Вариант №3

Задача №1

Два точеных заряда $q_1 = -2\,нКл$ и $q_2 = 3\,нКл$ находятся на расстоянии $r = 4\,см$ друг от друга. Найти напряженность и потенциал электростатического поля в точке, удаленной от первого заряда на расстояние $r_1 = 6\,см$ и от второго на $r_2 = 2\,см$.

Дано:

$q_1 = -2\,нКл = -2 \cdot 10^{-9}\,Кл$

$q_2 = 3\,нКл = 3 \cdot 10^{-9}\,Кл$

$r = 4\,см = 0,04\,м$

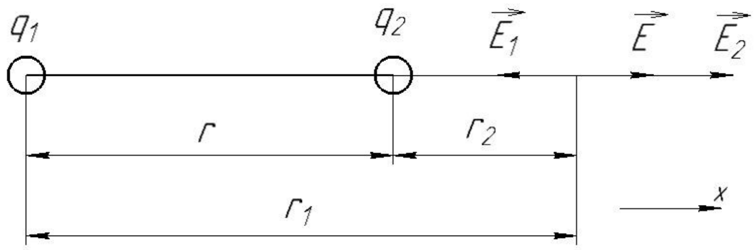
$r_1 = 6\,см = 0,06\,м$

$r_2 = 2\,см = 0,02\,м$

Найти:

E, φ

Решение



Из анализа числовых значений расстояний $r, r_1 и r_2$ получим, что оба заряда и искомая точка лежат на одной прямой (см. рисунок). По определению суммарная напряженность в искомой точке будет равна векторной сумме напряженностей от первого и второго зарядов:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

В проекции на ось Ox (см. рисунок) получим,

$$E = -E_1 + E_2$$

Найдем напряженности, создаваемые в искомой точке первым и вторым зарядами в отдельности. Напряженность, создаваемая точечным зарядом, определяется по формуле:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q|}{r^2}$$

где ε_0 – диэлектрическая постоянная;

q – величина точечного заряда;

r – расстояние от заряда до искомой точки.

1-й заряд

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1|}{r_1^2}$$

2-й заряд

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_2|}{r_2^2}$$

В итоге получим,

$$E = -E_1 + E_2 = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1|}{r_1^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_2|}{r_2^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{|q_2|}{r_2^2} - \frac{|q_1|}{r_1^2} \right)$$

Суммарный потенциал, создаваемый в некоторой точке системой зарядов, определяется как алгебраическая сумма потенциалов, создаваемых в искомой точке каждым из зарядов в отдельности.

$$\varphi = \sum \varphi_i$$

В данном случае получим,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Потенциал, создаваемый точечным зарядом, определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

где ε_0 – диэлектрическая постоянная;

q – величина точечного заряда;

r – расстояние от заряда до искомой точки.

Тогда,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

Подставим в полученные формулы числовые значения:

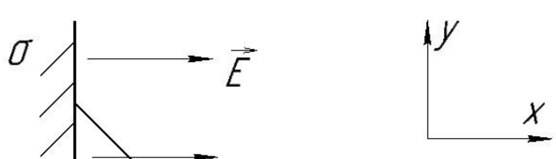
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{|q_2|}{r_2^2} - \frac{|q_1|}{r_1^2} \right) = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{|3 \cdot 10^{-9}|}{0,02^2} - \frac{|-2 \cdot 10^{-9}|}{0,06^2} \right) = 62,4 \cdot 10^3\, В/м = 62,4\, кВ/м$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0,06} + \frac{3 \cdot 10^{-9}}{0,02} \right) = 1050\, В$$

Ответ: $E = 62,4\,кВ/м$, $\varphi = 1050\,В$.

Задача №2

К бесконечно протяженной плоскости (поверхностная плотность заряда $\sigma = 3 \cdot 10^{-4}\,Кл/м^2$) прикреплена нить, на которой висит шарик (масса $m = 1 \cdot 10^{-2}\,кг$, заряд $q = 2 \cdot 10^{-9}\,Кл$), заряженный одноименно с плоскостью. Нить с шариком отклонена на угол α. Определить угол отклонения нити α.

Дано:	**Решение**
	

$\sigma = 3\cdot 10^{-4}\, Кл/м^2$

$m = 1\cdot 10^{-2}\, кг$

$q = 2\cdot 10^{-9}\, Кл$

Найти:

α

На заряженный шарик действуют сила тяжести $m\cdot\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила $\vec{F_e}$ со стороны электрического поля, создаваемого заряженной плоскостью. Запишем для шарика второй закон Ньютона:

$$m\cdot\vec{g}+\vec{T}+\vec{F_e}=0$$

В проекции на оси Ох и Оу (см. рис.) получим:

$$Ox: -T\cdot\sin(\alpha)+F_e=0$$

$$Oy: -m\cdot g+T\cdot cos(\alpha)=0$$

В итоге получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} T\cdot\sin(\alpha)=F_e \\ T\cdot cos(\alpha)=m\cdot g \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе:

$$\frac{F_e}{m\cdot g}=\frac{T\cdot\sin(\alpha)}{T\cdot cos(\alpha)}=tg(\alpha)$$

Сила, действующая со стороны электрического поля на электрический заряд, определяется по формуле:

$$F_e=q\cdot E$$

где q – величина электрического заряда;

E – напряженность электрического поля в точке, в которой расположен электрический заряд.

Напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью, вычисляется по формуле:

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

где σ – поверхностная плотность заряда плоскости;

ε_0 – диэлектрическая постоянная.

Подставим все полученные выше выражения в исходное.

$$\frac{q \cdot E}{m \cdot g} = tg(\alpha)$$

$$\frac{q \cdot \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}{m \cdot g} = tg(\alpha)$$

Выразим из полученного соотношения угол α отклонения нити .

$$\alpha = arctg\left(\frac{q \cdot \sigma}{2\varepsilon_0 \cdot m \cdot g}\right)$$

Подставим в полученную формулу числовые значения:

$$\alpha = arctg\left(\frac{q \cdot \sigma}{2\varepsilon_0 \cdot m \cdot g}\right) = arctg\left(\frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 9,8}\right) = 19°$$

Ответ: $\alpha = 19°$.

Задача №3

Электрическое поле образовано заряженной плоскостью, с поверхностной плотностью заряда σ. Электрон перемещается в поле от одной точки пространства (на расстоянии $r_1 = 2\,м$ от плоскости) до другой (на расстоянии $r_2 = 1,8\,м$ от плоскости), при этом ее скорость изменяется от $v_1 = 0,5 \cdot 10^6\,м/с$ до $v_2 = 8 \cdot 10^6\,м/с$. Найти величину поверхностной плотности заряда σ.

Дано:

Решение

$e = -1.6 \cdot 10^{-19}\,Кл$

$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\,кг$

$r_1 = 2\,м$

$r_2 = 1.8\,м$

$v_1 = 0.5 \cdot 10^6\,м/с$

$v_2 = 8 \cdot 10^6\,м/с$

Найти:

σ

Согласно закону сохранения энергии изменение кинетической энергии электрона равно работе сил электрического поля.

$$T_2 - T_1 = A_{эл}$$

По определению работа сил, совершаемая при перемещении заряда в электрическом поле, вычисляется по формуле:

$$A_{эл} = q \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)$$

где q – величина заряда;

φ_1, φ_2 – потенциалы начальной и конечной точек, соответственно.

Потенциал, создаваемый бесконечной равномерно заряженной плоскостью на расстоянии r от плоскости, определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot r$$

где ε_0 – диэлектрическая постоянная;

σ – поверхностная плотность заряда плоскости.

По определению кинетическая энергия тела определяется по формуле:

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

где m – масса тела;

v – скорость движения тела.

Подставим все полученные выше формулы в исходную.

$$\frac{m_e \cdot v_2^2}{2} - \frac{m_e \cdot v_1^2}{2} = e \cdot \left(\frac{-\sigma}{2\,\varepsilon_0} \cdot r_2 - \left(\frac{-\sigma}{2\,\varepsilon_0} \cdot r_1 \right) \right)$$

Выразим искомую величину поверхностной плотности заряда σ.

$$\frac{m_e \cdot \left(v_2^2 - v_1^2 \right)}{2} = e \cdot \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0} \cdot \left(r_1 - r_2 \right)$$

$$\sigma = \frac{m_e \cdot \left(v_2^2 - v_1^2 \right) \cdot \varepsilon_0}{e \cdot \left(r_1 - r_2 \right)}$$

Подставим в полученную формулу числовые значения:

$$\sigma = \frac{m_e \cdot \left(v_2^2 - v_1^2 \right) \cdot \varepsilon_0}{e \cdot \left(r_1 - r_2 \right)} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot \left(\left(8 \cdot 10^6 \right)^2 - \left(0.5 \cdot 10^6 \right)^2 \right) \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot \left(2 - 1.8 \right)} = 16 \cdot 10^{-9}\ Кл/м^2 = 16\ н\,Кл/м^2$$

Ответ: $\sigma = 16\,нКл/м^2$.

Задача №4

Найти значение и направление тока через резистор $R = 10\,Ом$. Внутренние сопротивления бесконечно малы. Параметры цепи $\varepsilon_1 = 2\,В$, $\varepsilon_2 = 4\,В$, $R_1 = 25\,Ом$, $R_2 = 10\,Ом$.

Дано:

$\varepsilon_1 = 2\,В$

$\varepsilon_2 = 4\,В$

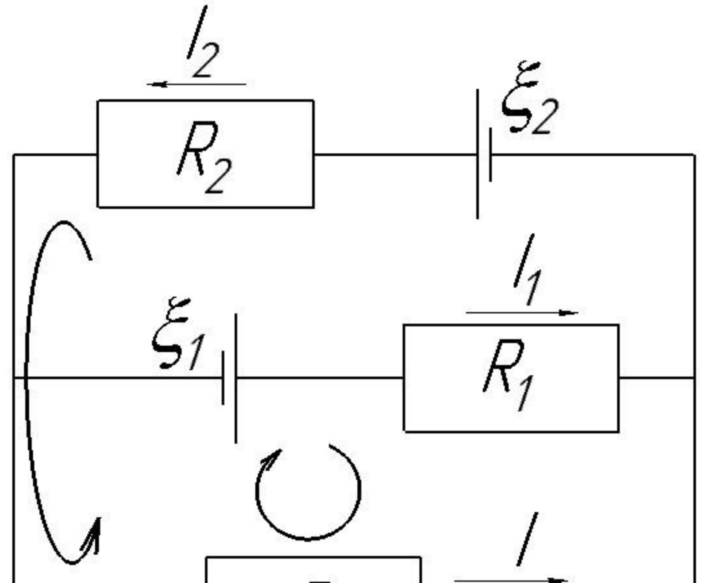
$R = 10\,Ом$

$R_1 = 25\,Ом$

$R_2 = 10\,Ом$

Найти:

Решение



I

Для определения токов в ветвях цепи запишем первый и второй законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа (для правого узла схемы):

$$I+I_1-I_2=0$$

Второй закон Кирхгофа (для большого контура):

$$I\cdot R+I_2\cdot R_2=\varepsilon_2$$

Второй закон Кирхгофа (для нижнего контура):

$$-I\cdot R+I_1\cdot R_1=\varepsilon_1$$

Получим итоговую систему трех уравнений:

$$\begin{cases} I+I_1-I_2=0 \\ I\cdot R+I_2\cdot R_2=\varepsilon_2 \\ -I\cdot R+I_1\cdot R_1=\varepsilon_1 \end{cases}$$

Решим данную систему относительно искомой силы тока I.

$$\begin{cases} I+I_1-I_2=0 \\ I_2=\dfrac{\varepsilon_2-I\cdot R}{R_2} \\ I_1=\dfrac{\varepsilon_1+I\cdot R}{R_1} \end{cases}$$

$$I+\frac{\varepsilon_1}{R_1}+I\cdot\frac{R}{R_1}-\frac{\varepsilon_2}{R_2}+I\cdot\frac{R}{R_2}=0$$

$$I\left(1+\frac{R}{R_1}+\frac{R}{R_2}\right)=\frac{\varepsilon_2}{R_2}-\frac{\varepsilon_1}{R_1}$$

$$I=\frac{\dfrac{\varepsilon_2}{R_2}-\dfrac{\varepsilon_1}{R_1}}{1+\dfrac{R}{R_1}+\dfrac{R}{R_2}}=\frac{\dfrac{\varepsilon_2\cdot R_1-\varepsilon_1\cdot R_2}{R_1R_2}}{\dfrac{R_1R_2+R_2R+R_1R}{R_1R_2}}=\frac{\varepsilon_2\cdot R_1-\varepsilon_1\cdot R_2}{R_1R_2+R_2R+R_1R}$$

Подставим в полученную формулу числовые значения:

$$I=\frac{\varepsilon_2\cdot R_1-\varepsilon_1\cdot R_2}{R_1 R_2+R_2 R+R_1 R}=\frac{4\cdot 25-2\cdot 10}{25\cdot 10+10\cdot 10+25\cdot 10}=0.133\,A$$

Поскольку вычисленное значение силы тока положительное, то направление силы тока соответствует направлению, указанному на рисунке.

Ответ: $I=0.133\,A$.

Задача №5

По двум прямолинейным бесконечно длинным проводникам текут токи $I_1=0.3\,A$ и $I_2=0.1\,A$ в одном направлении. Проводники параллельны друг другу и расстояние между ними $r=4\,м$. Найти значение вектора магнитной индукции в точке, находящейся на расстоянии $r_1=2\,м$ от первого проводника и $r_2=6\,м$ от второго.

Дано:	**Решение**
$I_1=0.3\,A$	
$I_2=0.1\,A$	
$r=4\,м$	
$r_1=2\,м$	
$r_2=6\,м$	

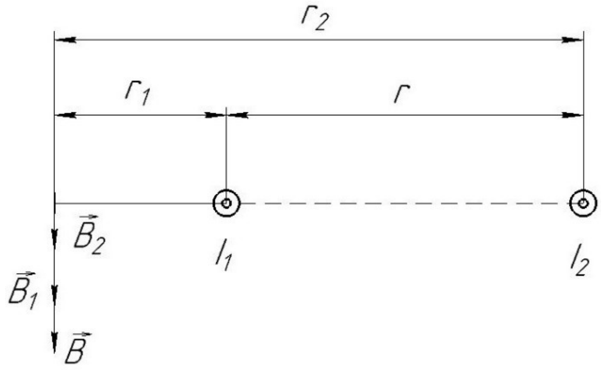
Найти:

B

По условию указано, что требуется найти величину вектора магнитной индукции в точке, удаленной на расстоянии $r_1 и\, r_2$ от первого и второго проводников соответственно. Следовательно, на указанных трех точках (если рассматривать плоскость, перпендикулярную проводникам) можно построить треугольник со сторонами $r_1, r_2 и\, r$. Для указанных по условию расстояний неравенство треугольника – длина любой стороны треугольника всегда меньше или равна сумме длин двух его других сторон – вырождается в равенство.

$$6\,м = r_2 = r + r_1 = 4\,м + 2\,м$$

Следовательно, треугольник вырождается в прямую линию. На рисунке представлена схема для данных условий.



Согласно принципу суперпозиции, суммарная индукция в искомой точке будет равна векторной сумме магнитных индукций, создаваемых в данной точке первым и вторым проводниками с током.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

Длинный прямой проводник с током создает вокруг себя круговое магнитное поле. Величина индукции поля в некоторой точке, удаленной от проводника на расстояние r, определяется по формуле:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

где I – величина тока в проводнике;

r – расстояние до точки, в которой определяется магнитная индукция;

μ_0 – магнитная постоянная.

Тогда получим,

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r_1}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot r_2}$$

В данном случае вектора магнитных индукций первого и второго проводника сонаправлены (см. рис). Тогда величина вектора суммарной магнитной индукции будет равна:

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r_1} + \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot r_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left(\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{r_2} \right)$$

Подставим в полученную формулу числовые значения:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left(\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{r_2} \right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \left(\frac{0.3}{2} + \frac{0.1}{6} \right) = 33,3 \cdot 10^{-9}\,Тл = 33,3\,нТл$$

Ответ: $B = 33,3\,нТл$.

Задача №6

Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью v_0. Длина конденсатора l. Напряженность электрического поля конденсатора $E = 5 \cdot 10^3\,В/м$. При вылете из конденсатора электрон попадает в магнитное поле с индукцией $B = 3 \cdot 10^{-3}\,Тл$, перпендикулярное электрическому и параллельное начальной скорости влета электрона в конденсатор. Электрон в магнитном поле начинает двигаться по винтовой линии радиусом $R = 3,5\,мм$ и шагом $h = 6,5\,мм$. Определить $v_0 u l$.

Дано:

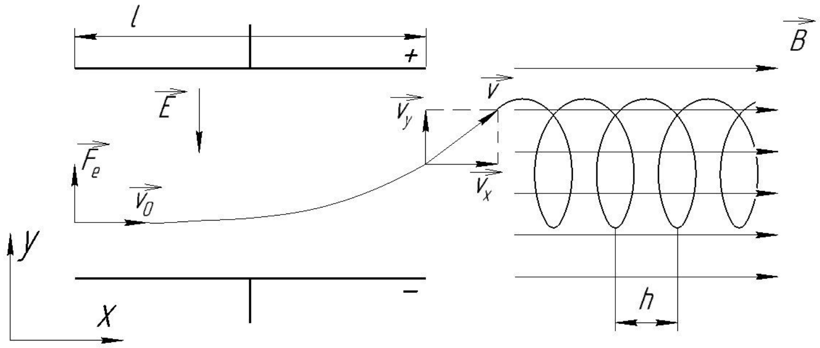
$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\,кг$

$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,Кл$

$E = 5 \cdot 10^3\,В/м$

$B = 3 \cdot 10^{-3}\,Тл$

Решение



$R = 3.5\,мм = 3{,}5 \cdot 10^{-3}\,м$

$h = 6.5\,мм = 6.5 \cdot 10^{-3}\,м$

Найти:

v_0, l

При пролете через конденсатор на электрон действует сила Кулона, которая отклоняет электрон от первоначального направления.

Запишем второй закон Ньютона:

$$F_e = m_e a$$

$$e \cdot E = m_e a$$

$$a = \frac{e \cdot E}{m_e}$$

где e – электрический заряд электрона;

E – напряженность электрического поля в конденсаторе;

m_e – масса электрона.

В начальный момент времени электрон имел только продольную составляющую скорости (вдоль оси Ox). Следовательно, движение электрона вдоль оси Oy – равноускоренное движение без начальной скорости. Тогда скорость электрона можно рассчитать по формуле:

$$v_y = a \cdot t$$

где t – время пролета электрона через конденсатор;

Время пролета электрона через конденсатор равно:

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v_0}$$

Тогда,

$$v_y = a \cdot t = \frac{e \cdot E}{m_e} \cdot \frac{l}{v_0} = \frac{e \cdot E \cdot l}{m_e \cdot v_0}$$

На электрон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца $F_л$, которая придает электрону центростремительное ускорение $a_ц$. Запишем для электрона второй закон Ньютона:

$$F_л = m_e \cdot a_ц$$

$$e \cdot v_y \cdot B = \frac{m_e \cdot (v_y)^2}{R}$$

$$e \cdot B = \frac{m_e \cdot v_y}{R}$$

Тогда радиус винтовой линии будет равен.

$$R = \frac{m_e \cdot v_y}{e \cdot B} = \frac{m_e \cdot \dfrac{e \cdot E \cdot l}{m_e \cdot v_0}}{e \cdot B} = \frac{E \cdot l}{v_0 \cdot B}$$

Период обращения электрона по винтовой линии равен:

$$T = \frac{2\pi R}{v_y}$$

С другой стороны, за один период электрон проходит вдоль оси Ox расстояние h:

$$h = v_x \cdot T = v_0 \cdot \frac{2\pi R}{v_y} = v_0 \cdot \frac{2\pi \cdot \dfrac{E \cdot l}{v_0 \cdot B}}{\dfrac{e \cdot E \cdot l}{m_e \cdot v_0}} = \frac{2\pi \cdot m_e \cdot v_0}{e \cdot B}$$

Выразим из полученных выше соотношений искомые величины начальной скорости электрона v_0 и длины конденсатора l.

$$v_0 = \frac{h \cdot e \cdot B}{2\pi \cdot m_e}$$

$$l = \frac{R \cdot v_0 \cdot B}{E} = \frac{R \cdot \dfrac{h \cdot e \cdot B}{2\pi \cdot m_e} \cdot B}{E} = \frac{R \cdot h \cdot e \cdot B^2}{2\pi \cdot m_e \cdot E}$$

Подставим в полученные формулы числовые значения:

$$v_0 = \frac{h \cdot e \cdot B}{2\pi \cdot m_e} = \frac{6.5 \cdot 10^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}} = 5.46 \cdot 10^5 \, м/с$$

$$l = \frac{R \cdot h \cdot e \cdot B^2}{2\pi \cdot m_e \cdot E} = \frac{3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 6.5 \cdot 10^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2}{2\pi \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^3} = 1,15 \cdot 10^{-3} \, м = 1,15 \, мм$$

Ответ: $v_0 = 5.46 \cdot 10^5 \, м/с, \quad l = 1,15 \, мм$.

Задача №7

В магнитном поле, индукция которого B, вращается стержень длиной $l=1,1\,м$ с угловой скоростью $\omega=28\ рад/с$. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна магнитному полю. При этом на концах стержня возникает ЭДС индукции $\varepsilon=1,6\,В$. Найти индукцию магнитного поля B.

Дано:

$l=1.1\,м$

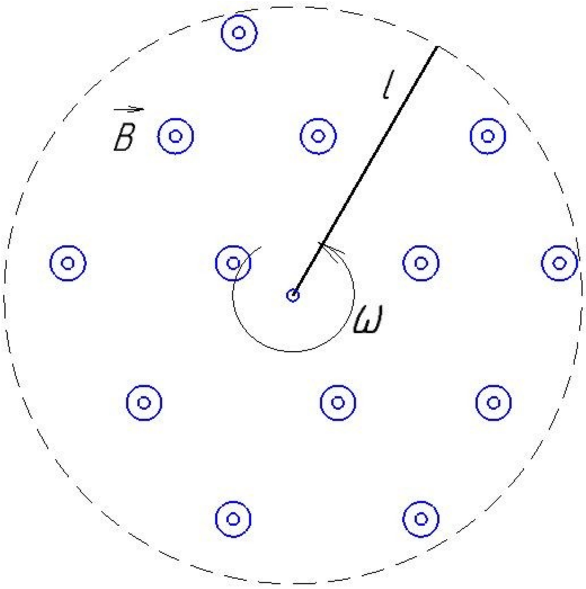
$\omega=28\ рад/с$

$\varepsilon=1.6\,В$

Найти:

B

Решение



Запишем закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon=\frac{-d\Phi}{dt}$$

где $d\Phi$ – изменение магнитного потока через контур.

В данном случае за один оборот стержень пересекает магнитный поток, равный:

$$d\Phi = B \cdot S \cdot \cos(\alpha)$$

где B – величина индукции магнитного поля;

S – площадь контура;

α – угол между вектором индукции и нормалью к плоскости контура.

В данном случае площадь контура – площадь круга, радиуса, равного длине стержня l:

$$S = \pi \cdot l^2$$

По условию указано, что плоскость вращения перпендикулярна силовым линиям поля. Тогда,

$$\alpha = 90° \rightarrow \cos(\alpha) = 1$$

Поскольку рассчитывается изменение магнитного потока для одного оборота, то промежуток времени равен периоду вращения:

$$dt = T$$

Угловая скорость вращения связана с периодом вращения соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Подставим полученные формулы в исходную. Выразим величину индукции магнитного поля:

$$\varepsilon = \left| \frac{-d\Phi}{dt} \right| = \frac{B \cdot S \cdot \cos(\alpha)}{T} = \frac{B \cdot \pi \cdot l^2}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{B \cdot l^2 \cdot \omega}{2}$$

$$B = \frac{2\varepsilon}{l^2 \cdot \omega}$$

Подставим в полученную формулу числовые значения:

$$B = \frac{2\varepsilon}{l^2 \cdot \omega} = \frac{2 \cdot 1,6}{1,1^2 \cdot 28} = 94,5 \cdot 10^{-3}\,Тл = 94,5\,мТл$$

Ответ: $B = 94{,}5\ мТл$.