Вариант № 18

В задачах 1-9 найти общие решения уравнений и частные решения, если есть начальные условия.

1. $(y^2 - 2x^2)dy + 2xydx = 0; \quad y\big|_{x=1} = 1$. Уравнение является однородным. Сделаем замену $y = ux$. Тогда $dy = udx + xdu$. Получим уравнение $x^2(u^2 - 2)(udx + xdu) + 2x^2udx = 0$, или $u^3dx + x(u^2 - 2)du = 0$. Разделяем переменные: $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{(u^2 - 2)du}{u^3}$. Интегрируем уравнение: $\displaystyle\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{(u^2 - 2)du}{u^3} = -\int\frac{du}{u} + 2\int\frac{du}{u^3}$. Получим: $\ln x = -\ln u - u^{-2} + C$ или $\ln(xu) = -u^{-2} + C$.

Вернёмся к переменной *y*, делая обратную замену *u=y/x*: $\ln y + \dfrac{x^2}{y^2} = C$. Определим постоянную С из начальных условий: $1/1 = C$, отсюда *C*=1. Подставляя это значение в общее решение, получим частное решение: $\ln y + \dfrac{x^2}{y^2} = 1$ или $x^2 - y^2 + y^2\ln y = 0$. **Ответ:** $x^2 - y^2 + y^2\ln y = 0$.

2. $(1 + x^2)y' + xy = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{2(1 + \sqrt{x})}; \quad y\big|_{x=0} = 1$. Уравнение является линейным. Решим его методом Бернулли. Будем искать решение в виде произведения *y=U·V*, где *U* и *V* неизвестные функции, определяемые в данном случае уравнениями $(1 + x^2)U' + xU = 0$ и $(1 + x^2)UV' = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{2(1 + \sqrt{x})}$. Решим первое уравнение: $dU = -\dfrac{xU}{1 + x^2}dx$ или $\dfrac{dU}{U} = -\dfrac{xdx}{1 + x^2}$. Отсюда $\ln|U| = -\dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$ (произвольная постоянная добавляется при решении второго уравнения). Потенцируя, находим: $U = (1 + x^2)^{-1/2}$. Подставим найденную функцию *U* во второе уравнение и решим его: $(1 + x^2)(1 + x^2)^{-1/2}V' = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{2(1 + \sqrt{x})}$ или $V' = \dfrac{1}{2(1 + \sqrt{x})}$. Тогда

$$V = \int\frac{1}{2(1 + \sqrt{x})}dx = \left|x = t^2,\ dx = 2tdt\right| = \int\frac{tdt}{1 + t} = \int\frac{(1 + t - 1)dt}{1 + t} = t + \ln(1 + t) + C = \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}) + C$$

. Таким образом, общее решение имеет вид: $y = (1 + x^2)^{-1/2}[\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}) + C]$. Найдём *C*, исходя из начальных условий: $1 = 1\cdot[0 + C]$. Тогда $C = 1$. Таким образом, частное решение есть $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}[\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}) + 1]$. **Ответ:** $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}[\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}) + 1]$.

3. $y' + xy - x^3y^3 = 0; \quad y(0) = -1$. Это уравнение Бернулли. Его можно решать непосредственно как линейное уравнение, применяя метод вариации произвольной постоянной. Решим однородное уравнение: $y' + xy = 0$ или $\dfrac{dy}{y} = -xdx, \quad \ln|y| = -x^2/2 + \ln C$.

Отсюда находим $y = Ce^{-x^2/2}$. Будем предполагать, что решение исходного уравнения имеет такую же структуру, но *C=C(x)*, т.е. $y = C(x)\cdot e^{-x^2/2}$, где *C(x)* – некоторая неизвестная функция. Определим эту функцию, подставляя данное (предполагаемое) решение в исходное уравнение. Найдём y': $y' = C'e^{-x^2/2} - xCe^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}(C' - xC)$. Тогда $e^{-x^2/2}(C' - xC) + xCe^{-x^2/2} = x^3(Ce^{-x^2/2})^3$. Или $C' = x^3C^3e^{-x^2}$. Разделяем переменные: $\dfrac{dC}{C^3} = x^3e^{-x^2}dx$. Интегрируем уравнение:

$$-1/(2C^2) = \int x^3e^{-x^2}dx = \left|x^2 = t,\ 2xdx = dt\right| = \frac{1}{2}\int te^{-t}dt = \left|\begin{matrix} t = u,\ dt = du, \\ e^{-t}dt = dv,\ v = -e^{-t}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}(-te^{-t} + \int e^{-t}dt) =$$

$=\frac{1}{2}(-te^{-t}-e^{-t}-C_1)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)-\frac{1}{2}C_1$. Следовательно, $C(x)=\pm\sqrt{\frac{1}{e^{-x^2}(x^2+1)+C_1}}$.

Общие решение уравнения $y=\pm\sqrt{\frac{1}{e^{-x^2}(x^2+1)+C_1}}\cdot e^{-x^2/2}$ или $y=\frac{1}{\pm\sqrt{x^2+1+C_1}}$.

Воспользуемся начальными условиями: $-1=\frac{1}{\pm\sqrt{1+C_1}}$, т.е. C_1=0, а в решении выбирается знак минус. Тогда частным решением будет $y=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **Ответ:** $y=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

4. $(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2})dx+(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2})dy=0$.

Найдём частные производные:

$\frac{\partial}{\partial y}[\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}]=-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}]=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$. Следовательно, уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Левая часть этого уравнения представляет полный дифференциал некоторой функции *U(x,y)*, так что $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}$.

Проинтегрируем второе уравнение по *y*: $U(x,y)=\int[\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}]dy=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\varphi(x)$. Таким образом, $U(x,y)=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\varphi(x)$, где *φ(x)* – произвольная функция. Найдём эту функцию, пользуясь первым уравнением. С одной стороны $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}+\frac{d\varphi}{dx}$. С другой стороны, $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}$. Приравнивая эти выражения, получим: $\frac{d\varphi}{dx}=0$. Отсюда, $\varphi(x)=0$. Согласно уравнению, *dU*=0. Решением уравнения будет U(x,y)=C. В данном случае $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=C$.

Ответ: $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=C$.

5. $y''\cos y+y'^2\sin y=y'$; $y(-1)=\pi/6; y'(-1)=2$. Уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка. В уравнении отсутствует независимая переменная *x*. Сделаем замену $y'=p=p(y)$. Тогда $y''=\frac{dp}{dy}y'=\frac{dp}{dy}p$. Получим уравнение первого порядка: $p\frac{dp}{dy}\cos y+p^2\sin y=p$. Решение $p=0$ не удовлетворяет начальным условиям. Решаем уравнение $\frac{dp}{dy}\cos y+p\sin y=1$ методом Бернулли: $p=UV$, $\frac{dp}{dy}=V\frac{dU}{dy}+U\frac{dV}{dy}$.

Функцию *U* найдём из уравнения $\frac{dU}{dy}\cos y+U\sin y=0\Rightarrow dU=-U\frac{\sin y}{\cos y}dy$ Или $\frac{dU}{U}=-\frac{\sin y}{\cos y}dy,\ \ln|U|=\ln|\cos y|,\ U=\cos y$. Функцию *V* найдём из уравнения $U\cos y\frac{dV}{dy}=1$. Подставляя сюда функцию *U*, получим: $\cos^2 y\frac{dV}{dy}=1,\ dV=\frac{dy}{\cos^2 y},\ V=tg\,y+C_1$. Таким образом, $p=UV=\cos y(tg\,y+C_1)=\sin y+C_1\cos y=y'$. Определим постоянную C_1, пользуясь начальным условием $y(-1)=\pi/6; y'(-1)=2$: $2=\sin(\pi/6)+C_1\cos(\pi/6),\ C_1=\sqrt{3}$.

Следовательно, $y'=\sin y+\sqrt{3}\cos y$. Тогда

$x = \int \frac{dy}{\sin y + \sqrt{3}\cos y} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sin(y+\pi/3)} = \frac{1}{2}\ln\left|tg(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6})\right| + C_2$. Определим C_2, пользуясь вторым начальным условием $y(-1) = \pi/6$: $-1 = \frac{1}{2}\ln\left|tg(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6})\right| + C_2$, $C_2 = -1$. Следовательно, $x = \frac{1}{2}\ln\left|tg(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6})\right| - 1$ или $2(x+1) = \ln\left|tg(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6})\right| \Rightarrow tg(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}) = e^{2(x+1)} \Rightarrow \frac{y}{2}+\frac{\pi}{6} = arctg\, e^{2(x+1)}$, Окончательно, $y = 2arctg\, e^{2(x+1)} - \frac{\pi}{3}$. **Ответ:** $y = 2arctg\, e^{2(x+1)} - \frac{\pi}{3}$.

6. $y'' - 12y' + 36y = \frac{2xe^{6x}}{x^2+2}$. Линейное неоднородное уравнение второго порядка. Решим уравнение методом вариации произвольных постоянных. Найдём сначала решение однородного уравнения $y'' - 12y' + 36y = 0$. Характеристическое уравнение $r^2 - 12r + 36 = 0$ имеет два равных корня: $r_{1,2} = 6$. Получаем два частных решений: $y_1 = e^{6x}$, $y_2 = xe^{6x}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = C_1y_1 + C_2y_2$ *или* $y = e^{6x}(C_1 + C_2x)$. Будем считать, что решение неоднородного уравнения имеет такую же структуру, но C_1 и C_2 являются функциями переменной x: $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$. Тогда, в соответствии с методом вариации произвольных постоянных, неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются системой уравнений: $\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$, где $f(x)$ – правая часть неоднородного уравнения. В данном случае имеем систему: $\begin{cases} C_1'(x)e^{6x} + C_2'(x)xe^{6x} = 0 \\ 6C_1'(x)e^{6x} + (1+6x)C_2'(x)e^{6x} = \frac{2xe^{6x}}{x^2+2} \end{cases}$. Поделим все уравнения на $e^{6x} \neq 0$: $\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0 \\ 6C_1'(x) + (1+6x)C_2'(x) = \frac{2x}{x^2+2} \end{cases}$. Решим систему методом Крамера:

$C_1' = \frac{-2x^2/(x^2+2)}{1+6x-6x} = -\frac{2x^2}{x^2+2}$, $C_2' = \frac{2x/(x^2+2)}{1} = \frac{2x}{x^2+2}$. Интегрируя, получаем:

$C_1 = -2\int\frac{x^2dx}{x^2+2} = -2\int\frac{(x^2+2-2)dx}{x^2+2} = -2x + \frac{4}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + C_3$, $C_2 = \int\frac{2xdx}{x^2+2} = \ln(x^2+1) + C_4$.

Следовательно, решением неоднородного уравнения будет $y = e^{6x}(C_3 + C_4x - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + x\ln(x^2+1))$. Теперь можно вернуться к прежним обозначениям произвольных постоянных. Положим C_3=C_1 и C_4-2=C_2. Окончательно, $y = e^{6x}[C_3 + C_4x + x\ln(x^2+1) + 2\sqrt{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}]$.

Ответ: $y = e^{6x}[C_3 + C_4x + x\ln(x^2+1) + 2\sqrt{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}]$.

7. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 3x^2 - 2$. Линейное неоднородное уравнение четвёртого порядка. Найдём сначала решение однородного уравнения $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$. Характеристическое уравнение $r^4 + 2r^3 + r^2 = 0$, или $r^2(r+1)^2 = 0$, имеет четыре корня: $r_{1,2} = 0$, $r_{3,4} = -1$. Получаем четыре частных решений: $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = e^{-x}, y_4 = xe^{-x}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{oo} = C_1 + C_2x + e^{-x}(C_3 + C_4x)$. Найдём частное решение неоднородного уравнения, исходя из структуры его правой части: $y_{чн} = x^2(Ax^2 + Bx + C)$. Здесь множитель x^2 обусловлен тем, что корень характеристического уравнения r=0 совпадает с коэффициентом α в экспоненте $e^{\alpha x}$, «стоящей» в правой части уравнения (α=0). Найдём производные $y_{чн}$: $y_{чн} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$ $y_{чн}' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$, $y_{чн}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$, $y_{чн}''' = 24Ax + 6B$, $y_{чн}^{(4)} = 24A$. Подставим это в исходное уравнение: $24A + 48Ax + 12B + 12Ax^2 + 6Bx + 2C = 3x^2 - 2$. Отсюда находим

$12A=3,\ 48A+6B=0,\ 24A+12B+2C=-2$. Или $A=1/4,\ B=-2,\ C=8$. Следовательно, $y_{чн}=\frac{1}{4}x^4-2x^3+8x^2$. Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $y=C_1+C_2x+e^{-x}(C_3+C_4x)+\frac{1}{4}x^4-2x^3+8x^2$.

Ответ: $y=C_1+C_2x+e^{-x}(C_3+C_4x)+\frac{1}{4}x^4-2x^3+8x^2$.

8. $y''+y'-6y=e^{-3x}(-30x^2-18x+21),\quad (x;y;y')=(0;0;2)$. Линейное неоднородное уравнение второго порядка. Найдём сначала решение однородного уравнения $y''+y'-6y=0$. Характеристическое уравнение $r^2+r-6=0$ имеет два корня: $r_1=2,\ r_2=-3$. Получаем два частных решения: $y_1=e^{2x},\ y_2=e^{-3x}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{oo}=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$. Найдём частное решение неоднородного уравнения, исходя из структуры его правой части: $y_{чн}=x(Ax^2+Bx+C)e^{-3x}$. Найдём производные $y_{чн}$: $y_{чн}=(Ax^3+Bx^2+Cx)e^{-3x}$, $y'_{чн}=e^{-3x}[-3Ax^3+(3A-3B)x^2+(2B-3C)x+C]$, $y''_{чн}=e^{-3x}[9Ax^3+(9B-18A)x^2+(6A-12B+9C)x+2B-6C]$. Подставим это в исходное уравнение:

$e^{-3x}[9Ax^3+(9B-18A)x^2+(6A-12B+9C)x+2B-6C]+e^{-3x}[-3Ax^3+(3A-3B)x^2+$
$+(2B-3C)x+C]-6(Ax^3+Bx^2+Cx)e^{-3x}=e^{-3x}(-30x^2-18x+21)$. Отсюда находим $-15A=-30,\ 6A-10B=-18,\ 2B-5C=21$ или $A=2,\ B=3,\ C=-3$. Следовательно, $y_{чн}=(2x^3+3x^2-3x)e^{-3x}$. Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+(2x^3+3x^2-3x)e^{-3x}$. Воспользуемся начальными условиями: $y(0)=0,\ y'(0)=2$. По первому условию $C_1+C_2=0$. Найдём y': $y'=2C_1e^{2x}-3C_2e^{-3x}+e^{-3x}[-6x^3-3x^2+15x-3]$. Тогда, по второму условию, $2C_1-3C_2-3=2$. Решая систему уранений, получим: $C_1=1, C_2=-1$. Частное решение уравнения будет $y=e^{2x}+e^{-3x}(2x^3+3x^2-3x-1)$.

Ответ: $y=e^{2x}+e^{-3x}(2x^3+3x^2-3x-1)$.

9. $y''+8y'+16y=(86x+21)\cos 3x-(27x+122)\sin 3x$. Линейное неоднородное уравнение второго порядка. Найдём сначала решение однородного уравнения $y''+8y'+16y=0$. Характеристическое уравнение $r^2+8r+16=0$ имеет два корня: $r_{1,2}=-4$. Получаем два частных решения: $y_1=e^{-4x},\ y_2=xe^{-4x}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{oo}=e^{-4x}(C_1+C_2x)$. Найдём частное решение неоднородного уравнения, исходя из структуры его правой части: $y_{чн}=(Ax+B)\cos 3x+(Dx+C)\sin 3x$. Найдём производные $y_{чн}$:

$y'_{чн}=A\cos 3x-(3Ax+3B)\sin 3x+D\sin 3x+(3Dx+3C)\cos 3x=(D-3Ax-3B)\sin 3x+$
$+(A+3Dx+3C)\cos 3x$. $y''_{чн}=(-6A-9Dx-9C)\sin 3x+(6D-9Ax-9B)\cos 3x$. Подставим это в исходное уравнение:

$(-6A-9Dx-9C)\sin 3x+(6D-9Ax-9B)\cos 3x+8[(D-3Ax-3B)\sin 3x+(A+$
$+3Dx+3C)\cos 3x]+16[(Ax+B)\cos 3x+(Dx+C)\sin 3x]=(86x+21)\cos 3x-(27x+122)\sin 3x$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях равенства, получим: $7D-24A=-27,\ 7A+24D=86,\ -6A-24B+7C+8D=-122,\ 8A+7B+24C+6D=21$.

Решая систему, находим: $A=2,\ B=5,\ C=-2,\ D=3$. Следовательно, $y_{чн}=(2x+5)\cos 3x+(3x-2)\sin 3x$. Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $y=e^{-4x}(C_1+C_2x)+(2x+5)\cos 3x+(3x-2)\sin 3x$.

Ответ: $y=e^{-4x}(C_1+C_2x)+(2x+5)\cos 3x+(3x-2)\sin 3x$.

10. Решить систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами $X'=MX$, где $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, x,y,z - функции от t, M – матрица коэффициентов, при начальных условиях $X_{(t=0)}=X_0$:

$$M=\begin{pmatrix}2&2&3\\5&-3&-7\\5&-1&1\end{pmatrix},\quad X_0=\begin{pmatrix}13\\3\\2\end{pmatrix}.$$

Запишем систему по исходным данным:

$\begin{cases}x'=2x+2y+3z\\y'=5x-3y-7z\\z'=5x-y+z\end{cases}$. Ищем решение в виде $\begin{cases}x=k_1e^{rt}\\y=k_1e^{rt}\\z=k_1e^{rt}\end{cases}$. Тогда $\begin{cases}x'=k_1re^{rt}\\y'=k_1re^{rt}\\z'=k_1re^{rt}\end{cases}$. Подставляя это в систему, получим систему алгебраических уравнений, которая определяет неизвестные коэффициенты k_1, k_2, k_3: $\begin{cases}(2-r)k_1+2k_2+3k_3=0\\5k_1-(r+3)k_2-7k_3=0\\5k_1-k_2+(1-r)k_3=0\end{cases}$. Приравнивая определитель системы к нулю, получим характеристическое уравнение исходной системы:

$\begin{vmatrix}(2-r)&2&3\\5&-(r+3)&-7\\5&-1&(1-r)\end{vmatrix}=0$. Раскроем определитель:

$(r-2)(r+3)(1-r)-70-15+15(r+3)+7(r-2)-10(1-r)=0$. Или $(r-2)(r^2+2r-35)=0$.

Следовательно, $r_1=2, r_2=5, r_3=-7$. При $r_1=2$ получим систему: $\begin{cases}2k_2+3k_3=0\\5k_1-5k_2-7k_3=0\\5k_1-k_2-k_3=0\end{cases}$.

Отбросим второе уравнение, как линейно зависимое. Получим $\begin{cases}2k_2+3k_3=0\\5k_1-k_2-k_3=0\end{cases}$. Положим $k_1=1$. Тогда $k_2=15, k_2=-10$. Получили первое частное решение:

$x_1=e^{2t}$, $y_1=15e^{2t}$, $z_1=-10e^{2t}$. При $r_2=5$ получим систему: $\begin{cases}-3k_1+2k_2+3k_3=0\\5k_1-8k_2-7k_3=0\\5k_1-k_2-4k_3=0\end{cases}$.

Отбросим второе уравнение, как линейно зависимое. Получим $\begin{cases}-3k_1+2k_2+3k_3=0\\5k_1-k_2-4k_3=0\end{cases}$.

Решая систему, получим: $k_2=-\dfrac{3}{7}k_3, k_1=\dfrac{5}{7}k_3$ Положим $k_3=7$. Тогда $k_2=-3, k_1=5$.

Получили второе частное решение: $x_2=5e^{5t}$, $y_2=-3e^{5t}$, $z_2=7e^{5t}$.

При $r_3 = -7$ получим систему: $\begin{cases} 9k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ 5k_1 + 4k_2 - 7k_3 = 0 \\ 5k_1 - k_2 + 8k_3 = 0 \end{cases}$. Отбросим второе уравнение, как линейно зависимое. Получим $\begin{cases} 9k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ 5k_1 - k_2 + 8k_3 = 0 \end{cases}$. Положим $k_1 = 1$. Тогда $k_3 = -1,\ k_2 = -3$.

Получили третье частное решение: $x_3 = e^{-7t}$, $y_3 = -3e^{-7t}$, $z_3 = -e^{-7t}$. Общее решение записывается как линейная комбинация частных решений: $\begin{cases} x = c_1e^{2t} + 5c_2e^{5t} + c_3e^{-7t} \\ y = 15c_1e^{2t} - 3c_2e^{5t} - 3c_3e^{-7t} \\ z = -10c_1e^{2t} + 7c_2e^{5t} - c_3e^{-7t} \end{cases}$.

Найдём произвольные постоянные, пользуясь начальными условиями. При t=0 получим систему: $\begin{cases} c_1 + 5c_2 + c_3 = 13 \\ 15c_1 - 3c_2 - 3c_3 = 3 \\ -10c_1 + 7c_2 - c_3 = 2 \end{cases}$. Исключим c_3, складывая первое уравнение с третьим, затем второе уравнение с первым, умноженным на 3. Получим: $\begin{cases} -9c_1 + 12c_2 = 15 \\ 18c_1 + 12c_2 = 42 \end{cases}$.
Следовательно, $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 2$. Таким образом, частное решение системы следующее:
$\begin{cases} x = e^{2t} + 10e^{5t} + 2e^{-7t} \\ y = 15e^{2t} - 6e^{5t} - 6e^{-7t} \\ z = -10e^{2t} + 14e^{5t} - 2e^{-7t} \end{cases}$. **Ответ:** $\begin{cases} x = e^{2t} + 10e^{5t} + 2e^{-7t} \\ y = 15e^{2t} - 6e^{5t} - 6e^{-7t} \\ z = -10e^{2t} + 14e^{5t} - 2e^{-7t} \end{cases}$.

11. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку М(2; 0) и такую, что отрезок касательной между точкой касания и осью ОУ имеет постоянную длину, равную 2.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Найдём точки пересечения касательной с осью OY. Положим x=0. Тогда $y - y_0 = -x_0 f'(x_0)$ или $y = y_0 - x_0 f'(x_0)$. Точка $M_1(0; y_0 - x_0 f'(x_0))$ является точкой пересечения оси OY. По условию задачи длина отрезка M_0M_1 равна 2, т.е. $(0 - x_0)^2 + [y_0 - (y_0 - x_0 f'(x_0))]^2 = 4$. Или $x_0^2 + [x_0 f'(x_0)]^2 = 4$. Это равенство справедливо для любой точки $(x_0; y_0)$. Заменим эту точку произвольной точкой $(x; y)$, лежащей на кривой $y = f(x)$. Получим: $x^2 + x^2y'^2 = 4$, или $y' = \pm\sqrt{\frac{4}{x^2} - 1} = \pm\frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$. Разделяем переменные и интегрируем: $dy = \pm\frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} \cdot dx$. Интегрируем:

$$y = \pm\int\frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}dx = \left|\begin{matrix} 4 - x^2 = t^2, x^2 = 4 - t^2, \\ -xdx = tdt \end{matrix}\right| = \pm[-\int\frac{t \cdot tdt}{4 - t^2}] = \pm\int\frac{4 - t^2 - 4}{4 - t^2}dt = \pm[\int dt -$$

$$-4\int\frac{dt}{4 - t^2}] = \pm[t + \ln\left|\frac{2 - t}{2 + t}\right|] + C = \pm[t + \ln\left|\frac{(2 - t)^2}{4 - t^2}\right|] + C = \pm[\sqrt{4 - x^2} + 2\ln\left|\frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x}\right|] + C.$$

Находим C, учитывая, что кривая проходит через точку М(2, 0): $0 = \pm 0 + C \Rightarrow C = 0$. Тогда $y = \pm[\sqrt{4 - x^2} + 2\ln\left|\frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x}\right|]$. **Ответ:** $y = \pm[\sqrt{4 - x^2} + 2\ln\left|\frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x}\right|]$.

12. Цепь длиной $L = 6$ м соскальзывает вниз со стола без трения. В начальный момент свешивался конец цепи длиной $S = 1$ м. Определите время соскальзывания цепи со стола.

Пусть масса одного погонного метра цепи равна *m.* Обозначим через $x(t)$ длину части цепи, свешивающейся со стола в момент времени t после начала скольжения. По условию задачи $x(0)$=1. К центру тяжести цепи приложена сила $F = mxg$. Масса всей цепи равна 6*m.* По второму закону Ньютона получаем: $6mx'' = mxg$ или $x'' = xg/6$.

Характеристическое уравнение $r^2 - g/6 = 0$ имеет два корня: $r_{1,2} = \pm\sqrt{g/6}$. Следовательно, $x(t) = C_1 e^{t\sqrt{g/6}} + C_2 e^{-t\sqrt{g/6}}$. Для определения частного решения воспользуемся начальными условиями: $x(0) = 1,\ x'(0) = 0$. Получаем $C_1 + C_2 = 1,\ C_1\sqrt{g/6} - C_2\sqrt{g/6} = 0$, т.е. $C_1 = C_2 = 1/2$. Тогда частным решением будет функция $x(t) = \frac{1}{2}[e^{t\sqrt{g/6}} + e^{-t\sqrt{g/6}}] = ch\left(t\cdot\sqrt{\frac{g}{6}}\right)$. Разрешим это равенство относительно t: $t\cdot\sqrt{\frac{g}{6}} = arch(x) = \pm\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. По смыслу переменных следует выбрать знак «+». Окончательно, $t = \sqrt{\frac{6}{g}}\cdot\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Положим $x = 6$. Получим: $T = \sqrt{\frac{6}{g}}\cdot\ln(6 + \sqrt{35}) \approx 2\ c$. **Ответ:** $T = \sqrt{\frac{6}{g}}\cdot\ln(6 + \sqrt{35}) \approx 2\ c$.