Тольяттинский Политехнический Техникум

Реферат
на тему «Великие задачи геометрии»

Выполнил: Соврасов А.С
Группа: С-11
Учитель: Волкова А.В

Тольятти 2014

Содержание

Введение

Данная работа посвящена древним геометрическим задачам и способам их решения.

Древние геометрические задачи сыграли важную роль в становлении геометрии. Особенно известны среди них три классические задачи на построение: задача о квадратуре круга, задача об удвоении куба и задача о трисекции угла. Многие ученые (от древнего мира до наших дней) предлагала свои решения этих задач, и в данной работе будут рассмотрены причины возникновения этих задач и методы их решения.

Три классические задачи древности

Три классические задачи сыграли важную роль в становлении древнегреческой математики.

С глубокой древности известны три задачи на построение: об удвоении куба, трисекции угла и квадратуре круга. Они сыграли особую роль в истории математики. В конце концов, было доказано, что эти задачи невозможно решить, пользуясь только циркулем и линейкой. Но уже сама постановка задачи — «доказать неразрешимость» — была смелым шагом вперёд. Вместе с тем предлагалось множество решений при помощи нетрадиционных инструментов. Всё это привело к возникновению и развитию совершенно новых идей в геометрии и алгебре. Немало преуспели в нестандартных и различных приближённых решениях любители математики — среди них три знаменитые задачи древности особенно популярны. Задачи кажутся доступными любому: вводят в заблуждение их простые формулировки. До сих пор редакции математических журналов время от времени получают письма, авторы которых пытаются опровергнуть давно установленные истины и подробно излагают решение какой-либо из знаменитых задач с помощью циркуля и линейки.

Формулировки задач

Задача о квадратуре круга: требуется построить сторону квадрата, площадь которого равна площади данного круга.

Задача об удвоении куба: требуется построить ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного куба.

Задача о трисекции угла: требуется данный, но произвольный угол разделить на три равные части.

О квадратуре круга.
Три аксиомы о квадратуре круга.

1. Естественное решение задачи о квадратуре круга (с помощью циркуля и линейки) не может быть идеальным (то есть абсолютно точным), ибо всегда есть естественная погрешность, возникающая вследствие использования материалов, а также вследствие обстоятельств времени, места и психофизического состояния решающего задачу. Поэтому есть адекватное средствам решение задачи (посильное).

Вывод: Но именно вследствие естественной погрешности данное решение задачи (положительное) является ненаучным (неточным или зависящим от конкретных условий опыта).

2. Абстрактное решение задачи о квадратуре круга (с помощью математических расчетов) достигая идеальной точности и как вследствие этого, достигая доказательной силы, недоступной естественному способу решения задачи, однако не имеет конкретного применения (кроме как для научных же целей).

Вывод: Научное решение задачи (вычислительное) является отрицательным решением, то есть неприменимым вне научно-лабораторной реальности.

3. Задачу о квадратуре круга позволяет решить синтетическое (или личностное) решение, которое совмещает в себе достоинства конкретного способа (наличие реального объекта или проблемы) и абстрактного способа (максимально точное вычисление), избегая недостатков естественного (зависимость от условий) и искусственного (неадекватность вычисления реальности). Соединение объекта измерения и метода вычисления позволяет достичь меры решения.

Вывод: Синтетическое решение задачи о квадратуре круга является реальным решением, ибо достигает адекватности вследствие сочетания конкретных (материальных) факторов с искусственными (идеальными).

Общий вывод: Таким образом, можно говорить о трех способах решения задачи о квадратуре круга: конкретном (с учетом конкретных особенностей задачи, средств измерения), искусственном (вычислительном, как устраняющим какую-либо зависимость-конкретность) и синтетическом, как создающим меру материальности (конкретности) и идеальности (искусственности) в созданном (сотворенном).

1. Естественное решение задачи о квадратуре круга является всегда адекватным объекту, но всегда (неточным), вследствие зависимости от материальных (конкретных) условий (места, времени и используемых инструментов).

Вывод: естественное решение проблемы оказывается положительным решением, то есть зависящим от материального объекта.

2. Искусственное решение задачи о квадратуре круга устраняет материальность задачи и достигает идеальности способа решения (метода), но оказывается абстрактным (используемым в искусственных условиях и неприменимым к материальному объекту).

Вывод: искусственное решение задачи о квадратуре круга является отрицательным, то есть зависящим от идеального субъекта (то есть способа вычисления).

3. Синтетическое решение задачи о квадратуре круга является реальным, ибо совмещает в себе две крайности: материальность объекта и идеальность метода (субъекта).

Заключительный вывод: Три способа решения задачи о квадратуре круга означают:

Естественный способ – выбор объекта измерения.

Искусственный способ – выбор метода исчисления.

Индифферентный способ – выбор результата изменения.

Частное замечание к способам решения задач о квадратуре круга:

1. Конкретное решение задачи (например, с помощью циркуля и линейки) всегда соответствует объекту измерения, но никогда не достигает абсолютной точности (то есть ее невозможности снова повторить в тех же условиях и с тем же объектом с тем же результатом, ибо условия, объект и результат всегда отражают конкретные моменты. Это доказательство (решение) называется положительным, то есть приближенным и зависящим от наличия того или иного объекта измерения.

2. Абстрактное решение задачи (посредством вычислений) лишено объекта (который в этом случае обобщен и унифицирован, то есть лишен конкретных признаков) и потому достигает абсолютной точности вычислений, которая неизменно достижима при тех же вычислениях.

Квадратура круга.
История и способы решения.

Вероятно, задача была известна уже за две тысячи лет до н. э. в Древнем Египте и Вавилоне. В то время у египетских математиков находятся первые решения задачи, как построить квадрат, равновеликий данному кругу, или определить соотношение между окружностью и её диаметром.

В папирусе Ринда, написанным Ахмесом, говорится, что сторона квадрата, равновеликого площади круга, равна восьми девятым диаметра (так что П = 3,16). У древних вавилонян и евреев принималось, что длина окружности ровно втрое больше диаметра и, следовательно, П = 3.

Древнегреческие математики также достигли чрезвычайно большого искусства в геометрических построениях. Они еще издавна преобразовывали любую прямолинейную фигуру с помощью циркуля и линейки в произвольную прямолинейную, равновеликую ей. Так появилась мысль обобщить эту задачу: построить с помощью циркуля и линейки такой квадрат, площадь которого была бы равна площади данного круга. Задача получила название квадратуры круга, и многие ученые пытались выполнить такое построение. Однако решение не поддавалось их усилиям. Но первая прямая ссылка на неё относится к V в. до н. э. По свидетельству древнегреческого историка Плутарха, философ Антифонт, коротая время в тюрьме, пытался квадрировать круг, т. е. превратить его в равновеликий квадрат.

Полного решения, предложенного Антифонтом, не сохранилось, но считается, что оно состояло в следующем: производя последовательно удвоение сторон вписанного многоугольника, он получал в конце концов многоугольник с очень большим числом сторон, которые, по мысли Антифонта, должны совпадать с соответствующими им дугами окружности. Но, так как для любого многоугольника можно с помощью циркуля и линейки построить равновеликий квадрат, то такой квадрат можно построить и для данного круга. От Плутарха известно, что лучшие математики того времени (в том числе Платон, Евдокс) посещали в темнице Антифонта и были удовлетворены его решением, а ведь требования к строгости доказательств в то время были не ниже сегодняшних.

Архимед (287-212 до н.э.), вычисляя периметры вписанных и описанных 96-ти угольников, в сочинении «Измерение круга» показал, что периметр вписанного многоугольника с любым числом сторон всегда меньше, а описанного – всегда больше длины данной окружности, и что величина заключается между пределами 3,1408 <П < 3,1429.

Известный математик древности Гиппократ Хиосский (ок. 400 г. до н.э.) первым указал на то, что площадь круга пропорциональна квадрату его диаметра. Но провести строгое доказательство ученый в то время еще не мог:

не было подходящего метода. Попытки Гиппократа решить задачу о квадратуре круга привели его к открытию квадрируемых фигур (то есть таких, площади которых выражаются в рациональных числах), ограниченных пересекающимися окружностями. Найденное Гиппократом Хиосским соотношение позволило свести задачу о квадратуре круга к построению с помощью циркуля и линейки, если это возможно, полученного коэффициента пропорциональности, одного и того же для всех кругов. Они впоследствии получили название гиппократовых луночек. Казалось бы, что с появлением таких луночек найден ключ к решению задачи о квадратуре круга. Она была бы решена, если бы удалось разбить круг на квадрируемые части.

Были найдены и другие пути определения квадратуры круга: кроме циркуля и линейки использовали различные инструменты или специально построенные кривые. Так, в V в. до н.э., греческий математик Гиппий из Элиды изобрел кривую, впоследствии получившую название квадратрисы Динострата (ее назвали по имени другого древнегреческого математика, жившего несколько позже и указавшего способ построения квадратуры круга при помощи этой кривой).

Все предложенные решения в лучшем случае давали приближённое значение с достаточно хорошей точностью. Однако все-таки оставались принципиально приближёнными. Впрочем, авторы таких построений часто не сомневались в их абсолютной точности и горячо отстаивали свои заблуждения. Один из самых громких споров на эту тему произошёл в Англии между двумя выдающимися учёными XVII в., философом Томасом Гоббсом и математиком Джоном Валлисом. В весьма почтенном возрасте Гоббс опубликовал около десяти «решений» задачи о квадратуре круга.

Однако ученых Древней Греции и их последователей такие решения, находящиеся за пределами применения циркуля и линейки, не удовлетворяли. Будучи вначале чисто геометрической задачей, квадратура круга превратилась в течение веков в исключительно важную задачу арифметико-алгебраического характера, связанную с числом П , и содействовала развитию новых понятий и идей в математике.

Отношение длины окружности к ее диаметру есть величина постоянная, не зависящая от радиуса круга, она обозначается буквой П. Теперь известно, П - число иррациональное, оно выражается бесконечной непериодической десятичной дробью 3,1415926…, которое было вычислено с 707 десятичными знаками математиком В. Шенксом. Этот результат вместе с формулой вычислений он обнародовал в 1837 году. Ни одна ещё задача подобного рода не решалась с таким огромным приближением и с точностью, далеко превышающее отношение микроскопических расстояний к телескопическим. Работа, сделанная Шенксом, в сущности, бесполезна – или почти бесполезна. Но, с другой стороны, она может служить довольно убедительным доказательством противного тому, кто до сих пор ещё надеется, что можно найти точное отношение длины окружности к диаметру.

Можно вычислить приближенное значение. Однако не в практическом отношении интересовала людей задача о квадратуре круга, а интересовала её принципиальная сторона: возможно ли точно решить эту задачу, выполняя построения с помощью только циркуля и линейки. Поэтому квадратура круга была в прежние времена самой заманчивой и соблазнительной задачей. Армия «квадратурщиков» неустанно пополнялась каждым новым поколением математиков. Все усилия были тщетны, но число их не уменьшалось. В некоторых умах доказательство, что решение не может быть найдено, зажигало ещё большее рвение к изысканиям.

Лишь в 80-х годах 19в. было строго доказано, что решить задачу о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки невозможно. Эта задача становится разрешимой, если применять, кроме циркуля и линейки, еще другие средства построения.

Термин «квадратура круга» стал синонимом неразрешимых задач. Вместе с тем предлагалось множество решений при помощи нетрадиционных инструментов. Всё это привело к возникновению и развитию совершенно новых идей в геометрии и алгебре.

Удвоение куба.
Легенда о возникновении задачи.

Задача об удвоении куба носит также название «делосской задачи» в связи со следующей легендой.

На острове Делос (в Эгейском море) распространилась эпидемия чумы. Когда жители острова обратились к оракулу за советом, как избавиться от чумы, они получили ответ: «Удвойте жертвенник храма Аполлона». Сначала они считали, что задача легка. Так как жертвенник имел форму куба, они построили новый жертвенник, ребро которого было в два раза больше ребра старого жертвенника. Делосцы не знали, что таким образом они увеличили объем не в 2 раза, а в 8 раз. Чума еще больше усилилась, и в ответ на вторичное обращение к оракулу последний посоветовал: «Получше изучайте геометрию...» Согласно другой легенде, бог приписал удвоение жертвенника не потому, что ему нужен вдвое больший жертвенник, а потому, что хотел упрекнуть греков, «которые не думают о математике и не дорожат геометрией».

С тех пор делийской задачей занимались лучшие математики античного мира, было предложено несколько решений, однако никто не смог выполнить такое построение, используя только циркуль и линейку.

Легенда, по-видимому, была сложена уже после того, как греческие геометры стали заниматься этой задачей. У греков произведение двух величин понималось не как определенное абстрактное «число», а как площадь некоторой фигуры, и, аналогично, произведение трех величин интерпретировалось как объем пространственного тела. Найти куб вдвое большего объема значило построить ребро куба, равновеликого прямоугольному параллелепипеду, состоящему из двух одинаковых сложенных вместе кубов.

Эта задача представляла собой частный случай более общей задачи – по данному прямоугольному параллелепипеду построить куб одного с ним объема. По-видимому, интерес к этой задаче возник в связи с аналогичной по формулировке, но гораздо более легко решаемой задачей о построении квадрата, равновеликого данному прямоугольнику. Это было одной из элементарных задач так называемой геометрической алгебры греков.

Удвоение куба.
Попытки решения задачи.

Гиппократ Хиосский (конец V в. до н. э.) показал, что задача сводится к нахождению двух средних пропорциональных между одним отрезком и другим, вдвое большим его.

Архит Тарентский (начало IV в. до н. э.) предложил решение, основанное на пересечении тора, конуса и кругового цилиндра.

Платон (первая половина IV в. до н. э.) предложил механическое решение, основанное на построении трёх прямоугольных треугольников с нужным соотношением сторон.

Менехм (середина IV в. до н. э.) нашёл два решения этой задачи, основанные на использовании конических сечений. В первом решении отыскивается точка пересечения двух парабол, а во втором — параболы и гиперболы.

Эратосфен (III в. до н. э.) предложил ещё одно решение, в котором используется специальный механический инструмент — мезолябия, а также описал решения своих предшественников.

Никомед (II в. до н. э.) использовал для решения этой задачи метод вставки, выполняемой с помощью специальной кривой — конхоиды.

Группа схожих между собой решений, принадлежащих Аполлонию, Филону Византийскому и Герону, также использует метод вставки.

В ещё одной группе схожих между собой решений, принадлежащих Диоклу, Паппу и Спору, используется та же идея, что и в решении Платона, при этом Диокл применяет для построения специальную кривую — циссоиду.

Свои решения также предложили Виет, Декарт, Грегуар де Сен-Венсан, Гюйгенс, Ньютон.

Ванцель доказал в 1837 году, что эта задача не может быть решена с помощью циркуля и линейки.

Трисекция угла.

Почему возникла задача о делении угла на три равные части? Вероятно потому, что на такое число частей приходилось делить произвольный прямоугольный отрезок. Это деление выполняется достаточно просто, как просто выполняется деление не только на три, но и на произвольное число частей. Снова математические ассоциации естественным путем приводят к мысли о возможности перенесения операции деления с отрезка прямой на иные геометрические образы. В данном случае, рассматривая угол как центральный, мы можем представить задачу о делении угла на три равные части как задачу о делении на такие части дуги окружности, на которую угол опирается. Итак, можно или нельзя с помощью циркуля и линейки разделить на три равные части дугу окружности? Циркулем и линейкой задача не решена. Однако если не ограничиваться указанными инструментами, то ее можно решить, т.е. разделить на три равные части произвольный угол. Это не будут, конечно, решения, соответствующие тем требованиям, которые были поставлены, но это будет, очевидно, определенным приобретением в математике. В частности, в процессе отыскания таких решений был открыт целый ряд в высшей степени важных и интересных кривых. Одной из них является спираль Архимеда.

Хотя трисекция угла в общем случае невыполнима с помощью циркуля и линейки, существуют кривые, с помощью которых это построение можно выполнить. Улитка Паскаля или трисектриса, квадратриса (в древности тоже называлась трисектрисой), Конхоида Никомеда, Конические сечения, Спираль Архимеда.

Одним из приемов, применявшимся еще древними для ее решения, являлось механическое с помощью вставки. Правда, оно не считалось строгим. Под вставкой понимают вообще построение отрезка, концы которого лежат на данных линиях и который проходит через некоторую данную точку. Его можно получить механически с помощью линейки, на которой предварительно нанесены две метки на расстоянии, равном длине заданного отрезка. Эту линейку вращают вокруг неподвижной точки, перемещая в то же время таким образом, чтобы одна из меток двигалась по одной из заданных линий. Это продолжается до тех пор, пока вторая метка не окажется на второй заданной линии.

Решение задачи о трисекции угла.

Пусть AOB – произвольный угол. На его стороне OB возьмем произвольную точку P, через которую проведем прямую PQ, параллельную второй стороне угла OA, и прямую PD, перпендикулярную к этой стороне. Через вершину O проведем прямую так, чтобы отрезок LM (L – точка пересечения этой прямой с PD, M – точка её пересечения с PQ) был равен 2 OP. Угол AOM есть третья часть угла AOB (рис.4). В самом деле, пусть N – середина отрезка LM, NT – перпендикуляр к PQ. Тогда, как легко понять из рис. 4(см. приложения), OP = PN = NM. Если обозначить угол AOM через α, то и углы PMO = MPN =α . Угол ONP равнобедренного треугольника OPN является внешним углом треугольника PNM, следовательно, равен 2 . Утверждение доказано.

Провести с помощью циркуля и линейки через точку O прямую так, чтобы отрезок LM, оказался равным удвоенному отрезку OP невозможно. Это можно сделать с помощью вставки, предложенной Архимедом. Именно на полоске бумаги (во времена Архимеда это могла быть полоска пергамента) наносятся точки L, M так чтобы отрезок LM равнялся удвоенному отрезку OP. После этого полоска передвигается так, чтобы она все время проходила через точку O (вершину угла), а точка L перемещалась по прямой DP. Тогда в тот момент, когда точка M окажется на прямой PQ, полоска отделит от данного угла его третью часть.

Решение Архимеда.

Задача:

"Угол произвольной величины разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки односторонней, без делений"

Дано: угол АОВ = а, на рис. 5 (см.приложение)угол 3.

Найти уголАО1В =1/3угла АОВ.

АО = ОВ =R; OD =L; $O_oО$п = r; $O_1О$п=е.

Решение Архимеда:

Если на линейку нанести деление O_1C=R, а край линейки уложить так, как это показано на рис(см.приложение)1, то:

Угол AO_1B =1/3углаАОВ.

Доказательство:

"Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов не смежных с ним".

На основании этой теоремы:

Треугольник CO_1O; угол2 (в т.С) = угол1 + угол1.

Треугольник ОО1А; угол 3 = угол 1 (вт.O_1) +угол 2 (в т. А),

таким образом:

угол а = угол3 = уголI + угол 2, где угол2 = угол1 + угол1, т.е угол АО1В = 1/3угла АОВ.

Всеми признано, что задача решена Архимедом верно, но с нарушением" условия задачи, т.к. использована линейка с делением

O_1C=R

Тем не менее Архимед доказал, что в т.O_1 всегда угол AO_1B = 1/3 углаАОВ.

Решение трисекции угла.

Воспользовавшись линейкой Архимеда и его чертежом 1, можно установить следующие зависимости:

При изменении угла АОВ от 0° до 90°

- отрезок L меняет свою величину от 1 до 0 /до нуля/, при 0В=R=1;
- отрезок е меняет свою величину от 1 до 0 /до нуля/, при $O_OО$п = r = 1

Так себя ведёт тригонометрическая функция Cos a , в соответствии с теоремой:

"Косинус угла зависит только от величины данного угла". Для данного случая теорему косинуса можно записать:

L/R=e/r=Cos a

и найти отрезок “е” по трём известным отрезкам: R, L, r как это показано на черт.4.

Найденный на черт.4 отрезок “е” переносим на черт. 3, получим точку 0_1, где, как доказал Архимед.

Угол АО1В = 1/3 угла АОВ.

Заключение.
Выводы.

Если говорить о значении решения великих задач для практики, то сразу же с всею определенностью следует сказать, что оно равно нулю. В самом деле, так ли уж важно решать эти задачи именно циркулем и линейкой? Не проще ли сделать это иными инструментами? Однако оказалось, что именно в бесчисленных попытках решить задачи циркулем и линейкой, было получено столько важного для математики, причем именно такого важного, которое имеет уже непосредственное практическое значение, что практическая важность самых задач (если ее все же постараться усмотреть) отступает куда – то на очень и очень далекий план.

Математика обладает чудесной особенностью, выделяющей её из других наук: если в ней потянуть за какое–то звено, то можно вытянуть всю цепь её фактов, причём как такие её части, которые предшествуют выбранному звену, так и такие, которые за ним следуют. Происходит это потому, что математика развивается по своим внутренним законам, и именно эти законы с железной необходимостью заставляют нас говорить «Б» всякий раз, когда сказано «А». Роль одного из звеньев в развитии математики сыграли и великие задачи. Взяв это звено, можно усмотреть генетическую связь между ним и очень многими областями как старой, так и новой математики.

Поэтому применение данной работы заключается в возбуждении интереса к древним геометрическим задачам, которые могут подтолкнуть к решению каких-либо задач наших дней и помочь найти ответы на вопросы современной геометрии.

Приложение.

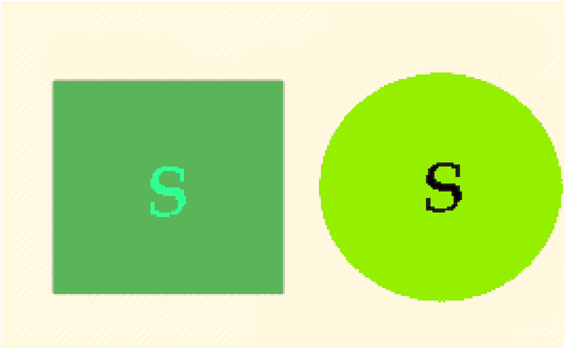


Рисунок 1. Квадратура круга.

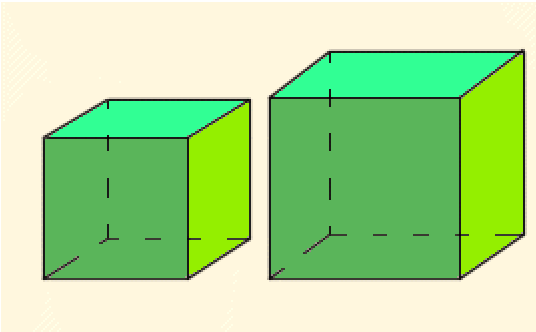


Рисунок 2. Удвоение куба.

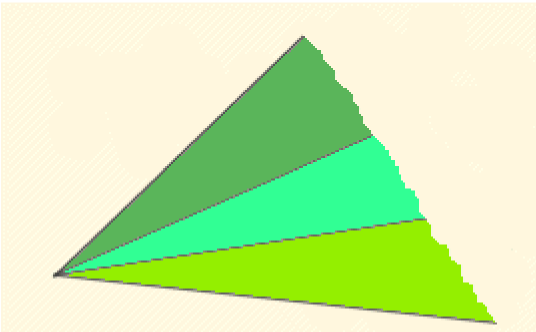
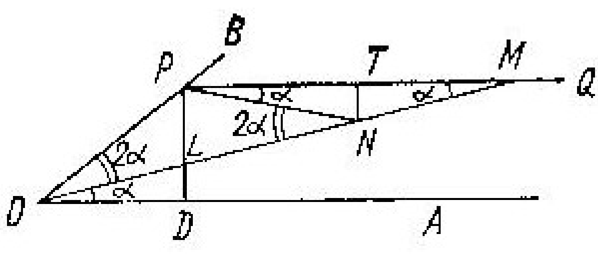
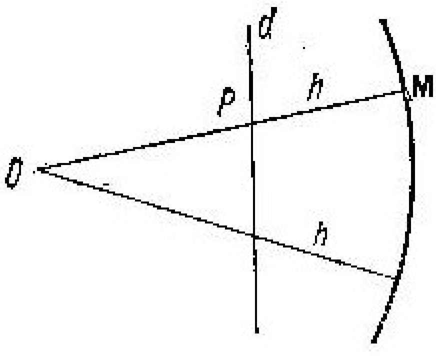


Рисунок 3. Трисекция угла.





Список использованной литературы.

1. ru.wikipedia.org
2. http://images.yandex.ru/?uinfo=ww-1349-wh-660-fw-1307-fh-454-pd-1