Вычисление определенных интегралов методом прямоугольников

При вычислении определенного интеграла методом прямоугольников подынтегральная функция f(x) на интервале интегрирования заменяется полиномом нулевой степени, т.е. константой. Вычисление определенного интеграла по методу прямоугольников сводится к вычислению площади прямоугольника, одна из сторон которого – длина отрезка интегрирования (или шаг разбиения по оси x), другая – высота прямоугольника (вычисляется по значению функции в начале, в конце или в середине интервала интегрирования. В зависимости от этого и метод называется: метод левых, правых или средних прямоугольников). Будем линейно аппроксимировать функцию f(x) на некотором разбиении отрезка [a,b] на n частей.

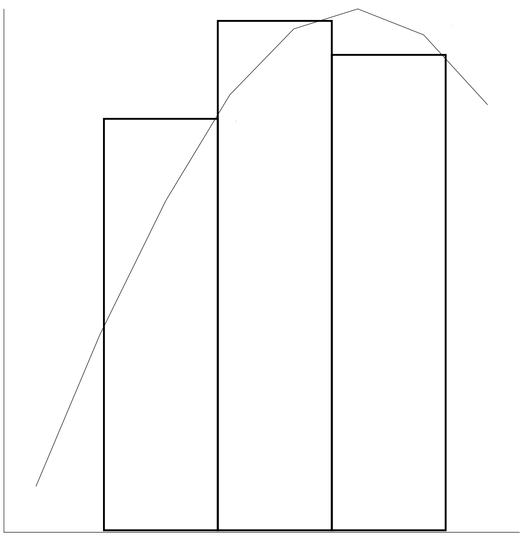
Формула для приближенного вычисления интеграла будет иметь вид:

$$I = \sum_{i=1,n} S_i$$

где $S_i = f_i * h_i$ – площадь i – го прямоугольника, f_i - значение функции в некоторой точке внутри i – го отрезка, h_i – ширина этого отрезка. В частном случае, когда все отрезки имеют одинаковую ширину, h_i = h =(b-a)/n.

Если высота i – го прямоугольника вычисляется по значению подынтегральной функции в левой границе прямоугольника – этот метод называется методом левых прямоугольников, соответственно при вычислении высоты прямоугольника по значению подынтегральной функции в правой границе прямоугольника называют методом правых прямоугольников.

Метод правых (рис.1) и левых (рис.2) прямоугольников имеет сравнительно высокую погрешность.



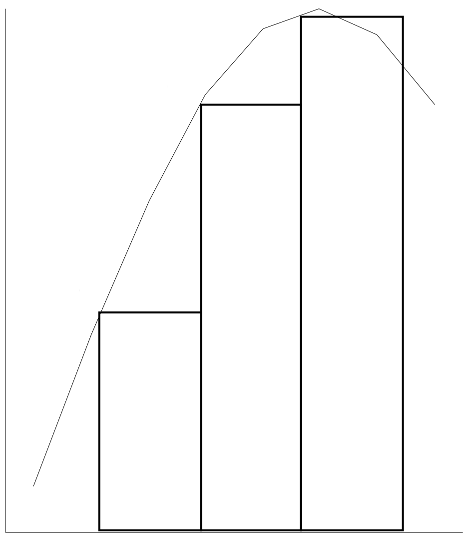


Рис. 1 Метод правых прямоугольников. Рис.2 Метод левых прямоугольников.

Если функция на всем интервале интегрирования возрастает, тогда метод левых прямоугольников дает заниженное значение интеграла, а метод правых прямоугольников – завышенное значение, и наоборот, если функция убывающая, то метод левых прямоугольников дает завышенное, а метод правых прямоугольников – заниженное значение интеграла.

Более низкую погрешность имеет метод средних прямоугольников (рис.3), в котором высота прямоугольников вычисляется по значению подынтегральной функции в середине отрезка интегрирования. В этом случае $S_i = f((x_{i+1} - x_i)/2)*(x_{i+1} - x_i)$ или, в случае равномерной сетки, $S_i = f(x_i + h/2)*h$

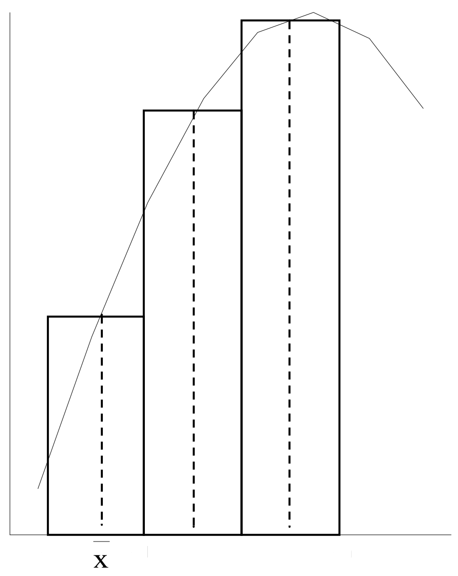


Рис. 3 Метод средних прямоугольников.

Описание алгоритма вычисления определенного интеграла методом прямоугольников:

n=значение
a=значение
b=значение
h=(b-a)/n

s=0
s1=0
s2=0
Цикл по x от a до b-h с шагом h
    s=s+f(x)*h   && метод левых прямоугольников
    s1=s1+f(x+h)*h   && метод правых прямоугольников
    s2=s2+f(x+h/2)*h   && метод средних прямоугольников
КонецЦикла

Печать s, s1, s2

ЗадатьФункцию F
Параметры x
Вернуть   (выражение подынтегральной функции от x)

Пример решения на языке **VFP**:

```
clear
k=2
?k^3/3
n=500
a=0
```

```
b=2

h=(b-a)/n
s=0
s1=0
s2=0
FOR x=a TO b-h STEP h
s=s+f(x)*h       &&метод левых прямоугольников
s1=s1+f(x+h)*h   &&метод правых прямоугольников
s2=s2+f(x+h/2)*h   &&метод средних прямоугольников
endfor

?"s=",s,"  s1=",s1, "s2=", s2

FUNCTION f
PARAMETERS x
RETURN x^2
```

Пример решения на языке **VBA**:

```
Sub sub1()
k = 2
Debug.Print k ^ 3 / 3
n = 500
a = 0
b = 2

h = (b - a) / n
s = 0
s1 = 0
s2 = 0
For x = a To b - h Step h
'метод левых прямоугольников
s = s + f(x) * h
'метод правых прямоугольников
s1 = s1 + f(x + h) * h
'метод средних прямоугольников
s2 = s2 + f(x + h / 2) * h
Next
Debug.Print "s=", s, "  s1=", s1, "s2=", s2

End Sub

Function f(x)
f = x ^ 2
End Function
```

Вычисление определенных интегралов методом трапеций

Вычисление определенного интеграла по методу трапеций сводится к вычислению площади фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком подынтегральной функции и прямыми $x = a$ и $x = b$. Будем линейно аппроксимировать функцию $f(x)$ на некотором разбиении отрезка $[a,b]$ на n частей.

Формула для приближенного вычисления интеграла будет иметь вид:

$$I = \sum_{i=1,n} S_i$$

где $S_i = (f_{i-1} + f_i)$*h/2 – площадь i – й трапеции, где h=(b-a)/n.
Если раскрыть скобки в выражениях для S_i, то формула для вычисления интеграла примет вид:

$$I \approx h \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

Описание алгоритма вычисления определенного интеграла методом трапеций:

```
n=значение
a=значение
b=значение
h=(b-a)/n

s=0
Цикл по x от a до b-h с шагом h
	s=s+(f(x)+f(x+h))*h/2
КонецЦикла

Печать s

Задать_Функцию F
Параметры x
Вернуть 	(выражение подынтегральной функции от x)
```

Пример решения на языке **VFP**:

```
clear
k=2
?k^3/3
n=500
a=0
b=2

h=(b-a)/n
s=0
FOR x=a TO b-h STEP h
s=s+(f(x)+f(x+h))*(h/2)
endfor

?s3

FUNCTION f
PARAMETERS x
RETURN x^2
```

Пример решения на языке **VBA**:

```
Sub sub1()
k = 2
Debug.Print k ^ 3 / 3
n = 500
a = 0
```

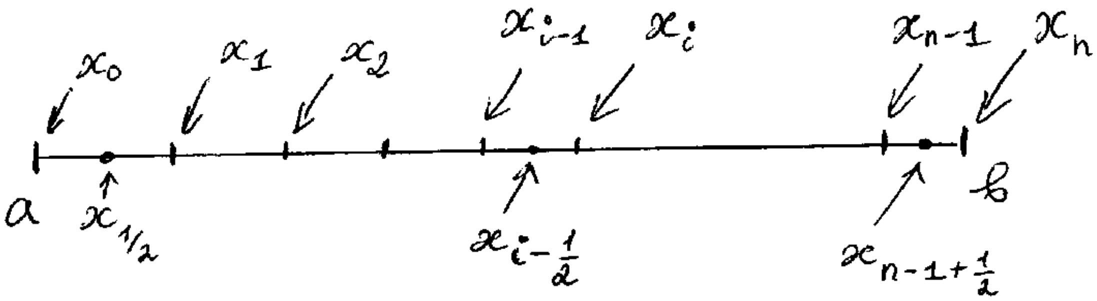
```
b = 2

h = (b - a) / n
s = 0
For x = a To b - h Step h
s=s+(f(x)+f(x+h))*(h/2)
Next
Debug.Print "s=", s
End Sub

Function f(x)
f = x ^ 2
End Function
```

Вычисление интеграла по методу Симпсона

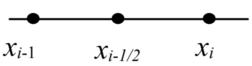
Метод Симпсона применяется для вычисления определенных интегралов вида I=$\int_a^b f(x)dx$.



Разобьем отрезок [a, b] на n точек.

Представим искомый интеграл в виде суммы интегралов: $I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} I_i$, здесь

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$



Рассмотрим i-ый отрезок [x_{i-1}, x_i]

$x_{i-1/2}=(x_i+x_{i-1})/2$ – середина i-го отрезка

Представим на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ подынтегральную функцию $f(x)$ в виде полинома третьей степени $P_i(x)$. Этот полином должен быть равен значениям подынтегральной функции в точках сетки и в середине отрезка: $P_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$ – равенство полинома значению функции на левой границе i-го отрезка, $P_i(x_{i-1/2}) = f(x_{i-1/2})$, $P_i(x_i) = f(x_i)$.

Такой полином можно записать, например, следующим образом:
$P_i(x)=a+b(x-x_{i-1})+c(x-x_{i-1})(x-x_{i-1/2})$,
здесь a, b, c – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Введем обозначение для ширины i-го отрезка: $h_i=x_i-x_{i-1}$,
тогда $(x-x_{i-1/2})= h_i/2$, а $(x_{i-1/2}-x_{i-1})= h_i/2$.

Запишем значения полинома на левой, правой границах и в середине i-го отрезка

$$P_i(x_i) = a+b*h_i+c*h_i*h_i/2 = f(x_i)= f_i \quad (1)$$

$$P_i(x_{i-1}) = a = f(x_{i-1})= f_{i-1} \quad (2)$$

$$P_i(x_{i-1/2})= f(x_{i-1/2})= a+b*h_i/2 = f_{i-1/2} \quad (3)$$

Из соотношения (2) следует $a= f_{i-1}$,
из выражения (3) легко увидеть, что $b= h_i (f_{i-1/2} - f_i)/2$,
из выражения (1) получаем $c=2 (f_i-a-b\ h_i)/h_i^2$, подставим в выражение для коэффициента с выражения для коэффициентов a и b, в результате получим:

$$c=2(f_i - f_{i-1}) /h_i^2 – (2/h_i)(2/h_i) (f_{i-1/2}- f_{i-1}),$$

$$c=2 [f_i - f_{i-1}-2 f_{i-1/2}+2 f_{i-1}] /h_i^2,$$

$$c=2 [f_i -2 f_{i-1/2}+f_{i-1}] /h_i^2.$$

Подставим найденные коэффициенты a, b, c в выражение для полинома:

$$P_i(x)= f_{i-1} + 2 (f_{i-1/2}- f_{i-1})(x -x_{i-1}) /h_i + 2 [f_i -2 f_{i-1/2}+f_{i-1}] (x -x_{i-1}) (x -x_{i-1/2})/h_i^2$$

Перейдем от переменной x к переменной $t= x -x_{i-1}$
Тогда $dt = dx$, а при $x = x_{i-1}$; t=0, при $x = x_i$; $t=h_i$ при
$x = x_{i-1/2}=x-(x_i -x_{i-1})/2= x-x_i/2 -x_{i-1}/2= x- x_{i-1}+x_{i-1}/2-x_i/2=t-h_i/2$

Тогда на i-ом интервале значение интеграла с учетом введенных обозначений, можно записать:

$$S_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i} P_i(x)dx = \int_0^{h_i} P_i(t)dt = \int_0^{h_i}(a+bt+ct(t-h_i/2))dt = at+bt^2/2+ct^3/3-ct^2h_i/4 \Big|_0^{h_i} =$$

$$=ah_i+bh_i^2/2+ch_i^3/3-ch_i^3/4 = ah_i+bh_i^2/2+ch_i^3(1/3-1/4)= ah_i+bh_i^2/2+ch_i^3/12 =$$
$$= f_{i-1}h_i+ (h_i^2/2)(f_{i-1/2}-f_{i-1})/(h_i^2/2)+ (h_i^3/12)(2/h_i^2)(f_i-2f_{i-1/2}+ f_{i-1})=$$
$$= f_{i-1}h_i+ h_if_{i-1/2}- h_i f_{i-1}+(h_i/6)(f_i-2f_{i-1/2}+ f_{i-1})=$$
$$= f_{i-1}h_i+(h_i/6) f_{i-1} - f_{i-1} h_i+h_i f_{i-1/2}-(h_i/3)f_{i-1/2}+(h_i/6) f_i=$$
$$=(h_i/6) f_{i-1}+ (2h_i/3)f_{i-1/2}+(h_i/6) f_i$$

Таким образом,
$$S_i= (h_i/3)(f_{i-1}/2+2 f_{i-1/2} +f_i/2)$$

S_i - представляет собой значение интеграла на i-ом отрезке. Для получения интеграла на отрезке от а до b, необходимо сложить все S_i

Если h_i=h для любого i=1,…, N, тогда $S_i= (h_i/3)(f_{i-1}/2+2 f_{i-1/2} +f_i/2)$ и формулу Симпсона можно упростить

$$S = \sum_{i=1}^{N} S_i = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{N}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i) \qquad (4)$$

Формулу (4) можно упростить, для этого раскроем скобки в выражении под знаком суммирования

$$S = \frac{h}{6}\left[\sum_{i=1}^{N} f_{i-1} + 4\sum_{i=1}^{N} f_{i-1/2} + \sum_{i=1}^{N} f_i\right]$$

Выделим из первой суммы значение функции в точке $x=a$

$$\sum_{j=0}^{N-1} f_j = f_0 + \sum_{j=1}^{N-1} f_j ,$$

а из последней суммы – значение функции в точке $x=b$

$$\sum_{i=1}^{N} f_i = \sum_{i=1}^{N-1} f_i + f_N$$

В результате получаем рабочую формулу Симпсона для равномерной сетки.

$$S = \frac{h}{6}\left[f_0 + \sum_{i=1}^{N-1} f_i + 4\sum_{i=1}^{N} f_{i-1/2} + \sum_{i=1}^{N-1} f_i + f_N\right]$$

или

$$S = \frac{h}{6}\left[f_0 + 2\sum_{i=1}^{N-1} f_i + 4\sum_{i=1}^{N} f_{i-1/2} + f_N\right]$$

Учтем, что $f_i = f(a+ih)$, $f_{i-1/2} = f\left(a + \frac{h}{2}(2i-1)\right)$, получим окончательное выражение для формулы Симпсона

$$S = \frac{h}{6}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) + 4\sum_{i=1}^{N} f(a + \frac{h}{2}(2i-1)) + f(b)\right] \qquad (5)$$

В первой сумме формулы (5) вычисляют сумму значений функции во всех внутренних узлах отрезка [a, b], вторая сумма вычисляет сумму значений функции в средних точках i-ых отрезков.

Если середины отрезков включить в сетку наряду с узлами, тогда новый шаг h_0 = h/2 = (b-a)/(2*n), а формула (5) может быть записана в виде:

$$S = \frac{h_0}{3}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a + i2h_0) + 4\sum_{i=1}^{N} f(a + h_0(2i-1)) + f(b) \right] \qquad (6)$$

Рассмотрим $\int_0^1 (3x^2 + 4x - 4)dx$. Значение данного интеграла легко найти аналитически и оно равно -0,75. Метод Симпсона для подынтегральной функции в виде полинома степени 3 и ниже дает точное значение.

Алгоритм вычисления этого интеграла методом Симпсона (формула (5)).

```
a=0
b=1
n=5
h=(b-a)/n

f0=f1(a)
fn=f1(b)

s1=0
x1=a+h
цикл по i от 1 до n-1
s1=s1+f1(x1)
x1=x1+h
конец цикла
x2=a+h/2

s2=0
цикл по I от 1 до n
s2=s2+f1(x2)
x2=x2+h
конец цикла

s=h*(f0+2*s1+4*s2+fn)/6

Печать s

функция f1
параметры x
возврат x^3+3*x^2 + x*4 - 4
```

Пример программы вычисления интеграла методом Симпсона на языке **VFP** (по формуле (6)).

```
CLEAR
SET DECIMALS TO 10
```

```
? "I=",simpson(0,2,20)
x=2
? "I=",x^3/3

PROCEDURE simpson
PARAMETERS a,b,n

h=(b-a)/n
S_четные=0
S_нечетные=0
for x=a+h TO b-h STEP 2*h
S_нечетны = S_нечетные + 4*f(x)
NEXT

for x=a+2*h TO b-h STEP 2*h
S_четные = S_четные + 2*f(x)
NEXT

S=f(a)*h/3+(S_четные+S_нечетные)*h/3+f(b)*h/3
RETURN s


FUNCTION f
PARAMETERS x
RETURN x^2
```

Пример решения на языке **VBA**:

'процедура проверки правильности вычисления значения интеграла по его первообразной

```
Sub integ()
x = 2
i = x ^ 3 / 3
Debug.Print i
End Sub

Function f(x)
 f = x ^ 2
End Function

Sub simpson()
a = 0
b = 2
n = 30
x = 2
h = (b - a) / n

s_четные = 0
s_нечетные = 0

For x = a + h To b - h Step 2 * h
s_нечетные = s_нечетные + 4 * f(x)
Next
```

```
Debug.Print "s_нечетные = " & s_нечетные

For x = a + 2 * h To b - h Step 2 * h
s_четные = s_четные + 2 * f(x)
Next
Debug.Print "s_четные=" & s_четные

s = h / 3 * (f(a) + (s_четные + s_нечетные) + f(b))
Debug.Print "n=" & n & "    s=" & s
End Sub
```