ОТЧЕТ

По лабораторной работе по математике (ЛРМ 1, Вариант 1)

Ф.И.О.: Ярмухаметова Э.В.______________, гр. _2231з_______

Дата: 21.03.2023

Тема:

«Геометрические вероятности. Имитационное компьютерное моделирование вероятностных опытов».

Цель.

Овладеть практическими навыками и закрепить теоретический материал по вычислению вероятностей по геометрическому способу.

Решить задачу: «На окружности случайным образом поставлены три точки A, B, C. Вариант I. Какова вероятность того, что ΔABC остроугольный?»

Теория.

Предполагается, что вероятность попадания «случайно брошенной» точки в произвольное подмножество F пропорционально мере этого подмножества и не зависит ни от его расположения, ни от его формы. Геометрическая вероятность сохраняет свойства вероятности событий, введенных для классического определения вероятностей, но расширяет возможности определения вероятности, когда имеется бесконечное число равнозначных исходов.

Определение. Геометрической вероятностью P(F) события F называется отношение меры μ (по Лебегу) множества F, благоприятствующего событию F, к мере вероятностного пространства Ω всех возможных равновероятных исходов:

P(F) = $\frac{\mu(F)}{\mu(\Omega)}$.

Понятие мера множества систематически изучается в курсе «Теория функций действительного переменного» [4]. Укажем кратко наиболее употребимые меры:

Вероятностное пространство Ω	Мера пространства μ(Ω) (по Лебегу)
На прямой	Длина l промежутка
На плоскости	Площадь S области
В пространстве	Объем V тела

Таким образом, для решения задачи мы должны ввести вероятностное пространство Ω, знать его меру Лебега $\mu(\Omega)$, указать множество F, благоприятствующее событию F, вычислить его меру $\mu(F)$ и, соответственно, вычислить вероятность P(F).

Ход работы:

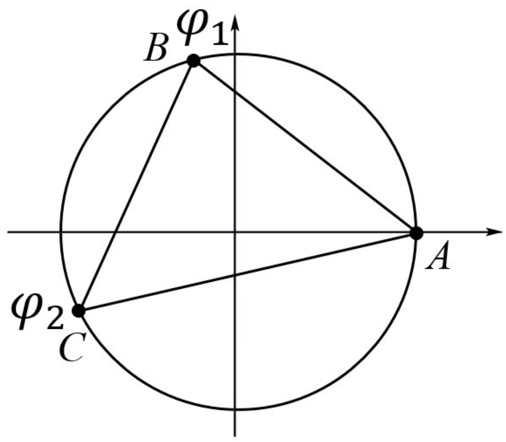
По условию событие F – «Получился остроугольный треугольник».

Необходимо выполнить несколько шагов:

1° Так как достаточно поставить на окружности 2 случайные точки, зафиксировав третью, то размерность вероятностного пространства Ω равна 2. Введем 2 непрерывных случайных величины: φ_1 – круговая координата первой точки, φ_2 – круговая координата второй точки.

2° Определяем диапазон изменения φ_1 и φ_2 и соответствующую меру μ(Ω) пространства Ω всех возможных равновероятных исходов. Можно принять (в градусах): 0 ≤ φ_1 ≤ 360 и 0 ≤ φ_2 ≤ 360. Пространство Ω есть квадрат 360×360 град2 на плоскости Oxy; его мера (площадь) равна μ(Ω) = 3602.

3° Определим благоприятствующий диапазон изменения φ_1 и φ_2 и соответствующую меру μ(F) множества F исходов, благоприятствующих событию F путем решения неравенств на плоскости Oxy в пределах Ω. Для этого необходимо вычислить углы получившегося треугольника.



Тогда

$$\measuredangle A=\frac{1}{2}\left(\varphi_2-\varphi_1\right),\ \measuredangle C=\frac{1}{2}\varphi_1,\ \measuredangle B=\frac{1}{2}\left(360-\varphi_2\right)$$

Условие остроугольности треугольника ABC:

$$\measuredangle A=\frac{1}{2}\left(\varphi_2-\varphi_1\right)<90 \Leftrightarrow \varphi_2<180+\varphi_1$$

$$\measuredangle C=\frac{1}{2}\varphi_1<90 \Leftrightarrow \varphi_1<180$$

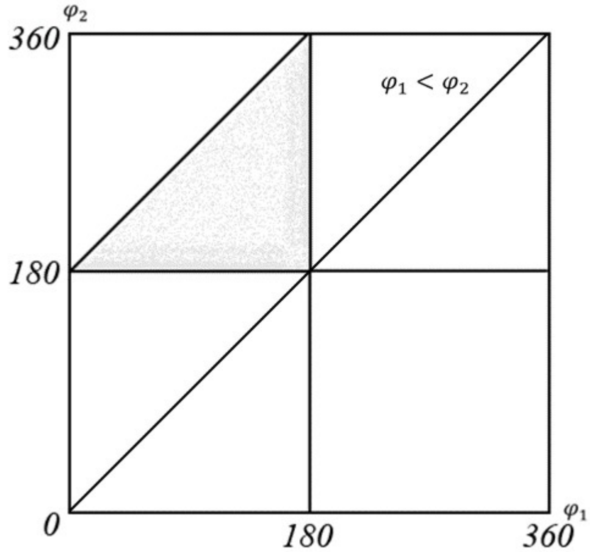
$$\measuredangle B=\frac{1}{2}\left(360-\varphi_2\right)<90 \Leftrightarrow \varphi_2>180$$

Учтем еще условие

$$\varphi_1 < \varphi_2$$

что соответствует верхней левой половине квадрата.

В квадрате 360×360 это соответствует заштрихованной области:



По площади заштрихованная область составляет 1/8 часть всего квадрата. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{8} : \frac{1}{2} = 0,25$.

Проведем имитационное компьютерное моделирование вероятностных опытов.

Для этого потребуется следующее.

1°. С помощью генератора случайных чисел генерируем два случайных числа 0 ≤ x ≤ 360 и 0 ≤ y ≤ 360 (градусы). Это можно сделать с помощью функции rnd()*360 языка VBA (встроен в MS Excel).

2°. Напишем программу, которая на основе этих чисел вычисляет углы получившегося треугольника и проверяет условия остроугольности. В случае успеха счетчик успехов k увеличиваем на единицу.

Программу на языке Visual Basic for Applications (разновидность VB, встроенная в MS Excel), осуществляющей моделирование, приведем ниже.

```
Sub Лаб_1()
' Лаб_1 Макрос
   Dim i, n, k As Long
   Dim ii As Integer
   Dim x, r, fi1, fi2 As Double
   r = 360
' Ввод числа экспериментов
   n = Cells(2, "A")
   Randomize
   k = 0
   For i = 1 To n
' Генерация двух дуг на окружности
      fi1 = Rnd() * r
      fi2 = Rnd() * r
      x = fi2
      If fi2 < fi1 Then
        fi2 = fi1
        fi1 = x
      End If
' Вычисление углов
      a = (fi2 - fi1) / 2
      c = fi1 / 2
      b = (r - fi2) / 2
' Проверка условий остроугольности
If a < 90 And b < 90 And c < 90 Then k = k + 1
   Next i
   ii = 2
   Do While Cells(ii, "C") <> ""
     ii = ii + 1
   Loop
' Вывод результатов эксперимента
   Cells(ii, "C") = n
   Cells(ii, "D") = k
   Cells(ii, "E") = k / n
End Sub
```

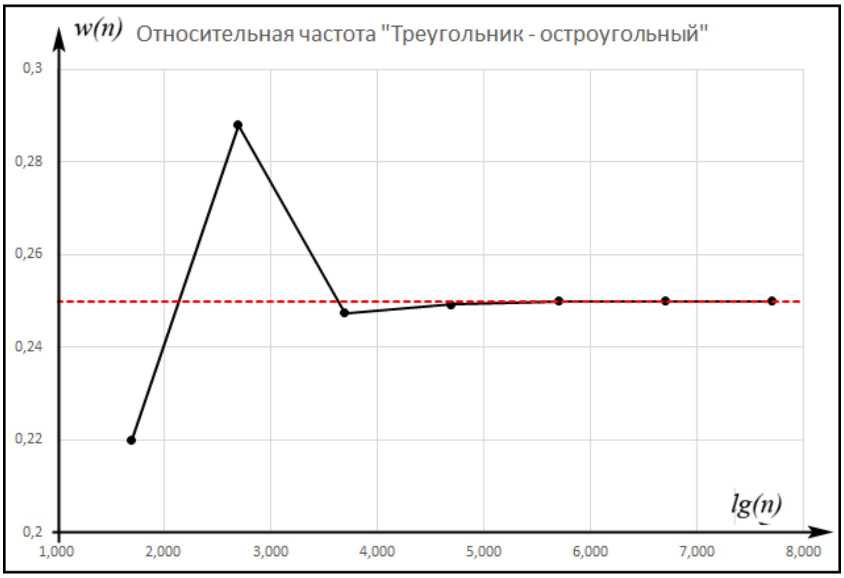
3°. Находим относительную частоту события F – «Треугольник остроугольный» по формуле w(F) = $\frac{k}{n}$. Меняя число n имитационных опытов, будем получать соответствующие частоты событий $k(n)$ и соответствующие относительные частоты w = $\frac{k}{n}$.

5°. Результаты каждого имитационного опыта заносим в итоговую отчетную таблицу и строим ломаную линию относительных частот в сопоставлении с теоретической вероятностью события F.

Результаты и обсуждение.

Результаты имитационного моделирования задачи о гипотезе «Треугольник - остроугольный» для треугольника, вписанного в окружность, приведем в следующей таблице:

n	lg(n)	k	p
50	1,699	11	0,22
500	2,699	144	0,288
5000	3,699	1237	0,2474
50000	4,699	12462	0,24924
500000	5,699	124931	0,249862
5000000	6,699	1249397	0,2498794
50000000	7,699	12499977	0,250000



Выводы.

Для заданного случайного события вычислена теоретическая вероятность, используя геометрическое определение вероятности на плоскости. Написана программа имитационного моделирования, которая при большом числе испытаний (формально при $n \to \infty$) подтвердила, что относительные частоты стремятся к теоретической вероятности события F, равной 0,25.

Список цитированной литературы.

[1] Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа [издания разные лет].

[2] Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974. – 124 с. URL: https://b-ok.cc/dl/2339066/a9821b

[3] Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: Айрис-Пресс, 2004. – 256 с.

[4] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 2004. – 572 с. URL: https://studizba.com/files/show/pdf/40466-3-a-n-kolmogorov-s-v-fomin--elementy.html

ОТЧЕТ

По лабораторной работе по математике (ЛРМ 2)

Ф.И.О.: Ярмухаметова Э.В., гр. МАТ-2231zДата: 21.03.2023

Тема:

«Геометрические вероятности. Имитационное компьютерное моделирование вероятностных опытов».

Цель.

Овладеть практическими навыками и закрепить теоретический материал по вычислению вероятностей по геометрическому способу.

Решить задачу: «От трех палочек одинаковой длины случайным образом отломили по одному кусочку. Какова вероятность того, что из них удастся составить треугольник?»

Теория.

Предполагается, что вероятность попадания «случайно брошенной» точки в произвольное подмножество F пропорционально мере этого подмножества и не зависит ни от его расположения, ни от его формы. Геометрическая вероятность сохраняет свойства вероятности событий, введенных для классического определения вероятностей, но расширяет возможности определения вероятности, когда имеется бесконечное число равнозначных исходов.

Определение. Геометрической вероятностью P(F) события F называется отношение меры μ (по Лебегу) множества F, благоприятствующего событию F, к мере вероятностного пространства Ω всех возможных равновероятных исходов:

$$P(F) = \frac{\mu(F)}{\mu(\Omega)}.$$

Понятие мера множества систематически изучается в курсе «Теория функций действительного переменного» [4]. Укажем кратко наиболее употребимые меры:

Вероятностное пространство Ω	Мера пространства μ(Ω) (по Лебегу)
На прямой	Длина l промежутка
На плоскости	Площадь S области
В пространстве	Объем V тела

Таким образом, для решения задачи мы должны ввести вероятностное пространство Ω, знать его меру Лебега $\mu(\Omega)$, указать множество F, благоприятствующее событию F, вычислить его меру $\mu(F)$ и, соответственно, вычислить вероятность P(F).

Ход работы:

По условию событие F – «Удалось составить треугольник».

Необходимо выполнить несколько шагов:

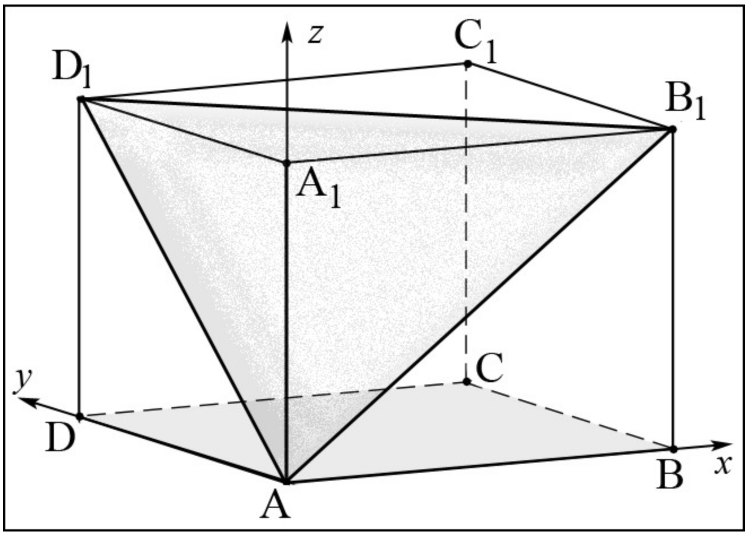
1° Так как необходимо иметь 3 отрезка случайной длины, то размерность вероятностного пространства Ω равна 3. Введем 3 непрерывных случайных величины: x – длина первого кусочка, y – длина второго кусочка, z – длина третьего кусочка.

2° Определяем диапазон изменения x, y и z и соответствующую меру μ(Ω) пространства Ω всех возможных равновероятных исходов. Можно принять (в долях): 0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ 1 и 0 ≤ z ≤ 1. Пространство Ω есть куб 1×1×1 в пространстве *Oxyz*; его мера (объем) равна μ(Ω) = 1.

3° Определим благоприятствующий диапазон изменения x, y и z и соответствующую меру μ(F) множества F исходов, благоприятствующих событию F путем решения неравенств в пространстве *Oxyz* в пределах Ω. Для этого необходимо выполнить «условия треугольника»:

$$\begin{cases} x+y-z>0\,, \\ x+z-y>0\,, \\ y+z-x>0 \end{cases}$$

Область куба, где выполняются все три условия, можно представить на рисунке



Здесь заштрихованная плоскость соответствует уравнению $x+y-z=0$, а области, противоположной первому неравенству, соответствует пирамида с основанием AB_1D_1 и вершиной A_1. Можно подсчитать, что ее объем равен $\frac{1}{6}$. Аналогично неравенством, противоположным второму, отрезается область с вершиной D тоже объемом $\frac{1}{6}$. Неравенством, противоположным третьему, отрезается область с вершиной B тоже объемом $\frac{1}{6}$. Таким образом, отрезается объем, равный $\frac{1}{2}$, а значит оставшийся объем равен $\frac{1}{2}$ и все точки этой области удовлетворяют всем трем «неравенствам треугольника».

Значит, искомая вероятность равна $0,5$.

Проведем имитационное компьютерное моделирование вероятностных опытов.

Для этого потребуется следующее.

1°. С помощью генератора случайных чисел генерируем три случайных числа 0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ 1 и 0 ≤ y ≤ 1. Это можно сделать с помощью функции rnd() языка VBA (встроен в MS Excel).

2°. Напишем программу, которая на основе этих чисел проверяет выполнение трех «неравенств треугольника». В случае успеха счетчик успехов k увеличиваем на единицу.

Программу на языке Visual Basic for Applications (разновидность VB, встроенная в MS Excel), осуществляющей моделирование, приведем ниже.

```
Sub Лаб_2()
' Лаб_2 Макрос
    Dim i, n, k As Long
    Dim ii As Integer
    Dim l1, l2, l3 As Double
' Ввод числа экспериментов
    n = Cells(2, "A")
    Randomize
```

```
k = 0
' Генерация трех сторон треугольника
For i = 1 To n
   l1 = Rnd()
   l2 = Rnd()
   l3 = Rnd()
' Проверка условий существования треугольника
   If l1 < l2 + l3 And l2 < l1 + l3 And l3 < l1 + l2 Then k = k + 1
Next i
ii = 2
Do While Cells(ii, "C") <> ""
  ii = ii + 1
Loop
' Вывод результатов эксперимента
Cells(ii, "C") = n
Cells(ii, "D") = k
Cells(ii, "E") = k / n
End Sub
```

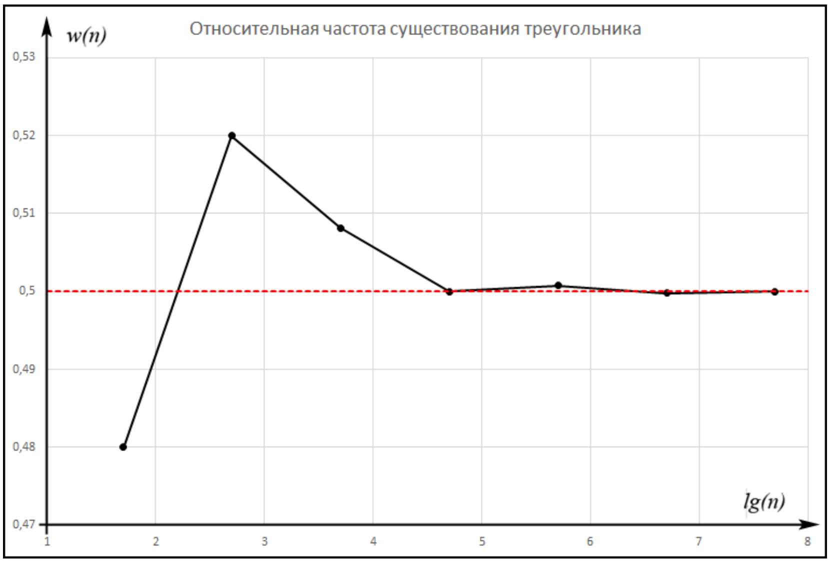
3°. Находим относительную частоту события F – «Треугольник существует» по формуле w(F) = $\frac{k}{n}$. Меняя число n имитационных опытов, будем получать соответствующие частоты событий $k(n)$ и соответствующие относительные частоты w = $\frac{k}{n}$.

Результаты и обсуждение.

Результаты каждого имитационного опыта заносим в итоговую отчетную таблицу и строим ломаную линию относительных частот в сопоставлении с теоретической вероятностью события F.

Результаты имитационного моделирования задачи о существовании треугольника:

n	lg(n)	k	p
50	1,699	24	0,48
500	2,699	260	0,52
5000	3,699	2541	0,5082
50000	4,699	24999	0,49998
500000	5,699	250387	0,500774
5000000	6,699	2499140	0,499828
50000000	7,699	25000313	0,500006



Выводы.

Для заданного случайного события вычислена теоретическая вероятность, используя геометрическое определение вероятности в пространстве. Написана программа имитационного моделирования, которая при большом числе испытаний (формально при $n \to \infty$) подтвердила, что относительные частоты стремятся к теоретической вероятности события F, равной 0,5.

Список цитированной литературы.

[1] Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа [издания разные лет].

[2] Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974. – 124 с. URL: https://b-ok.cc/dl/2339066/a9821b

[3] Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: Айрис-Пресс, 2004. – 256 с.

[4] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 2004. – 572 с. URL: https://studizba.com/files/show/pdf/40466-3-a-n-kolmogorov-s-v-fomin--elementy.html

3° Самостоятельное решение упражнений с оформлением в виде файла MS Word

В а р и а н т I.

З а д а ч а I.1°. Весной катер идёт против течения реки в 2⅔ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в 1½ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Решение.

Введем неизвестные: $v_к$ – собственная скорость катера (в неподвижной воде), $v_р$ – скорость течения реки весной. Тогда уравнение для весны:

$$v_к - v_р = (v_к + v_р)\cdot\frac{3}{8}$$

$$v_к - v_р - 1 = (v_к + v_р - 1)\cdot\frac{2}{3}$$

$$8v_к - 8v_р = 3v_к + 3v_р$$

$$5v_к = 11v_р$$

$$v_к = \frac{11}{5}v_р$$

Уравнение для лета:

$$2v_к + 2v_р - 2 = 3v_к - 3v_р + 3$$

$$v_к = 5v_р - 5$$

Приравниваем скорости катера:

$$\frac{11}{5}v_р = 5v_р - 5$$

$$11v_р = 25v_р - 25$$

$$14v_р = 25$$

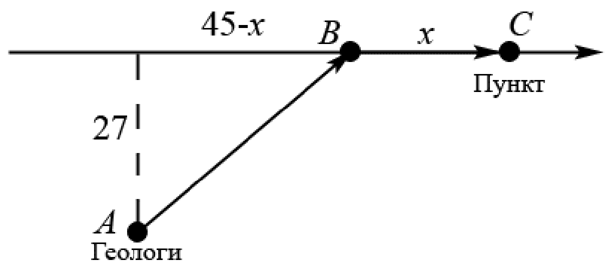
$$v_р = \frac{25}{14} \approx 1,79\,\frac{км}{ч}$$

Ответ: $\frac{25}{14}\frac{км}{ч}$.

З а д а ч а I.2°. Вездеход, находящийся на пересеченной местности в 27 км от прямолинейной шоссейной дороги, должен доставить геологов в населенный пункт, расположенный на шоссе. Расстояние от точки шоссе, ближайшей к вездеходу, до населенного пункта равно 45 км. По пересеченной местности вездеход двигается со скоростью 44 км/ч, а по шоссе – 55 км/ч. На каком расстоянии от населенного пункта вездеход должен выехать на шоссе, чтобы время движения было наименьшим?

Решение.

Рассмотрим схему движения вездехода:



Введем неизвестное x - расстояние ВС от точки выхода вездехода на шоссе до населенного пункта. Тогда дорога по пересеченной местности равна

$$AB=\sqrt{27^2+(45-x)^2}$$

Общее время движения вездехода равно

$$T(x)=\frac{\sqrt{27^2+(45-x)^2}}{44}+\frac{x}{55}$$

Вычислим производную от этой функции

$$T'(x)=\frac{-2\cdot(45-x)}{44\cdot 2\cdot\sqrt{27^2+(45-x)^2}}+\frac{1}{55}$$

Решим уравнение:

$$T'(x)=0$$

$$225-2250x+25x^2=16\cdot(2025-90x+x^2+729)$$

$$9x^2-810x+6561=0$$

$$x^2-90x+729=0$$

$$D=1296=36^2\ x_{1,2}=45\pm 36=\left[\begin{matrix}9\\81\end{matrix}\right.$$

Значение 81 км слишком велико, не подходит под условия задачи.

Рассмотрев окрестность точки $x=9$, видим, что производная меняет знак с минуса на плюс, значит найденная точка – минимум функции $T(x)$.

Ответ: $9\,км$.

З а д а ч а I.3°. Двум дорожно-строительным бригадам поручено строительство шоссейной дороги между пунктами А и В. В течение 40 дней бригады работали отдельно, сначала первая, потом вторая, причем одна из них выполнила 1/3, а другая 1/6 всей работы. На 41 день бригады стали работать совместно и оставшуюся часть дороги построили за 18 дней. Определить, за сколько дней каждая бригада, работая отдельно, могла бы построить шоссе.

Решение.

Введем неизвестные: p_1, p_2– производительности бригад с размерностью, равной доли всей работы, выполненной в день, x - дн. – работала первая бригада отдельно, y дн. – работала вторая бригада отдельно. Составим уравнения:

$$\begin{cases} p_1 x = \frac{1}{3} \\ p_2 y = \frac{1}{6} \\ x + y = 40 \\ p_1 + p_2 = \frac{1}{36} \end{cases}$$

Последнее уравнение вытекает из условия, что две бригады (с производительностью $p_1 + p_1$) выполнили за 18 дней половину всей работы.

Выразим из третьего уравнения $y = 40 - x$ и подставим во второе: $p_2(40 - x) = \frac{1}{6}$.

Первое уравнение умножим на p_2: $p_2 p_1 x = \frac{p_2}{3}$, новое второе умножим на p_1: $p_1 p_2 (40 - x) = \frac{p_1}{6}$ и сложим: $40 p_2 p_1 = \frac{p_2}{3} + \frac{p_1}{6}$.

Из последнего уравнения выразим $p_2 = \frac{1}{36} - p_1$ и подставим в предыдущее.

$$40\left(\frac{1}{36} - p_1\right) p_1 = \frac{p_1}{6} + \frac{1}{108} - \frac{p_1}{3}$$

$$120 p_1 - 4320 p_1^2 = 1 = 18 p_1$$

$$4320 p_1^2 - 138 p_1 + 1$$

$$D = 441 = 21^2 \; p_{11,2} = \frac{69 \pm 21}{4320} = \left[\begin{array}{l} \frac{90}{4320} = \frac{1}{48} \Rightarrow p_2 = \frac{1}{144} \Rightarrow x = 48 \\ \frac{48}{4320} = \frac{1}{90} \Rightarrow p_2 = \frac{1}{60} \Rightarrow x = 30,\; y = 10 \end{array} \right.$$

Подходит ответ: $p_1 = \frac{1}{90}$, $p_2 = \frac{1}{60}$

Ответ: первая бригада, работая отдельно, могла бы построить шоссе за 90 дней, вторая бригада, работая отдельно, могла бы построить шоссе за 60 дней.

З а д а ч а I.4°. При изготовлении консервной банки цилиндрической формы заданной вместимости V требуется металл двух видов: на боковую поверхность – I сорта, на основания – II сорта, стоимость которого в 2 раза меньше, чем стоимость I сорта. При каком отношении высоты банки к радиусу ее основания затраты на металл будут наименьшими?

Решение.

Введем R – радиус основания цилиндра, H - высота цилиндра. Тогда объем цилиндра равен

$$V=\pi R^2 H \text{ , откуда } R=\sqrt{\frac{V}{\pi H}}$$

Площадь двух оснований цилиндра равна $2\pi R^2$, площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi RH$. Пусть s – стоимость одного квадратного метра металла для оснований, тогда $2s$ – стоимость металла для боковой поверхности. Общая стоимость металла для всей банки равна

$$P=2\pi s\cdot\left(2RH+R^2\right)=2\pi s\cdot\left(2\sqrt{\frac{V}{\pi H}}H+\frac{V}{\pi H}\right)=2s\cdot\left(2\sqrt{\pi VH}+\frac{V}{H}\right)$$

От последнего выражения вычислим производную по H и приравняем ее к нулю:

$$P'(H)=2s\cdot\left(\frac{2\sqrt{\pi V}}{2\sqrt{H}}-\frac{V}{H^2}\right)$$

$$P'(H)=0$$

$$\frac{\sqrt{\pi V}}{\sqrt{H}}=\frac{V}{H^2},\ H^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{V}{\pi}},\ H=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Подставим это значение в выражение для R. Получим

$$R=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Тогда отношение $H:R=1$.

Ответ: 1.

З а д а ч а I.5°. Иван, Тит и Фома подозреваются в поджоге кооперативной палатки. На допросе они дали следующие показания:

Иван: Поджег Тит.

Тит: Я не поджигал.

Фома: Я не поджигал.

Дополнительное расследование показало, что ровно один из них сказал правду. Кто поджег палатку?

Решение.

Разберем все возможные случаи ответа на вопрос: «Кто поджег палатку?»

Кто поджег?	Ответы подозреваемых		
	Иван	Тит	Фома
Иван	Ложь	Истина	Истина
Тит	Истина	Ложь	Истина
Фома	Ложь	Истина	Ложь

Видим, ситуация, когда ровно один сказал правду (истина), реализовалась только, если Фома поджег палатку.

Ответ: Фома.