үш қыры OA_1, OA_2 және OA_3 болатын $OA_1BA_2CA_3CBD$ параллелепипедін салу керек (параллепипед құраушы вектор сурет – 10).



Параллепипед құраушы вектор сурет - 10

Оның диагоналын OA болатындай етіп, ал қырларының бағыты $\vec{i}$, $\vec{j}$ және $\vec{k}$ векторларының бағытымен бірдей болатындай етіп аламыз. Бұдан $\vec{a}$ векторы $\vec{a} = x\,\overleftarrow{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ қосындысы түрінде жазылатындығы келіп шығады.

Теорема.Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторынын координаттарының жүйесінде (x_1, y_1) және (x_2, y_2) болса, онда $\vec{a}+\vec{b}$ және $\lambda\vec{a}$ векторларының координаттары $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$ және $(\lambda x_1, \lambda y_1)$ болады, яғни векторды санға көбейткенде координаттар сол санға көбейтіледі.

Дәлелдеу. $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ және $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ болса, онда

$$\vec{a}+\vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right) + \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{i}\right) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$$

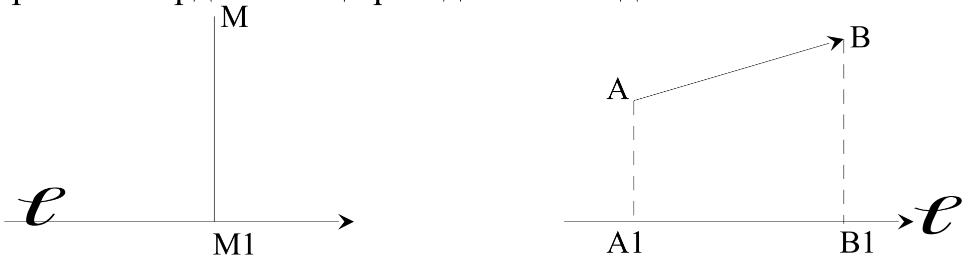
және

$$\lambda\vec{a} = \lambda\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right) = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j}$$

бұл теңдіктер теореманы дәлелдейді[11].

1.4 Векторлардың скаляр және векторлық көбейтіндісі

Оң бағыты белгілі түзуді ось дейді. Осьтің бағыты өзіне параллель векторлардың бірімен толық анықталады. Ол әдетте бірлік вектор арқылы беріледі, ол бірлік векторды осьтің орты деп те атайды.



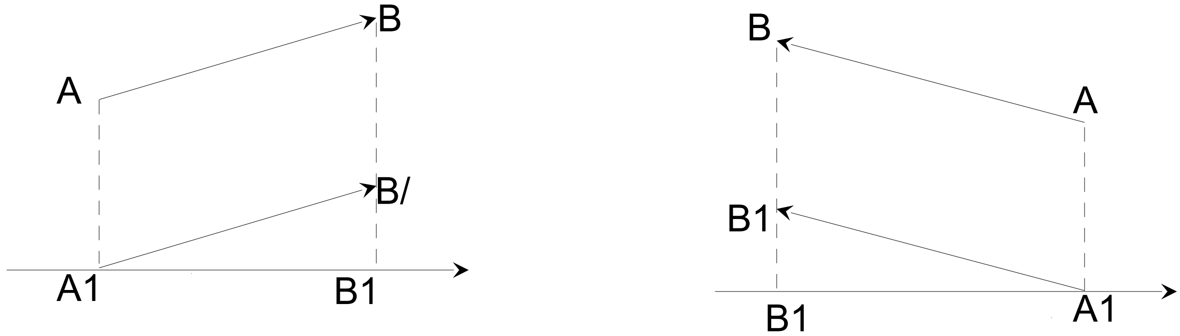
а) б)

М нүктесінің сурет – 11 а) және АВ векторының түзуге проекциясы сурет – 11 б)

М нүктесі мен ℓ (оның оң бағыты бірлік вектор e арқылы берілсін) осі берілсін. *М* нүктесінің ℓ осіндегі проекциясы деп, *М* нүктеден ℓ осіне жүргізілген перпендикулярдың табанын айтады (11а-сурет). AB векторы мен ℓ осі берілсін. A және B нүктелерден ℓ осіне перпендикуляр түсірейік, олардың табандары A_1, B_1 болсын (11б-сурет).

Анықтама. $\vec{AB}$ векторының ℓ осіндегі проекциясы деп, ол вектордың ұштарының осьтегі проекцияларымен шектелген $\vec{A_1B_1}$ бағытталған кесіндінің, егер оның бағыты оспен бағыттас болғанда плюс таңбамен, ал қарама-қарсы болғанда минус таңбамен алынатын ұзындығын айтады. [12]

$np_\ell\overline{AB} - np_\ell\overline{BC} = A_1B_1 - B_1C_1 = A_1C_1$ векторының ℓ осіндегі проекциясын былайша $np_\ell\overline{AB}$ жазады. Сонда анықтама бойынша $np_l\,\vec{AB} = \pm\left|\vec{AB}\right|$ болады. $\vec{AB}$ вектор мен ℓ осі арасындағы оң бұрыш деп ℓ осін өзінің бір нүктесімен (мысалы A нүктенің осьтегі проекциясы A_1 нүктеден) сағат тілі қозғалысы бағытына кері бағытта бұрып, оны $\vec{AB}$ векторға параллель етуге не онымен беттестіруге қажетті бұрышты айтады. сурет – 12а AB вектор мен ℓ осі арасындағы бұрыш B_1A_1B' сүйір, ал сурет – 12б доғал. Жалпы вектор мен ось арасындағы α бұрыштың өзгеру облысы $0 \le \alpha \le 180^0$ болады.



а) Векторларды параллель көшіру сурет – 12 б)

Теорема-1. $\vec{AB}$ векторының ℓ осіндегі проекциясы сол вектордың модулі мен вектордың ℓ осімен жасайтын бұрышының косинусының көбейтіндісіне тең, яғни $np_l\,\vec{AB} = \left|\vec{AB}\right|\cos\alpha$ болады. Мұндағы $\alpha = (\overline{AB}\,\hat{}\,\ell)$.[13]

Дәлелі. Үш жағдайды қарастырайық.

1^0 $\vec{AB} \perp l$ Бұл кезде $\vec{AB}$-ның ℓ осіндегі проекциясы нөлге тең болады. Себебі 90^0-та косинус нөлге тең. Сөйтіп, теорема бірінші жағдай үшін дұрыс.

2^0 $\vec{AB}$ вектор ℓ осімен сүйір бұрыш жасасын (1.12а-сурет).

$\Delta A_1B'B_1$-ден $\vec{A_1B_1} = np_l\,\vec{AB} = \left|\vec{A_1B'}\right|\cos\alpha = \left|\vec{AB}\right|\cos\alpha$.

3^0 $\vec{AB}$ вектор ℓ осімен доғал бұрыш жасасын (1.12б-сурет).

$\Delta A_1BB'$ -тен $np_l \vec{AB} = -\left|\vec{A_1B_1}\right| = -\left|\vec{AB}\right|\cos(180^0 - \alpha) = \left|\vec{AB}\right|\cos\alpha$.

Теорема-2 Вектор мен санның көбейтіндісінің осьтегі проекциясы ол вектордың осьтегі проекциясын сол санға көбейткенге тең болады, яғни вектор бір санға көбейтілсе, вектордың проекциясы да сол санға көбейтіледі. [14]

Дәлелі $np_l\lambda \vec{AB} = \lambda np_l \vec{AB}$ екенін дәлелдеуіміз керек. $\vec{AB}$ векторы мен ℓ осінің арасындағы бұрыш α болсын. Үш түрлі жағдай болуы мүмкін.

1^0 $\lambda = 0$ болсын.Онда $\lambda \vec{AB} = 0 \cdot \vec{AB} = \vec{0}$ болады. Нөлдік вектордың проекциясы нөл болады, яғни $np_l\left(\lambda \vec{AB}\right) = np_l \vec{0} = 0$, сондықтан $np_l\lambda \vec{AB} = \left|\lambda \vec{AB}\right|\cos\alpha = \lambda np_l \vec{AB}$

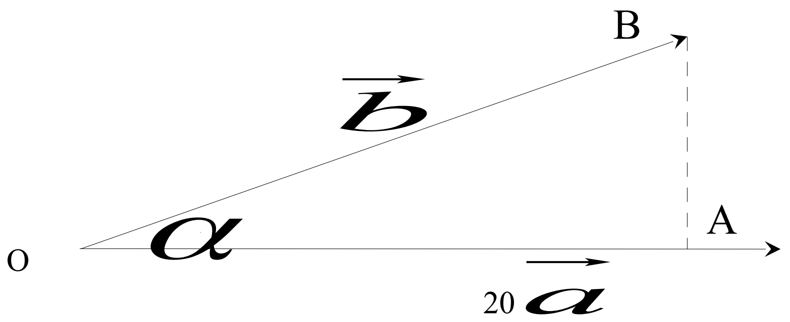
2^0 $\lambda \rangle 0$ болсын. Бұл жағдайда $\vec{AB}$ және $\lambda \vec{AB}$ векторлары бағыттас. Олай бол-са, олардың әрқайсысы ℓ осімен α бұрыш жасайды. Сондықтан 1-теорема бойынша $np_l\left(\lambda \vec{AB}\right) = \left|\lambda \vec{AB}\right|\cos\alpha = \lambda\left|\vec{AB}\right|\cos\alpha = \lambda np_l \vec{AB}$ болып шығады.

3^0 $\lambda \langle 0$ болсын. Бұл кезде $\vec{AB}$ векторы ℓ осімен α бұрышын жасаса, $\lambda \vec{AB}$ векторы ℓ осімен $\pi - \alpha$ бұрыш жасайды. Сонда 1-теорема бойынша $np_l\left(\lambda \vec{AB}\right) = \left|\lambda \vec{AB}\right|\cos(\pi - \alpha) = -\lambda\left|\vec{AB}\right|(-\cos\alpha) = \lambda\left|\vec{AB}\right|\cos\alpha = \lambda np_l \vec{AB}$ болып шығады.

Анықтама. Векторлар $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ арасындағы бұрыш деп олар ортақ O нүктеге келтірілген кездегі AOB бұрышының кішісін айтады[13] (1.13-сурет).

Сонымен $\vec{OA} = \vec{a}$ және $\vec{OB} = \vec{b}$ векторлардың арасындағы бұрыш OA сәулені бұрып, OB сәулемен беттестіретін бұрыштың кішісіне тең болады. Векторлар арасындағы бұрышты $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ арқылы, ал оның шамасын $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \alpha$ арқылы белгілейді. Бұрыштың анықтамасы бойынша векторлар арасындағы бұрыш α мына $0 \le \alpha \le \pi$ аралықта өзгереді.

Анықтама. Нөлдік емес екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп, ол векторлар-дың ұзындықтары мен олардың арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісіне тең болатын санды (скалярды) айтады.[15]



Векторларды скаляр көбейту сурет – 13

Анықтама. Нөлдік емес екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп, ол векторлардың ұзындықтары мен олардың арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісіне тең болатын санды (скалярды) айтады.[16]

Берілген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{b}$ немесе $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ арқылы белгілейді. Сонда анықтама бойынша

$$\vec{a}\,\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha \tag{1.20}$$

мұндағы $\alpha=(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$

Векторларды скаляр көбейту амалының қасиеттері:

1. $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$ 2. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\,\vec{b}+\vec{a}\,\vec{c}$ 3. $\lambda\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b}=\vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right)$ мұндағы λ - нақты сан

4. Егер екі вектордың біреуі нөлдік ветор болса, онда $\vec{a}\,\vec{b}=0$

5. Кез келген нөлден өзге екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ вектор перпендикуляр болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі $\vec{a}\,\vec{b}=0$ болады.

Шындығында егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторы перпендикуляр болса, олардың арасындағы бұрыш 90^0 болады және $\vec{a}\,\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 90^0=0$

Векторлар арасындағы бұрыштың әр түрлі жағдайларын қарастырайық.

1) Векторлар $\vec{a}$ және $\vec{b}$ бағыттас, яғни $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Бұл жағдайда векторлар арасындағы бұрыш нөлге тең, яғни $\alpha=(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=0$. Сондықтан бұл кезде (1.20) формула бойынша $\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$ болады.

2) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар перпендикуляр (ортогональ),яғни $\vec{a}\perp\vec{b}$ демек, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ Сон-дықтан (1.20)-дан $\vec{a}\,\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 90^0=0$ болады. Соңғы теңдік берілген векторлар-дың біреуі немесе екеуі де нөлдік вектор болған кезде де орындалады. Ал, нөл-дік векторды кез-келген векторға перпендикуляр деп қарастыруға болады. Сон-дықтан $\vec{a}\,\vec{b}=0$ теңдік екі вектордың перпендикуляр болуының қажетті және жеткілікті шарты болып табылады.

3) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр болмасын. Төмендегі екі жағдайды қарастырайық:

а) $\alpha < \frac{\pi}{2}$ болсын. Сүйір бұрыштың косинусының мәні оң сан болады. Сондықтан $\alpha < \frac{\pi}{2}$ болғанда векторлардың скаляр көбейтіндісі әр уақытта оң сан болады;

б) $\alpha > \frac{\pi}{2}$ болсын. Доғал бұрыштың косинусының мәні теріс сан болады. Сондықтан арасындағы бұрышы доғал болатын векторлардың көбейтіндісі теріс сан болады.

Екі вектордың скаляр көбейтіндісін олардың бірінің екіншісіне түскен проекциясына сүйеніп, басқаша өрнектеуге болады. $\vec{a}$ векторы ось бойында жатсын, онда ось $\vec{a}$ векторымен анықталады. Бұл кезде $\vec{b}$ векторының $\vec{a}$ векторымен анықталатын осьтегі проекциясы $\vec{b}$ векторының $\vec{a}$ векторындағы проекциясы: $np_a \vec{b}$ болып шығады. Сонда $np_a \vec{b} = |\vec{b}| \cos\alpha$ болар еді. Осыны ескерсек (1.20) формула былайша өзгерер еді: $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\, np_a \vec{b}$

Сонымен, векторлардың скаляр көбейтіндісін былайша да өрнектеуге болады:

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\, np_a \vec{b} \quad \text{және} \quad \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{b}|\, np_b \vec{a} \tag{1.21}$$

Бұған сүйеніп, екі вектордың скаляр көбейтіндісіне, екінші түрде анықтама беруге болады.

Анықтама. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп, олардың біреуінің ұзындығын, осы вектормен анықталатын осьтегі екінші вектордың проекциясына көбейткенде шығатын санды айтады [17].

Егер векторлар тік бұрышты базисте координаталары $a = \{a_1, a_2, a_3\},\ b = \{b_1, b_2, b_3\}$ арқылы берілсе, онда олардың скаляр көбейтіндісі:

$$a\,b = a_1 a_2 + b_3 b_2 + c_1 c_2 \tag{1.22}$$

вектордың ұзындығы:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{1.23}$$

векторлар арасындағы бұрышы:

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \qquad (1.24)$$

векторлардың ортогональ болу шарты:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \qquad (1.25)$$

векторлардың коллинеар болу шарты:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3} \qquad (1.26)$$

формуламен анықталады.

Тік бұрышты базистік векторлар: $\vec{i}=\{1,0,0\},\ \vec{j}=\vec{i}=\{0,1,0\},\ \vec{k}=\vec{i}=\{0,0,1\}$ болатындықтан:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1\\ \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0\end{array}\right\} \qquad (1.27)$$

болады.

Егер вектор $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ базистік векторлар $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ -мен сәйкесінше α,β,γ бұрыштар жасаса, онда:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (1.28)$$

$$a_1=|\vec{a}|\cos\alpha,\quad a_2=|\vec{a}|\cos\beta,\quad a_3=|\vec{a}|\cos\gamma \qquad (1.29)$$

болады.

Мысал 1. Тік бұрышты базисте $\vec{a}=\{8,4,1\}$, $\vec{b}=\{2,-2,1\}$ векторлар берілген. Осы векторлардың ұзындықтарын, скаляр көбейтіндісін, арасындағы бұрышын, бірінің екіншісіндегі проекцияларын табыңдар[18].

Шешуі. Ұзындықты табу формуласы (1.21) бойынша:

$$|\vec{a}|=\sqrt{64+16+1}=9,\quad |\vec{b}|=\sqrt{4+4+1}=3.\qquad |\vec{a}|=9;\quad |\vec{b}|=3.$$

Скаляр көбейту формуласы бойынша: $\vec{a}\,\vec{b}=8\cdot2+4\cdot(-2)+1\cdot1=16-8+1=9;$

Векторлар арасындағы бұрышты табу формуласы (1.24) бойынша:

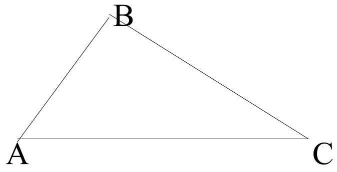
$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{9}{9\cdot 3}=\frac{1}{3}.$$

Ал, (1.21) формуладан:

$$Пр_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{9}{3}=3,\quad Пр_{\vec{a}}\vec{b}=3.\qquad Пр_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{9}{9}=1,\quad Пр_{\vec{b}}\vec{a}=1.$$

Мысал 2. Үшбұрыш үшін косинустар теоремасының дұрыстығына көз

Косинустар теоремасы сурет – 14



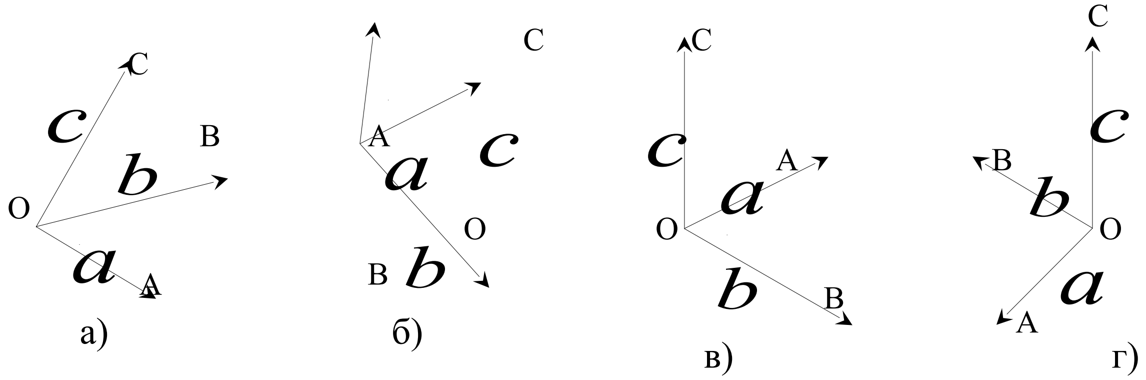
жеткізіңіздер. [19]

Шешуі. ΔABC берілген (1.14-сурет). Векорлардың айырмасының формуласы бойынша: $BC=AC-AB.$ Бұл теңдіктің екі жағын да квадраттасақ: $BC^2=AC^2-2AC\cdot AB+AB^2,$ Бұдан $\left|BC\right|^2=\left|AC\right|^2-2\left|AC\cdot AB\right|\cos A+\left|AB\right|^2$ болып шығады. Бұл ұшбұрышқа арналған косинустар теоремасы.

Мектеп математика курсында векторлардың векторлық көбейтіндісі туралы айтылмайды. Менің ойымша бұл туралы факультатаив сабақтарда өтілсе жақсы болар еді. Векторлардың векторлық көбейтіндісін кейбір геометриялық есептерді шешуде (аудандарды есептеуде), физикада (күш моменттерін табу) қолдану тиімді.

Векторлық көбейтінді. Компланар емес векторлар үштігі. Кеңістіктің кез-келген O нүктесінен шығатын компланар емес $\vec{OA}=\vec{a},\quad \vec{OB}=\vec{b},\quad \vec{OC}=\vec{c}$ векторлары берілсін.

Анықтама. Бір нүктеден басталатын компланар емес векторлар үштігі оң делінеді, егер олардың ортақ нүктесінен, ең қысқа жолмен $\vec{a}$-ны $\vec{b}$-ға беттестіруге бұратын бұру бағыты, $\vec{c}$ вектордың ұшынан сағат тілі қозғалысының бағытына кері болып байқалса (1.15 а,б-сурет), ал сағат тілінің қозғалысы бағытындай болып көрінсе, онда сол үштік делінеді (1.15 в,г-сурет).



Сағат тілінің бағыттас немесе қарамарсы бағыттас сурет – 15

Анықтама. a векторының b векторына векторлық көбейтіндісі деп, төмендегі үш шартты қанағаттандыратын c векторын айтады:

1. $|c| = |a||b|\sin(a,b)$ (1.30)

2. $c \perp a,\ c \perp b$

3. a, b, c векторлар осы тәртіпте орналасуында оң үштік жасауы керек. [19]

Векторлық көбейтіндіні былайша белгілейді: $[ab]$ немесе $a \times b$.

Векторды векторға көбейтудің бұл анықтамасынан тікелей мына тұжырымдардың дұрыстығы шығады.

1) $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлардың векторлық көбейтіндісі болатын вектордың бағы-ты, осы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар жатқан жазықтыққа перпендикуляр бағытта болады (бұл анықтаманың 1-шартынан шығады).

2) Екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ вектордың векторлық көбейтіндісі болатын $\vec{c}$ вектордың ұзындығы сол векторларға құрылған параллелограмның ауданына сан жағынан тең болады.

3) Екі вектордың векторлық көбейтіндісі не көбейткіш векторлардың бірі нөлдік вектор болғанда, не ол екі вектор коллинеар болғанда ғана нөлге тең болады.

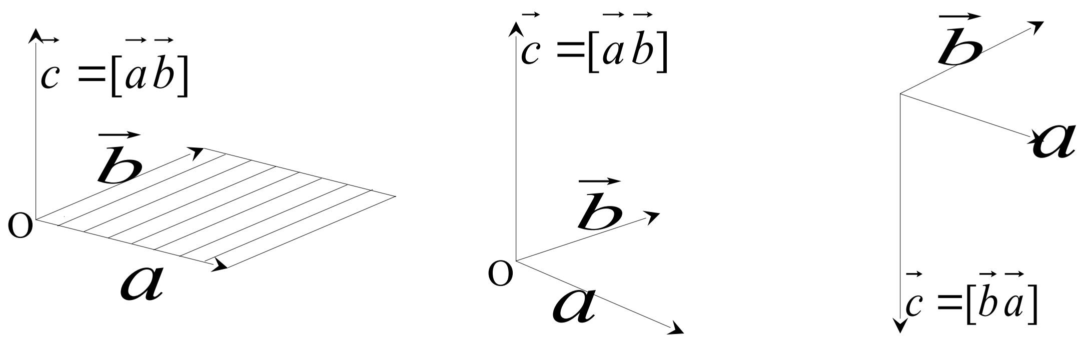
Шынында да $|a||b|\sin(a,b)=0$ болуы үшін не $|a|=0$, не $|\vec{b}|=0$, не $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=0$ болуы керек. Ал, бұл не $\vec{a}=0$ не $\vec{b}=0$, не $\vec{a}\ II\ \vec{b}$ деген сөз.

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ нөлдік емес өзара коллинеар векторлар болса, онда $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=0$ болатындықтан $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=0$ болады. Бұл екі вектордың коллинеар болу шарты болады.

Егер $\vec{a}=\vec{b}$ болса, онда олар коллинеар болады да, олардың векторлық көбейтіндісі болатын вектор ұзындығы нөлге тең болады. Сөйтіп, тең векторлардың векторлық көбейтіндісі нөлдік вектор болады.

4) Екі вектордың векторлық көбейтіндісіне көбейтілетін векторлардың ретін өзгерткеннен олардың векторлық көбейтіндісінің ұзындығы өзгермейді, бағыты қарама - қарсы бағытқа ауысады, яғни $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\,\vec{a}\right]$ болады.

Дәлелі. Векторлардың векторлық көбейтіндісінің анықтамасы бойынша: $\left|\left[\vec{a}\ \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$, $\left|\left[\vec{a}\ \vec{b}\right]\right| = |\vec{b}||\vec{a}|\sin\left(\widehat{\vec{b},\vec{a}}\right)$ болатындықтан және $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ мен $\left(\widehat{\vec{b},\vec{a}}\right)$



Векторлардың векторлық координатасы сурет – 16

бір бұрыштың әртүрлі таңбалануы болғандықтан $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \sin\left(\widehat{\vec{b},\vec{a}}\right)$ болады да $\left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right| = \left|\left[\vec{b}\,\vec{a}\right]\right|$ болып шығады.

Ал, $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ векторда, $\left[\vec{b}\,\vec{a}\right]$ векторда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ жатқан жазықтыққа перпендикуляр болатындықтан және $\vec{a}, \vec{b}, \left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ векторлар үштігі де, $\vec{b}, \vec{a}, \left[\vec{b}\,\vec{a}\right]$ векторлар үштігі де осы тәртіпте орналасуында оң үштік жасауға тиістілігінен $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ вектордың жоғары қарай (1.16 а-сурет), $\left[\vec{b}\,\vec{a}\right]$ векторының төмен қарай (1.16 б-сурет) бағытталатыны, яғни бір-біріне қарама-қарсы бағытта болатыны шығады.

Сонымен $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\,\vec{a}\right]$ болады.

Ескерту: 1) Векторларды векторлы көбейтуде ауыстырымдылық заңы орындалмайды. Сондықтан векторлардың орнын ауыстыруда сақ болу керек.

2) Векторлардың векторлы көбейтіндісінің бағытын табу үшін «оң қол ережесін» пайдалануға болады: оң қол алақанын жазып бас бармақ пен сұқ саусақты перпендикуляр деп есептеп, ортаңғы саусақты алақанға перпендикуляр етіп алып, бас бармақты $\vec{a}$ вектор бағытымен, сұқ саусақты $\vec{b}$

вектор бағытымен дәл келтірсек, ортаңғы саусақ бағыты олардың векторлық көбейтіндісі болатын $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ вектордың бағытын көрсетеді.

5) Векторлық көбейтіндіде санға қарағанда терімділік қасиет орындалады, яғни λ саны мен $\vec{a}$ жәнен $\vec{b}$ векторлар үшін

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) \tag{1.31}$$

теңдік орындалады.

Дәлелі. $\lambda=0$, $\lambda>0$, $\lambda<0$ жағдайларды жеке-жеке қарастырайық.

а) $\lambda=0$ болса (1.31) үштіктің екі жағында нөлдік вектор болады. Сондықтан (1.31) $\lambda=0$ болғанда дұрыс.

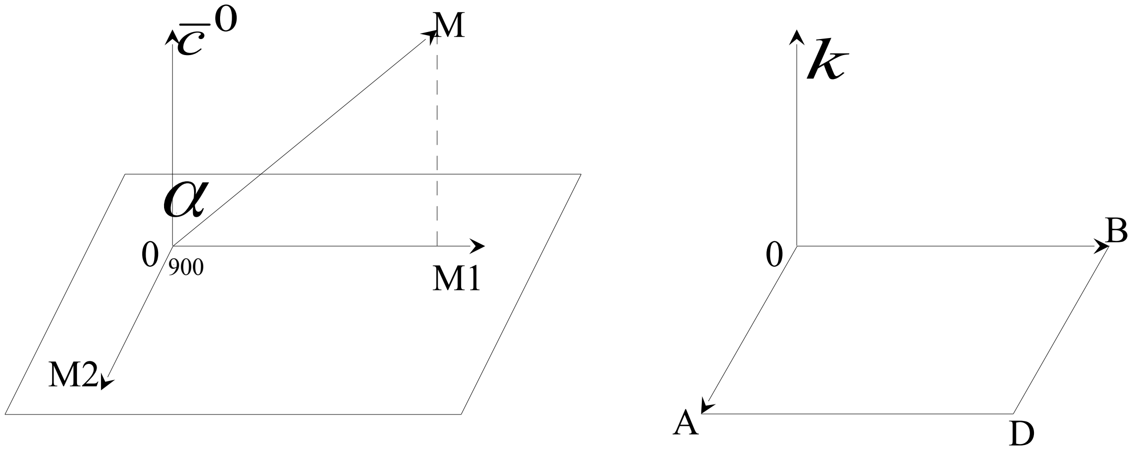
б) $\lambda>0$ болсын. Бұл кезде $\lambda\vec{a},\ \lambda\vec{b}$-ның бағыттары сәйкесінше $\vec{a}$ жәнен $\vec{b}$ векторлармен бағыттас болады. Сондықтан $\sin\left(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}}\right)=\sin\left(\widehat{\vec{a},\lambda\vec{b}}\right)=\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ болады. Ал, параллелограмның бір қабырғасы λ есе артса, ауданы да λ есе артады. Сондықтан $\lambda>0$ болған кезде де (1.31) дұрыс болады.

в) $\lambda<0$ болсын. Онда $\vec{a}$ мен $\lambda\vec{a}$, $\vec{b}$ мен $\lambda\vec{b}$ қарама-қарсы бағытта болғандықтан $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}$ векторы да, $\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$ векторы да $\vec{a}\times\vec{b}$ векторға қарама-қарсы бағытталған болады. Сондықтан олар $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ вектормен бағыттас болады. Ал, $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$, $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}$, $\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$ векторлардың модульдері тең болатындықтан $\lambda<0$ болған кезде де (1.31) дұрыс болады.

6) Векторлық көбейтінді де үлестірімділік заңы сақталады.

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c} \tag{1.32}$$

Дәлелі. Бұл (1.32) теңдіктің дұрыстығын дәлелдеу үшін, ең әуелі мына $\left[\vec{a},\vec{c}^{\,0}\right]$ көбейтіндісінің графигін салайық. Мұндағы $\vec{c}^{\,0}$ – бірлік вектор, ол жазықтыққа перпендикуляр $\vec{c}^{\,0}$. $\vec{a}=\vec{OM}$ векторын Π жазықтығына проекцияласақ, онда осыған сәйкес $\overrightarrow{OM}_1$ векторы шығады, ал бұл векторды сағат тілінің бағытымен 90^0-қа бұрсақ, онда мұнан шыққан $\vec{OM}_2$ векторы мынаған тең: $\vec{OM}_2 = \left[\vec{a}, \vec{c}^{\,0}\right]$.



Векторлардың проекциясы сурет – 17

Өйткені:

1) $\left|\vec{OM}_2\right| = \left|\vec{OM}_1\right| = \left|\vec{a}\right|\cos\left(90^0 - \alpha\right) = \left|\vec{a}\right|\sin\alpha, \quad \left|\vec{a}\right| = \vec{a}$ 2) $\vec{OM}_2 \perp \vec{a}$ және $\vec{OM}_2 \perp \vec{c}^{\,0}$ (1.17-сурет).

Енді $\vec{c}^{\,0} \perp \Pi$ болсын және OB_1A_1 үшбұрышы берілсін (1.18-сурет). Бұл үшбұрыштың қабырғалары: $\vec{OB}_1 = \vec{a}$, $\vec{B_1A_1} = \vec{b}$, $\vec{OA}_1 = \vec{a} + \vec{b}$ OB_1A_1 үшбұрышын Π жазықтығына проекциялап, сонан соң Π жазықтықтағы OB_2A_2 проекцияны сағат тілінің бағытына сәйкес 90^0-қа бұрайық. Сонда OB_3A_3 үшбұрышы шығады. Алдыңғы көрсету бойынша: $\vec{OA}_3 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c}^{\,0}$; $\vec{OB}_3 = \vec{a} \times \vec{c}^{\,0}$; $\vec{B_3A_3} = \vec{b} \times \vec{c}^{\,0}$

Енді $\vec{OA}_3 = \vec{OB}_3 + \vec{B_3A}_3$ болғандықтан, мына теңдік орындалады:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c}^{\,0} = \vec{a} \times \vec{c}^{\,0} + \vec{c}^{\,0} \times \vec{b} \tag{1.33}$$

Вектор $\vec{c} = n\vec{c}^{\,0}$ болсын. Мұндағы n – скаляр. (1.33) теңдіктің екі жағын да n-ге көбейтіп, (3) қасиет бойынша былай жазайық:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times n\vec{c}^{\,0} = \vec{a} \times n\vec{c}^{\,0} + \vec{b} \times n\vec{c}^{\,0}$$ немесе $$\left[\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c}\right] = \left[\vec{a}\,\vec{c}\right] + \left[\vec{b}\,\vec{c}\right]$$

Коллинеар векторлардың векторлық көбейтіндісі нөлге тең болатындықтан кордината осьтерінің орттарын (базистік векторлар) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ үшін мына теңдіктер дұрыс болады.

Коллинеар векторлардың векторлық көбейтіндісі сурет – 18

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 0 \quad (1.31)$

Енді $\vec{i} \cdot \vec{j}$ көбейтіндісін анықтайық. $\vec{i}$ мен $\vec{j}$-ға салынған параллелограмм ауданы бірге тең болатын квадрат болады. Сонда $\vec{i} \, x \, \vec{j}$ вектордың ұзындығы бірге тең болуы керек және ол $\vec{i}$-ға да, $\vec{j}$-ға да перпендикуляр болуы керек. Сонымен қатар $\vec{i} \, \vec{j}, \left| \vec{i}, \vec{j} \right|$ орналасуында он үштік жасау керек, яғни $\vec{i} \, x \, \vec{j}$ вектор oz осімен баштталған бірлік вектор болу керек, ол $\vec{k}$ векторы. Сондықтан $\vec{i} \, x \, \vec{j} = \vec{k}$ болады. Дәл осы сияқты $\vec{j} \, x \, \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \, x \, \vec{i} = \vec{j},$ болады.

Сонымен $\vec{i} \, x \, \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \, x \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \, x \, \vec{i} = \vec{j}$

Ал, векторлардың орнын алмастырғанда таңбасы кері ауысатындықтан

$\vec{j} \, x \, \vec{i} = - \vec{k}, \vec{k} \, x \, \vec{j} = - \vec{i}, \vec{i} \, x \vec{k} = - \vec{j}$ болады.

(1.32), (1.33) формулалардың базистік бірлік векторлар үшін мына тізбекте $\vec{i} \; \vec{j} \; \vec{k} \; \vec{i} \; \vec{j}$ солдан оңға қарай қатар тұрған екеуінің векторлық көбейтіндісі плюс таңбамен одан кейінгі тұрған векторы, ал оңнан солға қарай минус таңбамен одан кейінгі тұрған векторды беретінін байқауға болады. Оны мына схемамен бейнелеуге болады.

$$\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} +$$
$$\vec{i}\quad \vec{j}\quad \vec{k}\quad \vec{i}\quad \vec{j}$$
$$- \xleftarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Өс орттары үшін мына таблица дұрыс.

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Кесте – 1 Бірлік векторлардың өстерге байланысты өзгеруі.

<u>Координаталары арқылы берілген векторлардың векторлық көбейтіндісі.</u> Тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ -дағы координаталар арқылы $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ векторлар берілсін. Онда оларды жіктеп $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ жазуға болады.

Векторлық көбейтіндіге үлестірімділік және терімділік қасиеттер орындалатындықтан $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың жіктелуін көпмүшелікті көпмүшелікке көбейту ережесімен, векторлық көбейту қасиеттерін сақтап отырып, көбейтуге болады. Сонда (1.32), (1.33) формулаларды ескерсек

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)x\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=x_1x_2\vec{i}\,x\,\vec{i}+y_1x_2\vec{j}\,x\,\vec{i}+z_1x_2\vec{k}\,x\,\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\,x\,\vec{j}+y_1y_2\vec{j}\,x\,\vec{j}+$$

$$z_1y_2\vec{k}\,x\,\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\,x\,\vec{k}+y_1z_2\vec{j}\,x\,\vec{k}+z_1z_2\vec{k}\,x\,\vec{k}=-y_1x_2\vec{k}+z_1x_2\vec{j}+x_1y_2\vec{k}-z_1y_2\vec{i}+y_1z_2\vec{i}=$$

$$(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}\left(z_1x_2-x_1z_2\vec{j}\right)+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}$$

Жақша ішіндегілерді анықтауыш ретінде жазсақ есте сақтауға қолайлы мына формула шығады:

$$\vec{a}\,x\,\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 z_1 \\ x_2 z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix}\vec{k} \qquad (1.34)$$

Мұны былай жазуға болады:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \qquad (1.35)$$

Егер векторлар $\vec{a}$ және $\vec{b}$ коллинеар болса, онда $\vec{a}\, x\, \vec{b}=0$ болады. Ал бұл $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторының барлық координаталары нөлге тең деген сөз: $y_1z_2 - z_1y_2 = 0,\ z_1x_2 - x_1z_2 = 0,\ x_1y_2 - y_1x_2 = 0$ Бұдан

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2} \qquad (1.36)$$

шығады.

Векторлық көбейтіндінің геометрияға және механикаға қолданылуы.

1) Параллеограмм ауданы. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың векторлық көбейтіндісінің анықтамасы бойынша $\left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)$ болатындықтан және кабырғалары $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларын өрнектейтін параллелограмның ауданы $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)$ болатындықтан екі вектордың векторлық көбейтіндісінің модулі сан жағынан бұл векторларға салынған параллелограмның ауданына тең болады.

$$S=\left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right|$$

Ал, мұны координаталар арқылы жазса:

$$S=\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \qquad (1.37)$$

болады[20].

Мысал 3. Мына векторларға салынған, яғни кабырғалары мына векторларды $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ кескіндейтін параллелограмның ауданын табыңыздар.

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=10\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}-4\vec{k}-2\vec{i}-5\vec{j}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

Шешуі.

бұдан $\left|\vec{a}\,\vec{b}\right|=(1,1,-1)$

Сонда ізденген параллелограмм ауданы $S=\sqrt{1+1+(-1)^2}=\sqrt{3}$ кв.өлшем болады.

2) <u>Үшбұрыш ауданы</u>. Қабырғалары $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ векторлары кескін-дейтін үшбұрыш берілсін. Бұл үшбұрыш қабырғалары $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ векторлар болатын параллелограмның жартысына тең болады. Сондықтан оның ауданы параллелограмның ауданының жартысына, яғни

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right|=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

немесе

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_1 z_1\\ y_2 z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1 x_1\\ z_2 x_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 y_1\\ x_2 y_2\end{vmatrix}^2} \qquad (1.38)$$

тең болар еді.

Егер үшбұрыш ХОУ координаталар жазықтығында жатса, онда үшінші коор-динаталар $z_1=z_2=0$ болар еді. $S_\Delta=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ болып шығады.

Мысал 4. Төбелері A(3, 0, 5), B(3,-2, 2), C(1, 2, 4) нуктелері болатын үшбұрыштың ауданын табыныздар[21].

Шешуі. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(0,-2,3), \vec{b}=\overrightarrow{AC}=(-2,2,1)$ болар еді. Сонда ізденген үшбұрыш ауданы $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{64+36+16}=\frac{1}{2}2\sqrt{29}=\sqrt{29}$ кв. бірл.

3). <u>Күш моменті</u>. Қатты дененің А нүктесі қозғалмастай қатаң бекітілсін. Егер оның басқа бір В нүктесіне $\vec{F}$ күші түсірілген болса (Күш моменті сурет – 18), онда айналдыру моменті немесе күш моменті механикадан белгілі ереже бойынша $M=\vec{r}\,x\,\vec{F}$ формуламен табылады.

Мысал 4. $a=(4,\ 2,\ 1),\ \ b=(8,\ 6,\ 8),\ \ c=(5,\ 2,\ 1)$ векторлары компланар ма, жоқ па?

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Шешуі: Сондықтан векторлар компланар болады[22].

Мысал 8. $a = (-4, -1, 1)$, $b = (8, 3, 3)$, $c = (5, 1, 1)$ векторларына салынған параллепиедтің көлемін табу керек.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -14$$

Шешуі: Сонымен $V = |-14| = 14$

Мысал 5. Тік бұрышты координаталар жүйесінде төбелері $M_1(x_1, y_1\ z_1)$, $M_2(x_2, y_2\ z_2)$, $M_3(x_3, y_3\ z_3)$, $M_4(x_4, y_4\ z_4)$, нүктелері болатын тетраэдрдің көлемін табу керек [23]

Шешуі:Тетраэдр қырларын екі нүктемен берілген вектор деп қарастырайық: $\vec{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\vec{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, $\vec{M_1M_4}(x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$

Сонда бұл векторлары қыры болатын параллепипед көлемі

$$V = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

Тетраэдр көлемі бұдан 6 есе кем болады:

$$V = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

2. МЕКТЕП ГЕОМЕТРИЯСЫНДА МЕТРИКАЛЫҚ ӘДІСТІ ПАЙДАЛАНЫП ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІҢ АЛУАН ТҮРЛІЛІГІ

2.1. Бағытты кесінділер мен параллель көшіруге берілетін есептерді шешу

Бізді қоршаған әлемнің көптеген объектілері шамасымен бірге бағытымен де сипатталады. Мысалы: жылдамдық, үдеу, күш т.с.с. Осындай объектілерді математикалық әдістермен зерттеу үшін оларды бағытталған кесінділермен кескіндейді.

Бағытты кесіндіні вектор деп атайды. Сонымен жазықтықтағы вектор-бұл бағыты бар кесінді.

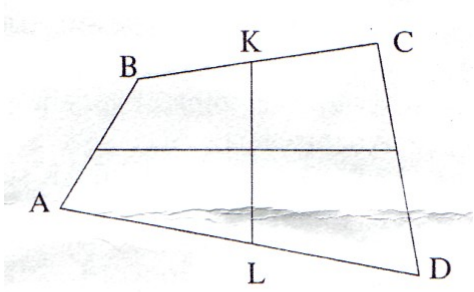
Геометрия оқулығындағы кейбір анықтамаларды қысқаша еске түсірелік. Декарт координаталар жүйесіндегі кез келген $A(x,y)$ нүктені координаталары $B(x+a, y+b)$ нүктеге көшіретін (x,y) ке тәуелсіз берілген a,b тұрақты сандарын параллель көшіру деп атайды. Егер АВ жарты түзуін CD жарты түзуіне параллель көшіретіндей a,b сандары табылатын болса, олар белгілі параллель көшірумен беттессе, онда $\overline{AB}$ мен $\overline{CD}$ векторларын бірдей бағытталған деуге болады. Белгілі бір параллель көшірудің нәтижесінде екі вектор беттесетін болса, оларды тең векторлар деп атайды. Мысалы: $\overline{AB}$ мен $\overline{DC}$ векторлары тең, яғни бұлар $ABCD$ параллелограмның қабырғалары. $\overline{AB}$ мен $\overline{DC}$-ның бағыттары және ұзындықтары бірдей.

1-мысал. $A(3;y)$және $B(x;2)$ нүктелері белгілі бір $\overline{AB}$ векторын анықтап, ол $\overline{a}(1;2)$ векторына тең болатындай x,y сандарын табу керек.

Шешуі: $\overline{AB}$ векторының анықтамасы бойынша оның координаты $(x-3;2-y)$. Векторлар тең болуы үшін оның координаталары тең болуы тиіс, яғни $x-3=1, 2-y=2$ бұдан $x=4, y=0$.

Векторлардың басты қасиеттері оларды қосуға, өзара көбейтуге болатыны, оның үстіне бұл амалдар сандардағы негізгі заңдарды қанағаттандырады. Маңызды бір өзгешелігі векторлар қосындысы қайтадан вектор, векторлар көбейтіндісі сан, кейде мұны скаляр көбейтіндісі деп атайды. $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ векторларды қоссақ, олар бір сынықты құрайды. Ол тұйық сынық болса, онда векторлардың басы мен ең соңғысының ұшы беттеседі, яғни $\overline{a_1} + \overline{a_2} + ... + \overline{a_n} = \overline{A_1 C_n}$ теңдігі орындалады. A_1-вектордың басы, C_n-ұшы. Осы ереже бойынша үшбұрышты қоссақ, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{0}$. Координаталары (a_1, a_2) болатын $\overline{a}$ векторын λ санына көбейтсек, $\lambda\,\overline{a}$ векторы шығады, оның координатасы $(\lambda a_1, \lambda a_2)$. $\overline{a}$ векторын λ санына көбейту дегеніміз бағытын сақтай отырып $\overline{a}$ векторын λ рет созуды білдіреді. Бұл арада $|\lambda| > 1$(созылған) $\frac{1}{|\lambda|}$ (қосылған) жағдайлары ескеріледі. Сол сияқты, $\lambda > 0, \lambda < 0$ болатын жағдайлары ескеріледі[24].

2-мысал. A, B, C, D төрт нүкте берілген. AB мен CD- ның, BC мен AD-ның орталарын қосатын кесінділердің ортақ ортасы бар екенін дәлелдеу керек (яғни қиылысу нүктесінде қақ бөлінетінін дәлелдеу керек).



Қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді сурет – 1

Шешуі: Кез келген 0 нүктесін таңдап алайық. D_1 мен D_2 нүктелері KL мен MN - нің есеп шартында айтылған орталары болсын. MN мен KL кесінділерінің орталары $\overline{OD_1}$ мен $\overline{OD_2}$ радиус векторлары беттесетінін дәлелдеу керек. Ол үшін $\overline{OD_1}$ мен $\overline{OD_2}$ векторларын $\overline{OL},\overline{OK}$ және $\overline{OM},\overline{ON}$ векторлары арқылы өрнектейміз, одан соң $\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC},\overline{OD}$ векторлары арқылы өрнектейміз. Л.С.Атанасянның 7-9 сынып оқулығындағы 198- беттегі 1-есеп бойынша $\overline{OD_1}=\frac{1}{2}\overline{OK}+\frac{1}{2}\overline{OL},$ себебі D_1 - KL - дың ортасы. Ал, К-ВС-ның ортасы, олай болса, 1-есеп бойынша $\overline{OK}=\frac{1}{2}\overline{OB}+\frac{1}{2}\overline{OC},$ Дәл оылайша $\overline{OL}=\frac{1}{2}\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{OD}.$ Бұларды $\overline{OD_1}$ -дің жіктелуіндегі орнына қойсақ,

$$\overline{OD_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{OB}+\frac{1}{2}\overline{OC}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{OD}\right)=\frac{1}{4}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}\right).$$

Дәл осылайша

$$\overline{OD_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{OM}+\frac{1}{2}\overline{ON}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{OB}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{OC}+\frac{1}{2}\overline{OD}\right)=\frac{1}{4}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}\right).$$

Оң жақтары бірдей болғандықтан $\overline{OD_1}=\overline{OD_2}$, бұдан $D_1=D_2$. Демек, бір-ақ нүкте екенін көруге болады.

3-мысал. Үшбұрыштың екі медианасы қиылысу нүктесінде төбесінен бастап есептегенде 2:1 қатынасына бөлінеді, сонымен бірге барлық үш медиана бір нүктеде қиылысады.

Шешуі. О нүктесі АВС үшбұрышының АК мен BN медианаларының қиылысу нүктесі болсын. $\overline{AO}=x\overline{AK}$ және $BO=y\overline{BN}$ болсын. Бізге $x=y=\frac{2}{3}$ болатынын дәлелдеу керек.

$\overline{AB}=\overline{f_1},\overline{AC}=\overline{f_2}$ деп белгілейік, бұлар коллинеар емес векторлар. Бұлар арқылы алдымен $\overline{AO}$ векторын айнымалы x, одан соң y арқылы өрнектейік. $\overline{f_1}$ мен $\overline{f_2}$ -нің коллинеар емес екеніне сүйеніп, алынған өрнектерді теңестіреміз, алынған теңдеудің коэффициенттерінен x пен y -ті табамыз. Алдымен

$\overline{AO}=x\overline{AK}=x\left(\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{AB}\right)=\frac{x}{2}\overline{f_1}+\frac{x}{2}\overline{f_2}$, 1-есеп бойынша $\overline{AK}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}$ түрінде жазамыз. Бұдан соң $\overline{AO}=\overline{AB}+\overline{BO}=\overline{f_1}+y\overline{BN}=\overline{f_1}+y\left(\frac{1}{2}\overline{BA}+\frac{1}{2}\overline{BC}\right)$

Себебі $\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{BA}+\frac{1}{2}\overline{BC}$ (1-есеп бойынша).

Бірақ $\overline{BA}=-\overline{AB}=-\overline{f_1}$ және $\overline{BC}=\overline{BA}+\overline{AC}=-\overline{f_1}+\overline{f_2}$. Мұны $\overline{AO}$- ның орнына қойсақ, $\overline{AO}=\overline{f_1}+y\left(\frac{1}{2}\left(-\overline{f_1}\right)+\frac{1}{2}\left(-\overline{f_1}+\overline{f_2}\right)\right)=(1-y)\overline{f_1}+\frac{y}{2}\overline{f_2}\cdot$ $\overline{AO}$ үшін алынған өрнектерді теңестіреміз.

$\overline{AO}=(1-y)\overline{f_1}+\frac{y}{2}\overline{f_2}$ $\overline{AO}=(1-y)\overline{f_1}+\frac{y}{2}\overline{f_2}$,

Себебі $\overline{f_1}$ мен $\overline{f_2}$ коллинеар емес, онда $\overline{AO}$ векторының коэффициенттері ($\overline{AO}$ векторының $\overline{f_1}$ мен $\overline{f_2}$ бойынша жіктегенде) бір ғана түрде анықталады.

Демек, $\frac{x}{2}=(1-y)$ және $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}\cdot$ Осы жүйені шешіп $x=y=\frac{2}{3}$ дәлелдеуге тиістіні аламыз.

4-мысал. $A(1;1)$, $B(4;2)$, $C(3;5)$ нүктелері берілген. $\angle BAC$ бұрышын табыңыз.

Шешуі. $\overline{AB}=(3;1)$, $\overline{AC}=(2;4)$. Бұл арадан

$$\cos\angle BAC=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\frac{2\cdot3+1\cdot4}{\sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Демек $\angle BAC=45^0$.

5-мысал. Векторлардың көмегімен ромб диогоналдарының перпендикуляр екенін дәлелдеу керек.

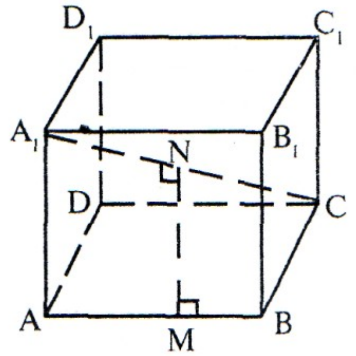
Шешуі. Ромб қабырғаларын $\overline{a}$ мен $\overline{b}$ деп белгілейік, бұлардың ортақ бас нүктесі бар. $\overline{a}+\overline{b}$ мен $\overline{a}-\overline{b}$-векторлары ромб диагоналдары. Бізге $(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}-\overline{b})=0$ болатынын көрсету жеткілікті. Жақшаны ашып көбейтсек,

$(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}-\overline{b})=\overline{a}\overline{a}+\overline{b}\overline{a}+\overline{a}\overline{b}-\overline{b}\overline{b}=\overline{a}^2-\overline{b}^2$.

Бірақ $\overline{a}^2=\left|\overline{a}\right|^2=\left|\overline{b}\right|^2=\overline{b}^2$ -ромб қабырғалары тең болады. Демек, $(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}-\overline{b})=\left|\overline{a}\right|^2-\left|\overline{b}\right|^2=0$.

Бұл тараушаның құндылығы – есепті шешу жолдары өте жақсы жан-жақты қарастырылған, бұның өзі оқушылардың геометрияны меңгерулеріне мүмкіншілік береді.

1-мысал. Төртбұрышты дұрыс призманың табан қабырғасы 15-ке, биіктігі 20-ға тең. Призманың табан қабырғасынан осы қабырғаны қимайтын диагоналіне дейінгі ең қысқа қашықтықты табу. (Призманың диагоналы сурет – 2).



Призманың диагоналы сурет – 2

І-тәсіл. (Векторлық тәсіл.) Шығарылуы:

$MN \perp AB$, $MN \perp CA_1$ делік, онда

$d((AB);(CA_1)) = |MN|$. Мұндағы

$d((AB);(CA_1))$ белгілеуі 2.2-суреттегі екі айқас түзудің арақашықтығын білдіреді. Векторлар енгізейік. $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AD}=\overline{b}$, $\overline{AA_1}=\overline{c}$ болсын. Есеп шарты бойынша

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=15$; $|\vec{c}|=20$. $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AB}$ және

$\overrightarrow{MN}\perp CA_1 \Rightarrow \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0$

$\vec{a}\perp\vec{b}, \vec{a}\perp\vec{c}, \vec{b}\perp\vec{c}$ ендеше

$\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}=0$. $\vec{a}^2=\vec{b}^2=|\vec{a}|^2$, $\vec{c}^2=|\vec{c}|^2$.

Көпбұрыш ережесі бойынша

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{CA_1}$

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ал $\overrightarrow{CA_1}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$

болғандықтан

$$\overrightarrow{MN}=x\vec{a}+\vec{b}+y(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})=(x-y)\vec{a}+(1-y)\vec{b}+y\vec{c}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}((x-y)\vec{a}+(1-y)\vec{b}+y\vec{c})\cdot\vec{a}=0\\ ((x-y)\vec{a}+(1-y)\vec{b}+y\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-y)\vec{a}^2+(1-y)\vec{a}\vec{b}+y\vec{c}\vec{a}=0\\ (x-y)\vec{a}\vec{c}-(x-y)\vec{a}^2-(x-y)\vec{a}\vec{b}+(1-y)\vec{b}\vec{c}-(1-y)\vec{b}\vec{a}-(1-y)\vec{b}^2+y\vec{c}^2-y\vec{c}\vec{a}-y\vec{c}\vec{b})=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-y)\vec{a}^2=0\\ -(x-y)\vec{a}^2-(1-y)\vec{b}^2+y\vec{c}^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}225(x-y)=0\\ -225(x-y)-225(1-y)+400y=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=y\\ 850y-225x-225=0\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{9}{25}$$

Сонымен,

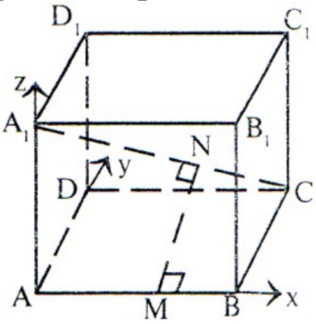
$$\overrightarrow{MN}=\frac{16}{25}\vec{b}+\frac{9}{25}\vec{c}\Rightarrow\ \overrightarrow{MN}=\sqrt{\frac{256}{625}\vec{b}^2+\frac{81}{625}\vec{c}^2}$$ яғни

$$\overrightarrow{MN}=\sqrt{\frac{256}{625}\cdot 225+\frac{81}{625}\cdot 400}=\sqrt{\frac{16\cdot 9(16+9)}{25}}=12$$

немесе $d((AB);(CA_1))=12$.

II-тәсіл. (Векторлық-координаттық тәсіл).

Кеңістіктегі координаттар жүйесін енгізіп (3-суретте көрсетілгендей) айқас түзулерге тиісті нүктелердің координаттарын анықтап жазайық.



Айқас түзулер сурет – 3

A(0;0;0), B(15;0;0), C(15;15;0), A$_1$ (0;0;20). $\overrightarrow{AB}(15;0;0),\overrightarrow{CA_1}(-15;-15;20)$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{CA_1}$ бұдан

$\overrightarrow{MB}(15x;0;0),\overrightarrow{CN}(-15y;-15y;20y)$ сонда

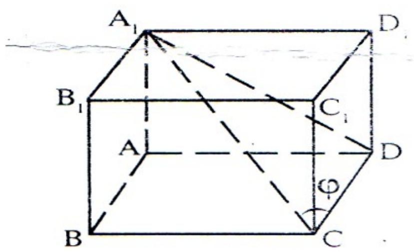
$\overrightarrow{MN}(15x-15y;15-15y;20y)$ болады.

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CA}=0\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}15(15x-15y)+0(15-15y)+0\cdot 20y=0\\ -15(15x-15y)-15(15-15y)+20\cdot 20y=0\end{cases}$$

Бұл жүйені шешсек $x=y=\frac{9}{25}$ ендеше

$$\overrightarrow{MN}(0;\frac{48}{5};\frac{36}{5})\Rightarrow\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{0^2+\left(\frac{48}{5}\right)^2+\left(\frac{36}{5}\right)^2}=12.$$

AB, CA_1 айқас түзулердің арасындағы бұрышты анықтайық. Ізделінді бұрышты $((AB)\wedge(CA_1))=\varphi$ деп белгілейік (4-сурет) [25].



Айқас түзулер арасындағы бұрыш сурет – 4

а) Косинустар теоремасын қолданамыз.

$((AB)\wedge(CA_1))=((DC)\wedge(CA_1))=\varphi$

$CA_1 = \sqrt{CB^2 + BA^2 + AA_1^2} = \sqrt{15^2 + 15 \quad + 20^2} = \sqrt{850}$

$DA_1 = \sqrt{AA_1^2 + AD^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{25}$

$\Delta CA_1D : \cos((DC)^\wedge CA_1)) = \dfrac{CA_1^2 + CD^2 - A_1D^2}{2CA_1 \cdot CD} = \dfrac{850 + 225 - 625}{2 \cdot \sqrt{850 \cdot 15}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$

$\varphi = \arccos \dfrac{3}{\sqrt{34}}$

ә) *Векторлық тәсіл.*

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA_1} = -\vec{a}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^{\,2}, \vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2 = 225$

$\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CA_1}\right| = \left|-\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{\left(-\vec{a}\right)^2} \cdot \sqrt{(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} \cdot \sqrt{\vec{c}^{\,2} + \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2}},$

$\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CA_1}\right| = \sqrt{15^2} \cdot \sqrt{20^2 + 15^2 + 15^2}$

$\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA_1}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CA_1}\right|} = \dfrac{225}{15\sqrt{850}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$

б) *Векторлық координаттық тәсіл.*

$\overrightarrow{BA}(-15;0;0), \overrightarrow{CA_1}(-15;-15;-20),$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA_1} = -15 \cdot (-15) + 0 \cdot (-15) + 0 \cdot 20 = 225$

$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(-15)^2 + 0^2 + 0^2} = 15$

$\left|\overrightarrow{CA_1}\right| = \sqrt{(-15)^2 + (-15)^2 + (-20)^2} = \sqrt{850}$

$\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA_1}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CA_1}\right|} = \dfrac{225}{15\sqrt{850}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$

Жауабы: 12; $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{34}}$

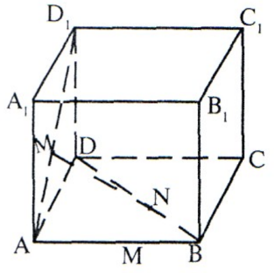
2-мысал. Қыры 1-ге тең кубтың екі көршілес жағының айқас диагональдарының ара қашықтығын табыңдар. («Математика және физика» №1-2005 ж. 17-бет). Бұл есепті шығарудың 7 тәсілі бар. Соның ішінде векторлы-координаттық тәсілі көрсетілген. Біз осы есепті шығарудың векторлық және тағы басқа тәсілдерін қарастырайық.

ІІІ-тәсіл (Векторлық тәсіл)

$NM \perp AD_1 \;\; NM \perp BD$ болсын онда

$d((BD);(AD_1)) = \left|NM\right|. \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c},$ деп белгілейік $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = 1$

(Векторлық тәсіл сурет - 5)



Векторлық тәсіл сурет – 5

$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1M} = x\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD_1} - y\overrightarrow{AD_1}$

$\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{AD_1} = \vec{b} + \vec{c}$ болғандықтан

$\overrightarrow{NM} = x(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{c} - y(\vec{b} + \vec{c}) = -x\vec{a} + (x - y)\vec{b} + (1 - y)\vec{c}$

$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0$, өйткені $\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}$

$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = |\vec{a}|^2$ $\begin{cases} \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0 \\ \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-x\vec{a} + (x - y)\vec{b} + (1 - y)\vec{c} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0 \\ (-x\vec{a} + (x - y)\vec{b} + (1 - y)\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$

демек,

$\overrightarrow{NM} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \Rightarrow |\overrightarrow{NM}| = \sqrt{\frac{1}{3}(\overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{a^2})},$

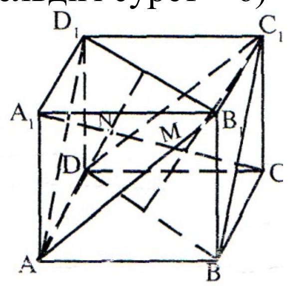
$\overrightarrow{a^2} = |\overrightarrow{a^2}| = 1$ сонда $d((BD);(AD_1)) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

IV-тәсіл. (Тең бөлікті қолдану тәсілі)

III-тәсілге қатысты сызбаға жүгінейік.

(«Математика және физика» №1-2005 ж, 18-бет).

Белгілі теорема бойынша AD_1B_1 мен BDC_1 жазықтықтары параллель болады. (Жазықтықтардың параллельдігі сурет – 6)



Жазықтықтардың параллельдігі сурет – 6

CA_1 диагоналы осы жазықтықтармен тең 3 бөлікке бөлінеді. Сонда BD мен AD_1 айқас түзулерінің қандай да бір нүктесінен (мысал үшін А нүктесінен) BDC_1 жазықтығына дейінгі қашықтыққа тең. Ендеше BDC_1A пирамидасының А төбесінен BDC_1 жазықтығына түсірілген биіктікті табайық. BDC_1A пирамидасының көлемін екі тәсілмен есептеп тауып теңестірейік. Кубтың көлемі:

$$V = V_{BCDC_1} + 2(V_{C_1DD_1A} + V_{C_1AD_1A_1}) + V_{BDC_1A} \Rightarrow V_{BDC_1A} = V - (V_{BCDC_1} + 2(V_{C_1DD_1A} + V_{C_1AD_1A_1}))$$

$$V_{C\ DD\ A} = \frac{1}{3} S_{DD_1A} \cdot D_1C_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$V_{C_1AD_1A_1} = \frac{1}{3} S_{AD_1A_1} \cdot D_1C_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$V_{BCDC_1} = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot CC_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$ сонымен

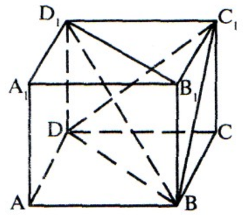
$$V_{BDC_1A} = 1 - \left(\frac{1}{6} + 2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)\right) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$V_{BDC_1A} = \frac{1}{3} S_{BDC_1} \cdot AX,$$ мұндағы $(AX) \perp (BDC_1)$ ал

$x \in (BDC_1), S_{BDC_1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ осыдан

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AX = \frac{1}{6} \Rightarrow AX = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

VI-тәсіл. D_1AD_1 түзуінің бір нүктесі болып табылады. Сондықтан ізделінді ара қашықтық D_1 нүктесінен BDC_1 жазықтығына дейінгі қашықтыққа тең, яғни BDC_1D_1 пирамидасының D_1 төбесінен BDC_1 табан жазықтығына түсірілген биіктікті табамыз (Пирамиданың табанға түсірілген биіктігі сурет – 7),



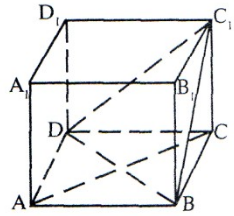
Пирамиданың табанға түсірілген биіктігі сурет – 7

BDC_1D_1 пирамидасының да көлемін екі тәсілмен тауып, теңестіреміз. $BDCB_1D_1C_1$ тік призманың көлемі:

$$V = V_{BDCC_1} + V_{B_1D_1C_1B} + V_{BDC_1D_1} \Rightarrow V_{BDC_1D_1} = V - (V_{BDCC_1} + V_{B_1D_1C_1B}) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

Осыдан алдыңғы тәсілдегідей көлемді пайдалансақ ізделінді биіктігіміз $\frac{1}{\sqrt{3}}$ болады.

VII-тәсіл. АС кесіндісі DC_1B жазықтығымен қақ бөлінетіндіктен (Кесіндінің жазықтықта қақ бөлінуі сурет – 8) А және С нүктелерінің DC_1B жазықтығына дейінгі қашықтықтары тең, сол себепті ол қашықтықтар DC_1BC пирамидасының С төбесінен табан жазықтығына түсірілген биіктігіне тең, ал ол биіктік $\frac{1}{\sqrt{3}}$-ке тең, өйткені

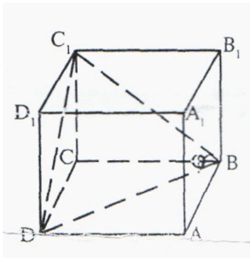


Кесіндінің жазықтықта қақ бөлінуі сурет – 8

$$V_{DC_1BC}=\frac{1}{6}.$$

Бұрышты анықтайық.

а) Тең қабырғалы үшбұрыштың қасиетін пайдаланайық (Тең қабырғалы үшбұрыштың қасиеті сурет – 9).



Тең қабырғалы үшбұрыштың қасиеті сурет – 9

$$((BD);\wedge(AD_1))=((BD);\wedge(BC_1))=\varphi=60^0$$

ә) Векторлық тәсіл.

$$\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a},\ \overrightarrow{AD_1}=\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD_1}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{b^2}=1$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{\overrightarrow{b^2}-2\vec{b}\vec{a}+\overrightarrow{a^2}}=\sqrt{1-0+1}=\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{AD_1}\right|=\sqrt{\overrightarrow{b^2}+2\vec{b}\vec{c}+\overrightarrow{c^2}}=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$$

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD_1}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD_1}\right|}=\frac{(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{\left|\vec{b}-\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}+\vec{c}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

б) Векторлы-координаталық тәсіл.

$A(0;0;0), D(0;1;0), D_1(0;1;1), B(1;0;0)$ болатындай етіп координаттар жүйесін енгізейік, сонда

$\overrightarrow{BD}(-1;1;0), \overrightarrow{AD_1}(0;1;1)$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD_1}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD_1}\right|} = \frac{-1\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 1}{\sqrt{-1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2}$$

Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{3}};60^0$

3-мысал. SABC пирамидасының табанында қабырғасының ұзындығы $4\sqrt{2}$ болып келетін тең қабырғалы ABC үшбұрышы жатыр. SC бүйір қырының ұзындығы 2-ге тең және ол табан жазықтығына перпендикуляр. Біреуі S нүктесі мен BC қырының ортасы арқылы өтіп, ал екіншісі C нүктесі мен AB қырының ортасы арқылы өтетін екі айқас түзудің бұрышы мен ара қашықтығын табу керек.

2.2. Жазықтықтағы векторлар қолданылатын есептерді шешу

Геометрияның теориясын дәлелдеу мен есептерін шешудегі барынша тиімді әдістердің бірі векторлық әдіс. Есептерді жалпы түрде шешуде де векторлардың атқаратын мәні зор. Бұл жөніндегі көптеген теориялық мәселелер мазмұнында теория тікелей қолданатын есептермен қосарланып баяндалу керек. Теориялық тұжырымдарды қолданып есептер шеше алған оқушы ғана сол оқу материалын меңгере алады. Орта мектептің 8-9 сынып оқушыларына көмектесу мақсатында векторлар қолданылатын есептерді талдап көрсетеміз.

1-есеп. S центірлі симметрия A нүктесін B нүктесіне бейнелейді. $\overline{OB}$ векторын $\overline{OS}$ және $\overline{OA}$ векторлары арқылы өрнектеңдер, мұндағы O жазықтықтың кез-келген нүктесі.

Шешуі: S центірлі симметрияның қасиеті бойынша $\overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SA}$.

Онда кез-келген O нүктесі үшін $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA}$, бұл арадан $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA}$.

2-есеп. Үшбұрыштың медианаларының ұзындығын оған іргелес жатқан қабырғалардың ұзындықтарының жарты қосындысынан кем екенін дәлелдеңдер.

Шешуі: 1-сурет бойынша параллелограмның ережесінен $\overrightarrow{CM} = 1/2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$. Мұндағы CM қабырғасы ABC үшбұрыштың медианасы. Демек $|\overrightarrow{CM}| = 1/2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$. Бірақ $\left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right| < \left|\overrightarrow{CA}\right| + \left|\overrightarrow{CB}\right|$, себебі $\overrightarrow{CA}$ мен $\overrightarrow{CB}$ коллинеар емес [2].

3-есеп. Үшбұрыштың екі медианасының қиылысу нүктесінде 1:2 қатынасында бөлінетінін дәлелдеу керек (Үшбұрыштың үш медианасы да бір нүктеде қиылысады).

Шешуі: 2-суреттен AK мен BN - ΔABC-ның медианалары болсын, O олардың қиылысу нүктесі. AOB мен KON үшбұрыштарының ұқсастығынан KN орта сызық болса, ол $\frac{1}{2}|AB|$-ға тең. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}$ деп белгілесек, $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BO}=y\overrightarrow{BN}$.

Бізге $x=y=\frac{2}{3}$ теңдігін орындалатынын дәлелдеу керек.

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\vec{C}.\overrightarrow{AO}$ мен $\overrightarrow{BO}$-нің мәндерін соңғы теңдікке қойсақ, $x\overrightarrow{AK}-y\overrightarrow{BN}=\vec{C}$, $\overrightarrow{AK}=1/2(\vec{c}+\vec{b})$ және $\overrightarrow{BN}=1/2(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$ екенін ескеріп, $x\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b})-y(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c})=\vec{c}$.

Бұл арада $(\frac{1}{2}x+y-1)\vec{c}+(\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}y)\vec{b}=\vec{o}$

$\vec{b}$ мен $\vec{c}$ коллинеар емес болғандықтан әрбір коэффициент нөлге тең $\frac{x}{2}+y-1=0, \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=0$.

Осы жүйені шешетін болсақ, $x=y=\frac{2}{3}$ шығады.

4-есеп. ABC-ның медианаларының қиылысу нүктесі М болсын. О-жақтықтың кез-келген нүктесі екен дейік. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеу керек[30].

Шешуі: 3-суреттен $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$

Бұл арада $\overline{AK} = 1/2(\overline{AB} + \overline{AC})$ және $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}\overrightarrow{OA}$ болатынын ескеріп орындарына қойсақ,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})) = \overrightarrow{OA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} +$$

$$+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

5-есеп. l_1, l_2, l_3-параллель үш түзудің бойынан қалауымызша үш нүкте алайық: l_1-дің бойынан $A_1, A_2, A_3; l_2$-дің бойынан $B_1, B_2, B_3; l_3$-тің бойынан C_1, C_2, C_3 нүктелерін алайық. $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$ үшбұрыштарының медианаларының қиылысу нүктелері бір түзу бойында жататынын дәлелдеу керек.

Шешуі: Декарт координаталар жүйесінен OX осі l_1, l_2, l_3 түзулеріне параллель болатындай түрде алайық сонда бұлардың ординатасы бірдей болады. B_1, B_2, B_3 нүктелері үшін де осындай тұжырым жасайық. C_1, C_2, C_3 нүктелері үшін де солай тұжырымдайық. Жазықтықтағы $A(x_1, y_1), B(x_2 y_2), C(x_3, y_3)$ нүктелерінен сызылған ABC үшбұрышының үш медианасының қиылысатын М нүктесінің координаталары $M(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2})$ болатынын ескеріп, $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$ үшбұрыштарының медианаларының қиылысу нүктелерінің ординаталары (екінші координаталары OX-ке параллель) бірдей болады. Демек, бұл үш нүкте бір түзудің бойында жатады.

6-есеп. Тікбұрышты ABC-ның $\angle C = 90^\circ, CM$ - биіктік жүргіземіз. $\overrightarrow{CM} = \lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CB}$ теңдігі орындалатындай λ, μ санын табыңдар.

Шешуі: Гипотенузаның бойынан алынған М нүктесінен BC мен AC катеттеріне перпендикуляр түсіреміз, олардың табандарын P және Q арқылы белгілейік. BCA, BPM, MPC үшбұрыштарының ұқсастығынан $\frac{BC - CP}{PM} = \frac{BC}{CA}; \frac{PM}{CP} = \frac{BC}{CA}$ бұл арада $a = BC, b = CA$ екенін ескеріп $\frac{a - CP}{PM} = \frac{a}{b}, CP = \frac{b}{a}PM$ осы мәнді бірінші теңдеудегі формуланың орнына қосайық, $\dfrac{a-\frac{a}{b}PM}{PM}=\dfrac{a}{b}, a-\dfrac{b}{a}PM=\dfrac{a}{b}PM, PM=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}=CQ$ және $CP=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$.

Демек, $\overrightarrow{CQ}=\dfrac{CQ}{CA}\overrightarrow{CA}=\dfrac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CA}$.

Дәл осылайша $\overrightarrow{CP}=\dfrac{CP}{CB}\overrightarrow{CB}=\dfrac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}$.

Сонымен $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$ ізделінді $\lambda=\dfrac{a^2}{a^2+b^2}, \mu=\dfrac{b^2}{a^2+b^2}$.

7-есеп. $|OA|\overrightarrow{OB}+|OB|\overrightarrow{OA}$ векторы AOB бұрышының биссектрисасы бойынша бағытталатынын дәлелдеу керек.

Шешуі: $|OA|\overrightarrow{OB}$ және $|OB|\overrightarrow{OA}$ векторларының ұзыдықтары тең ($|OA||OB|$ олар тең). Бұлар бойынша салынған параллелограмм ромб болып табылады. Ал, ромб диагоналдары оның бұрыштарының биссектрисасы болып табылады.

8-есеп. Егер $\overrightarrow{OC}$ векторы $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ векторына, ал $\overrightarrow{OB}$ векторы $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$ векторларына коллинеар болса, онда $\overrightarrow{OA}$ векторы $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ векторына коллинеар екенін дәлелдеңдер ($\overrightarrow{OB}$ мен $\overrightarrow{OC}$ векторлары коллинеар емес).

Шешуі: Есеп шарты бойынша $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OC}$ және $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\mu\overrightarrow{OB}$ бұлардың біріншісінен екіншісін мүшелеп азайтсақ, $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OC}-\mu\overrightarrow{OB}$.

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар болмаса, онда $k\vec{a}+l\vec{b}=p\vec{a}+q\vec{b}$ векторлық теңдігінде $k=p, l=q$ теңдіктері орындалады. Шынында да $(k-p)\vec{a}=(q-l)\vec{b}$ себебі $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар емес, сондықтан теңдік тек егер $k-p=0, q-l=0$ болғанда ғана орынлады. Біз қазір қарастырған $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ векторлары есеп шарты бойынша коллинеар емес. Демек, $\lambda=-1, \mu=-1$. Демек, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O}$, яғни $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$ бұл $\overrightarrow{OA}$ векторының $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ векторына колллинеар екенін білдіреді.

9-есеп. $\vec{a}$ мен $\vec{a}+2\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр екенін белгілі. Бұл жағдайда $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{b}\right|$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеу керек.

Шешуі: Кез-келген $\vec{c}$ векторын $\left|\vec{c}\right|^2 = \vec{c}\vec{c}$ деп көрсетуге болады, онда $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{b}\vec{b}$. Есеп шарты бойынша $\vec{a}(\vec{a}+2\vec{b}) = O$, яғни $\vec{a}\vec{a}+2\vec{a}\vec{b} = O$.

ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл дипломдық жұмыста математикада векторлық әдісті пайдаланып, оны шығарудың әдістері зерттелді. Атап айтсақ, математиканы оқыту және ғылыми-жаратылыслық білім беруде алатын орны және геометрия курсындағы векторлар ұғымына түсінік, математикада векторлардың қолданылулары, есептің түрлері және шығарылу жолдары қарастырылды.

Математикалық есептердің танымдық маңызы өте зор. Себебі есеп шығару барысында оқушылардың дүниеге ғылыми көзқарасын қалыптастыруға кең жол ашылады. Бұл мақсатта математиканың диалектикалық табиғатын көрсететін есептерге көбірек көңіл бөлген жөн. Ондай есептер алгебра және анализ бастамаларында, олардың геометриядағы, физикадағы, химиядағы колданымдарында, сондай-ақ физикалық, механикалық процестердің математикалық модельдерін жасауда жиі кездеседі.

Геометрия курсы қандай жолмен құрылмасын онда міндетті түрде теоремаларды дәлелдеудің, есептерді шығарудың әртүрлі әдістері қарастырылады. Олардың ішінде векторлық әдіс және координат әдісі ерекше орын алады. Геометрияның теориясын дәлелдеу мен есептерін шешудегі барынша тиімді әдістердің бірі *векторлық әдіс.* Есептерді жалпы түрде шешуде де векторлардың атқаратын мәні зор.

Тұрмыста және ғылым салаларында сан мәнімен ғана анықталатын шамалар кездеседі. Мәселен, аудан, көлем т.б.. Мұндай шамаларды скалярлық немесе сандық шамалар деп атайды. Ал, мәселен, үдеу, жылдамдық, күш, т. б, шамалары өздерінің сан мәндерімен қоса бағыттары берілгенде ғана анықталады. Мұндай шамаларды векторлық деп атайды.

Векторлық шамаларды геометриялық тұрғыдан алғанда бағытталған кесінді арқылы бейнелейді. Сонымен жазықтықтағы вектор-бұл бағыты бар кесінді. Векторлардың басты қасиеттері оларды қосуға, өзара көбейтуге болатыны, оның үстіне бұл амалдар сандардағы негізгі заңдарды қанағаттандырады. Маңызды бір өзгешелігі векторлар қосындысы қайтадан вектор, векторлар көбейтіндісі сан, кейде мұны скаляр көбейтіндісі деп атайды.

Математикада векторлық әдісті пайдаланып есептерді шешудің алуан түрлері кездеседі. Атап айтқанда, жоғары тоқталып өткен бағытты кесінділер мен параллель көшіруге берілетін есептерді шешу, айқас түзулердің арақашықтығымен бұрышын анықтауда векторлық тәсілді қолдану; жазықтықтағы векторлар қолданылатын есептерді шешу; геометриялық және тригонометриялық теңсіздіктерді векторлық әдісті пайдаланып дәлелдеу т.б.

Оқушы есеп шығарудың әдіс тәсілдерін меңгеру арқасында ол берілген есепке лайық тәсілді таңдай алады. Сөйтіп оның біртіндеп ептілігі мен шеберлігі қалыптасады. Жоғарыда қарастырылған есептердің жан-жақты шешімі оқушы біліктілігін арттыруға геометрияны жақсы меңгеруге септігін тигізері сөзсіз.

«Векторлар» тақырыбындағы білімнің жоғарыда келтірілген түрлеріне кеңірек тоқталып, есептерді векторлық әдіс арқылы шешу амалдарын және білімді жүйелеу мақсатында оны оқып-үйренуде кездесетін қиындықтарды жою жолдары қарастырылды.

Мектеп геометриясының көптеген теоремаларының векторлық дәлелдеулерімен оқушыларды таныстыру аса тиімді болады. Өйткені оқушылар векторларды қолдануымен танысады, геометрия теоремаларының дәлелдеулерін тереңірек түсінетін болады.

Дипломдық жұмысты орындау нәтижесінде келесідей қорытындыға келеміз:

1. Стереометриялық есептерді шығаруда векторларжы кеңінен қолданып, өте күрделі және басқа әдістерді қолданып шығаруға мүмкін емес есептерді жеңіл жолмен шығаруға болатынына көзіміз жетті.

2. Векторларды қолданудағы есептерді екі топқа бөліп, оларды шешуде векторлардың қасиеттері мен қолданылатын амалдарға байланысты аффиндік және метрикалық деп бөлуіміз өте дұрыс екен. Өз кезегінде әр бағытты есептің берілу шартына байланысты және топтарға бөліп қарастырамыз.

3. Жұмыстың екінші тарауының алдында берілген формулалар мектеп курсы математикасының бағдарламасында қамтылған, сондықтан оларды дәлелдеуді оқушылардың өздеріне ұсынса болады.

4. Дипломдық жұмыс үшін бұл тақырыпты таңдап алудың себебі, оқушылар планиметриялық есептерді векторларды қолданып шығаруды негізінен біледі. Ал стереометриялық есептерді шығару өте қиын.

5. Дипломдық жұмыста қарастырылған есептер негізінен өте қиын есептерге жатады, сондықтан бұл есептерді шығару сыныптан тыс факультатив сабақтармен математикалық үйірмелерде қарастырған жөн болады.

6. Дипломдық жұмысты метрикалық есептерді шығарудың әдістеріне аса көңіл бөлінген, себебі бұл есептердің кейбіреуі векторларды қолданбай шығаруға болады, оқушы салыстырып векторларды қолданудың өте тиімді екенін өздері түсінеді.

7. Дипломдық жұмысты, оқушыларды математикалық олимпиадаға дайындау кезінде де қолдануға болады.

Қорыта келгенде оқу үрдісінде әр түрлі тәсілдерді пайдалану сабақтың сапасын арттыруға, оқушылардың белсенділігінің, пәнге деген қызығушылығы қалыптастыруға, ең негізгісі оқушылардың білім сапасының артуына апаратын бірден - бір жолы деп түсінемін.

Математикада векторлық әдісті пайдаланып есептерді шешудің алуан түрлері кездеседі. Атап айтқанда, жоғары тоқталып өткен бағытты кесінділер мен параллель көшіруге берілетін есептерді шешу, айқас түзулердің арақашықтығымен бұрышын анықтауда векторлық тәсілді қолдану; жазықтықтағы векторлар қолданылатын есептерді шешу; геометриялық және тригонометриялық теңсіздіктерді векторлық әдісті пайдаланып дәлелдеу т.б.

Оқушы есеп шығарудың әдіс тәсілдерін меңгеру арқасында ол берілген есепке лайық тәсілді таңдай алады. Сөйтіп оның біртіндеп ептілігі мен шеберлігі қалыптасады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Қазақстан Республикасында білімді дамытудың 2015 – 2020 жылдарға арналған мемелекеттік бағдарламасы. Астана, 2014 ж., 46 б.

2 А.Н.Шыныбеков Геометрия 9 сынып оқулығы Алматы «Атамұра» 2013ж.

3 А.Н.Шыныбеков Геометрия 9 сынып оқулығы Алматы «Атамұра» 2013ж.

4 В.Гусев, И.Бекбоев, Ж.Қайдосов, А.Абдиев. Геометрия Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану - математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық Алматы Мектеп 2012ж.

5 С.Е. Чакликова, Ж.М. Нурпейис, Г.Ш. Калдыбаев Геометрия. Учебник для 9 классов общеобразовательных школ Алматы Мектеп 2013ж.

6 Аргунов Б.И. Балк «Элементарная геометрия» Учебное пособие для пединститутов. М.: Просвещение, 2012ж.

7 Александров А.Д. и др. Геометрия 10-11. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики. М.: Просвещение, 2012.

8 В.А.Гусев, Ю.М.Колягин, Г.Л. Лукнин. Векторы в школном курсе геометрии М.: Просвещение, 2012.
9 Александров А.Д. и др. Геометрия 10-11. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики. М.: Просвещение, 2012.
10 В.Г.Чичигин. «Методика предподаванию геометрии». М.: Учпедиз. 2012ж.
11 Фетисов А.И. Геометрия. Учебное пособие по программе старших классов. М. АПН, 2013ж.
12 Н.Әшірбаев, П.Дүйсебаева, Т. Сұлтанбек, Ж. Қаратаев. «Аналитикалық геометрия» Шымкент. 2012ж.
13 Погорелов А.В. Геометрия 7-11. Алматы, 2012ж.
14 С.Е. Шәкілікова, Б.М. Саяқова. Геометрия 9 сынып әдістемелік нұсқау Алматы Мектеп 2013ж.
15 И.Бекбоев, А.Абдиев, Ж.Қайдосов, Г. Хабарова. Геометрия. Жалпы білім беретін мектептің 9 сыныбына арналған оқулық Алматы Мектеп 2012ж.
16 И.Бекбоева және т.б. Геометрия 10 сынып оқулығы, Алматы «Мектеп» 2014ж.
17 Бидосов Ә. Математиканы оқыту методикасы А, Мектеп баспасы 2013 ж.
18 Кенеш Ә. Математикалық ұғымдарды оқыту негіздері А, Мектеп баспасы 2012 ж.
19 Көбесов А. Математика тарихы. Алматы Қазақ университеті 2013.
20 Математика тарихы». А.Көбесов. Алматы, «Қазақ университеті», 2013.
21 Аналитикалық геометрия. С.Аяпбергенов, мектеп баспасы, Алматы 2013
22 Аналитикалық геометрия және сызықтық алгебра элементтері.
23 Ж.Қ. Қайдасов, Ә.К. Қағазбаева, Н.Асқарова Ақтөбе, 2012
24 Жоғары математикаға кіріспе. О:А. Жәутіков «Мектеп», 2014ж.
25 Математика және физика журналы, 2014, №4