Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

Г.Н. Бояркин, О.Г. Шевелева

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Методические указания к практическим занятиям

Омск
Издательство ОмГТУ
2008

Составители: Г.Н. Бояркин, О.Г. Шевелева

Методические указания для практических занятий по дисциплине «Теория систем и системный анализ» направлены на получение и закрепление знаний по применению методов, изложенных в данной дисциплине для решения практических задач экономической направленности. Методические указания предназначены для студентов специальности 080801 «Прикладная информатика (в экономике)» как дневной, так и заочной форм обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Омского государственного технического университета

Тема 1. МОДЕЛИ УПОРЯДОЧЕНИЯ

Модели упорядочения характеризуются следующими особенностями. Например, имеется множество различных деталей с определенными технологическими маршрутами, а также несколько единиц оборудования (фрезерный, токарный, шлифовальный станки), на которых эти детали обрабатываются, т. к. одновременно обрабатывать более одной детали невозможно – у некоторых станков может образоваться очередь, т. е. деталей, ждущих обработки. Время обработки каждой детали известно. Определить такую очередность обработки деталей на каждом станке, при котором минимизируется некоторый критерий оптимальности, например, суммарная продолжительность завершения комплекса работ. Такая задача называется задачей календарного планирования или составления расписания, а выбор очередности запуска деталей в обработку – упорядочением.

В качестве примера рассмотрим упрощенный вариант этой задачи, для которой разработан удобный алгоритм.

Пусть имеется несколько изделий, каждая из которых должна быть обработана на 2-х машинах (станках). Известны время обработки и последовательность обработки каждого изделия на каждой машине. Требуется выбрать такой порядок обработки изделий, при котором суммарное время обработки будет минимальным.

Основные ограничения:

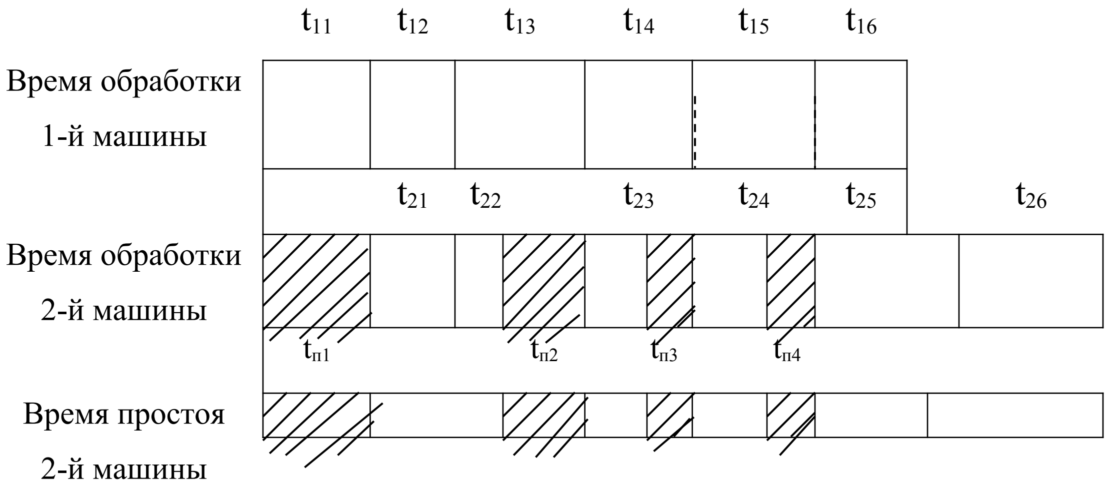
а) время перехода от одной машины к другой незначительно и им можно пренебречь;

б) каждое изделие обрабатывается в определенном технологическом порядке;

в) каждое обслуживание должно быть завершено прежде, чем начнется следующее.

Обозначим t_{1j} – время обработки j-го изделия на 1-й машине, t_{2j} – на 2-й машине.

Пример:



Номер изделия	j	1	2	3	4	5	6

Время обработки на 1-й машине	t_{1j}	6	4	6	5	7	4
Время обработки на 2-й машине	t_{2j}	5	2	3	6	6	7

Построение модели.

Пусть $t_{Пj}$ – время простоя 2-й машины между концом выполнения работы по обработке *j*-1-го изделия на 2-й машине и началом обработки *j*-го изделия на той же самой машине. Тогда суммарное время обработки изделий составит:

$$T=\sum_{j=1}^{m} t_{2j}+\sum_{j=1}^{m} t_{Пj}=29+12=41$$

Так как сумма $\sum_{j=1}^{m} t_{2j}$ известна, то надлежит минимизировать $\sum_{j=1}^{m} t_{Пj}$

(в нашем случае $\sum_{j=1}^{6} t_{Пj}=12$).

Построение алгоритма.

Для нахождения оптимальной последовательности порядка обслуживания “m” требований на 2-х пунктах обслуживания наибольшую известность получил «алгоритм Джонсона». Включает следующие этапы:

а) **поиск наименьшего элемента:**

Рассмотрим все t_{1j} и t_{2j} и среди них выберем минимальное, т. е. $\min\left\{ t_{1j}, t_{2j} \right\}$. В нашем случае это $t_{2j}=2$.

б) **перестановка изделий:**

Если выбранная величина находится в 1-й строке (относится к 1-й машине), то соответствующее изделие помещается на обслуживание в первую возможную очередь. Если – во 2-й строке (относится ко 2-й машине) – то в последнюю очередь.

в) **исключение из рассматриваемого выбранного изделия:**

Выбранному изделию присваивается новый номер в очереди, который в дальнейшем считается занятым. Из последующего рассмотрения оно исключается.

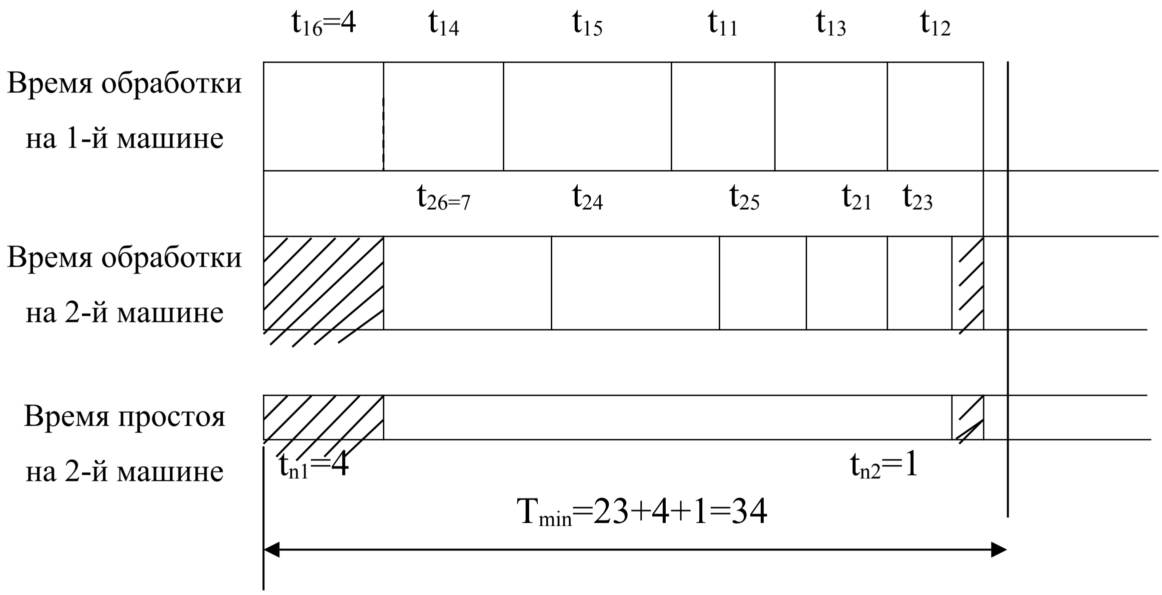
Далее осуществляется переход к этапу а).

После определения оптимального порядка обработки изделий на машинах графически определяется время простоя и работы 2-й машины, которое является минимальным из всех возможных.

Номер изделия	j	1	2	3	4	5	6
Время обработки на 1-й машине	t_{1j}	6	4	6	5	7	4
Время обработки	t_{2j}	5	2	3	6	6	7

на 2-й машине		(4)	(6)	(5)	(2)	(3)	(1)
Номер изделия		4	1	2	4	5	3

Номер изделия	j	6	4	5	1	3	2
Время обработки на 1-й машине	t_{1j}	4	5	7	6	6	4
Время обработки на 2-й машине	t_{2j}	7	6	6	5	3	2



Задачи (для самостоятельного решения)

Определить оптимальный порядок обработки изделий:

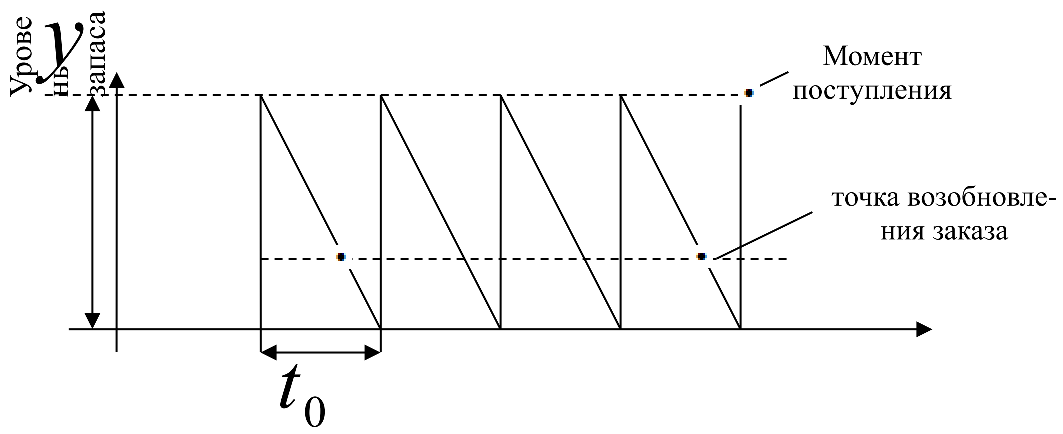
Номер изделия	j	1	2	3	4	5
Время обработки на 1-й машине	t_{1j}	3	7	4	5	7
Время обработки на 2-й машине	t_{2j}	6	2	7	3	4

Номер изделия	j	1	2	3	4	5	6
Время обработки на 1-й машине	t_{1j}	8	3	4	7	2	6
Время обработки на 2-й машине	t_{2j}	4	5	2	8	7	1

Тема 2. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

а) однопродуктовая модель простейшего типа

Оптимальное строение модели предусматривает заказ y^* ед. продукции через каждые $t_0^* = y^*/\beta$ ед. времени.



Оптимальное значение заказа (формула Вильсона)

$$\boxed{y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}} \tag{2.1}$$

Здесь K – затраты на оформление заказа;

β – интенсивность спроса;

h – затраты на хранение в ед. времени.

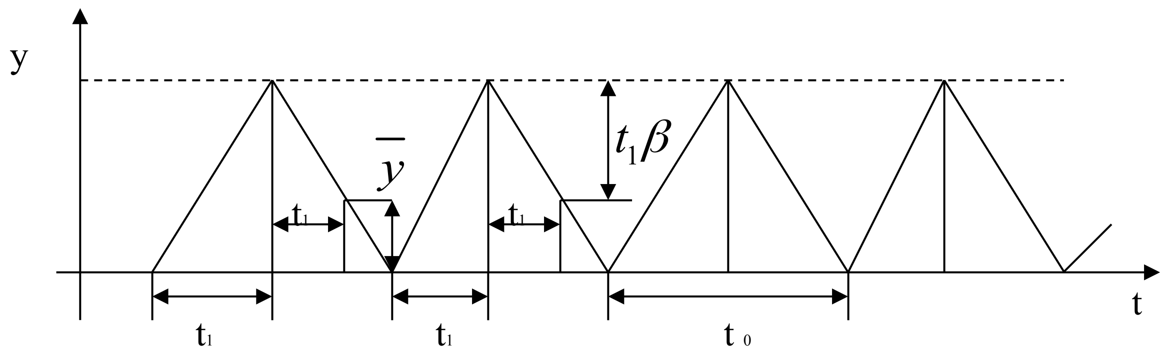
Оптимальные затраты:

$$\boxed{U(y^*) = \sqrt{2K\beta h}} \tag{2.2}$$

В стратегию размещения заказа должна входить и точка возобновления заказа. На практике она определяется непрерывным контролем уровня запаса.

$$U_з^* = \begin{cases} t_0\beta, t_0 > L \\ (L - t_0)\beta, t_0 < L \end{cases} \tag{2.3}$$

б) модель с равномерным пополнением запаса

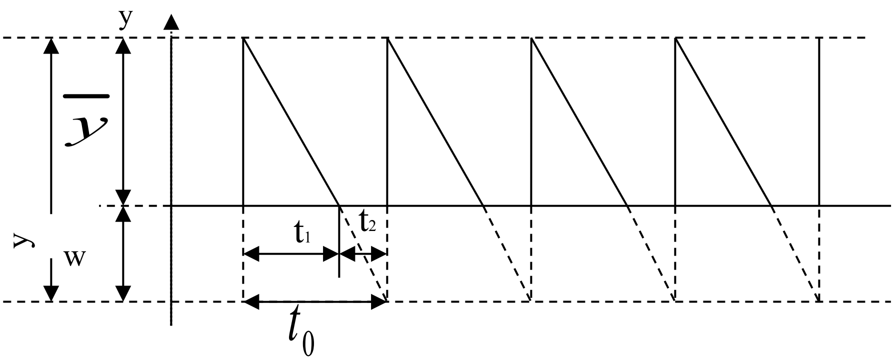


$$t_1 = \frac{y}{d}; \; \bar{y} = \frac{y}{\alpha}\beta \Rightarrow \; U(y) = \frac{K\beta}{y} + \frac{h}{2}(1 - \frac{\beta}{\alpha})y$$

$$\boxed{y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h(1 - \frac{\beta}{\alpha})}}}$$

(2.4)

в) модели с дефицитом



y – уровень потребляемой продукции; $\overline{y}$ – поступающая продукция

По графику можно составить следующее соотношение

$$\frac{t_1}{t_0}=\frac{y-w}{y};\frac{t_2}{t_0}=\frac{w}{y}$$

Пусть p – удельные потери от дефицита

Тогда суммарные затраты

$$U(y)=\frac{K\beta}{y}+\frac{h(y-w)}{2}\frac{t_1}{t_0}+\frac{pw}{2}\frac{t_2}{t_0}=\frac{K\beta}{y}+\frac{h(y-w)^2}{2y}+\frac{pw^2}{2y}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{K\beta}{y^2}+\frac{h}{2}\frac{2(y-w)y-(y-w)^2}{y^2}-\frac{pw^2}{2y^2}=0;\\ \frac{\partial U}{\partial w}=-\frac{h(y-w)}{y}+\frac{pw}{y}=0.\end{cases} \qquad (2.5)$$

Решая совместно систему (2.5), получим

$$\boxed{y^*=\sqrt{\frac{2K\beta(p+h)}{ph}}} \qquad (2.6)$$

$$\boxed{w^*=\sqrt{\frac{2K\beta h}{p(p+h)}}} \qquad (2.7)$$

Нетрудно доказать, что если модель с равномерным пополнением запаса допускает дефицит, то формулы (2.6) и (2.7) преобразуются в формулы (модель «смешанного типа»)

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta(p+h)}{ph(1-\dfrac{\beta}{\alpha})}}; \tag{2.8}$$

$$w^* = \sqrt{\frac{2K\beta\left(1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}{p(p+h)}}. \tag{2.9}$$

Примеры

1. Ежедневный спрос на некоторый товар составляет около 50 ед. Затраты на размещение каждого запаса постоянны и равны 100 руб. Ежедневные затраты на хранение ед. запасы составляют 0,05 руб./день. Определить оптимальный размер заказа и интервал времени между моментами размещения заказов.

Решение: Используя формулу (2.1) имеем

$$y^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 50}{0,05}} = 894\ \textit{ед.};$$

$$t_0 = \frac{y^*}{\beta} = \frac{894}{50} = 18\ \textit{дней}.$$

Оптимальные затраты (см.2.3) равны

$$U(y^*) = \sqrt{2 \cdot 400 \cdot 50 \cdot 0,05} = 20\sqrt{5}\,\textit{руб}.$$

2. Усложним условия задачи. Пусть запасы пополняются равномерно с интенсивностью $\alpha = 100\textit{ед.}/\textit{день}$.

Тогда

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h(1-\dfrac{\beta}{\alpha})}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 50}{0,05 \cdot 0,5}} = 1265\textit{ед}.$$

3. Еще раз скорректируем условия задачи. Пусть в первоначальной модели допускается дефицит. Причем удельные потери от дефицита составляют $p = 0,1\textit{руб.}/\textit{день}$. Тогда, используя формулы (2.6) и (2.7) получим:

$$y^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 50 \cdot 0,15}{0,1 \cdot 0,05}} = 1095 \text{ ед.};$$

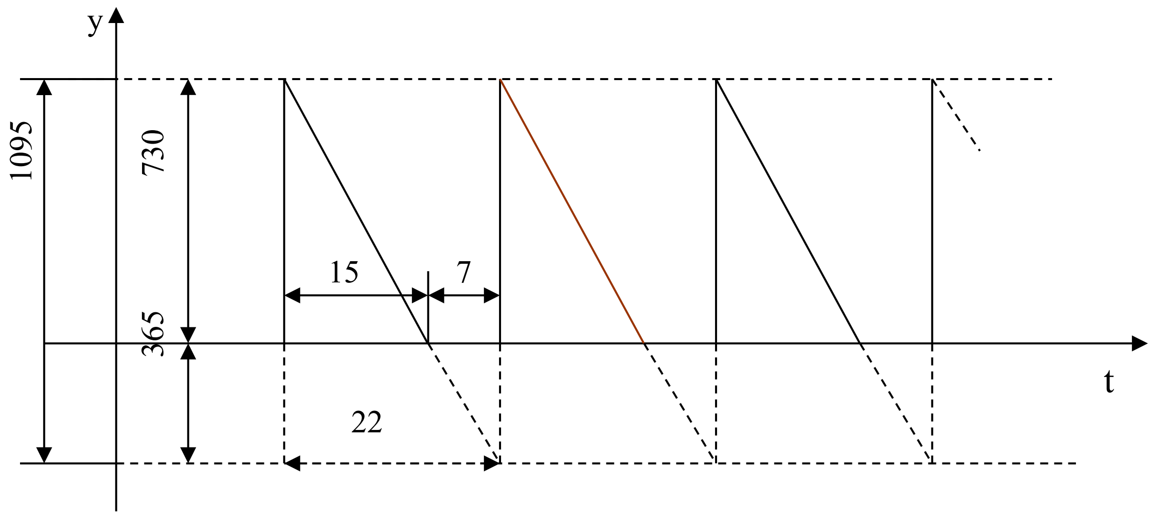
$$w^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 50 \cdot 0,05}{0,1 \cdot 0,15}} = 365 \text{ ед.}$$

Оптимальные затраты

$$U(y^*) = \frac{K\beta}{y^*} + \frac{h(y^* - w^*)^2 + pw^{*2}}{2y^*} =$$

$$= \frac{400 \cdot 50}{1095} + \frac{0,05(1035 - 365)^2 + 0,1 \cdot 365^2}{2 \cdot 1095} = 38 \text{ руб./ день};$$

$$t_0^* = \frac{y^*}{\beta} = \frac{1095}{50} = 22 \text{дней}; t_1 = \frac{730}{50} = 15 \text{ дней}$$



4. Еще раз усложним условия задачи. Пусть в предыдущей модели, допускающей дефицит, запасы пополняются равномерно с интенсивностью $\alpha = 100$ *ед./ день*. Тогда, используя формулы (2.8) и (2.9), при $p = 0,1$ *руб./ день*, получим

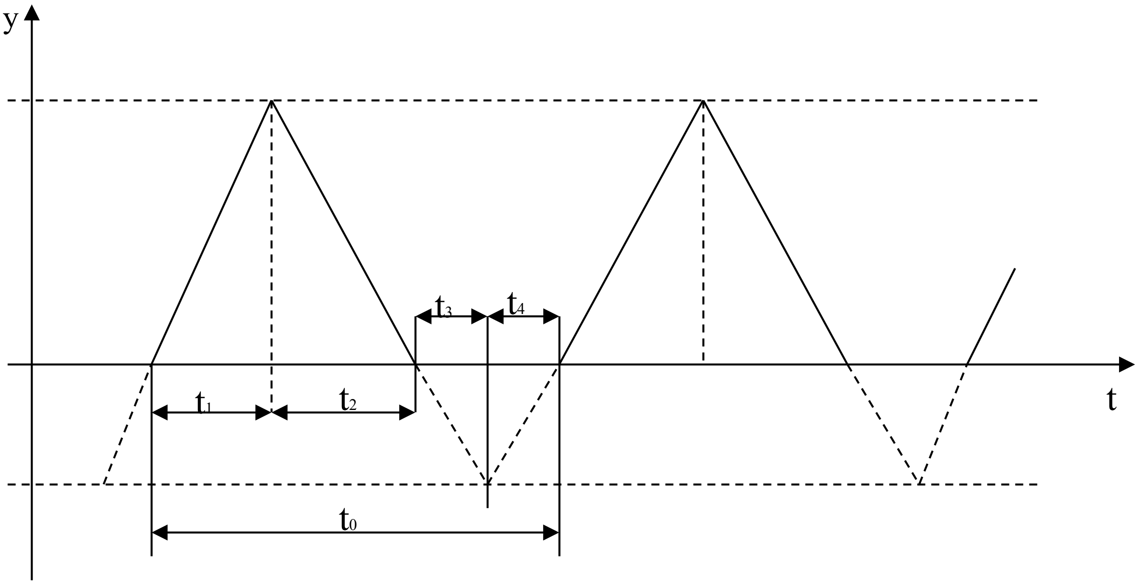
$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta(p+h)}{ph(1 - \beta/\alpha)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 50 \cdot 0,5}{0,005 \cdot 0,5}} = 1549 \text{ ед.};$$

$$w^* = \sqrt{\frac{2K\beta h(1 - \beta/\alpha)}{p(p+h)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 50 \cdot 0,05 \cdot 0,5}{0,1 \cdot 0,15}} = 258 \text{ ед.}$$

Оптимальные затраты

$$U(y^*) = \frac{K\beta}{y^*} + \frac{h\left[y^*(1-\frac{\beta}{\alpha}) - w^*\right]^2 + pw^{*2}}{2(1-\beta/\alpha)y^*} =$$

$$= \frac{400 \cdot 50}{1543} + \frac{0,05\left[775 - 255\right]^2 + 0,1 \cdot 258^2}{1549} = 23,7 \text{ } руб./день.$$



$$t_1^* = \frac{y^* - w^*}{\alpha} = \frac{1549 - 258}{100} = 13 \text{ } дней;$$

$$t_2^* = \frac{y^* - w^*}{\beta} = \frac{1549 - 258}{50} 26 \text{ } дней;$$

$$t_3^* = \frac{w^*}{\beta} = \frac{258}{50} = 5 \text{ } дней;$$

$$t_4^* = \frac{w^*}{\alpha} = \frac{258}{100} = 2,5 \text{ } дней;$$

$$t_0^* = t_1^* + t_2^* + t_3^* + t_4^* = 13 + 26 + 5 + 2,5 = 46,5 \text{ } дней.$$

Задачи (для самостоятельной работы)

1. В каждом из следующих случаев пополнение запаса происходит мгновенно и дефицит не допускается. Найти экономический размер заказа, соответствующие суммарные затраты и интервал времени между двумя заказами:

$$а) K = 100 руб, h = 0,05 руб; \beta = 30 \text{ } ед/день;$$

$$б) K = 50 руб, h = 0,05 руб; \beta = 30 \text{ } ед/день;$$

$$в) K = 100 руб, h = 0,01 руб; \beta = 40 \text{ } ед/день.$$

2. Решить предыдущую задачу, предполагая, что запас пополняется с интенсивностью $\alpha = 50\ ед/день$.
3. Фирма может производить изделие или покупать его. Если фирма сама выпускает изделие, то каждый запуск его в производство обходится в 20 руб. Интенсивность производства составляет 100 ед. в день. Если изделие закупается, то затраты на размещение каждого заказа равны 15 руб. Затраты на
содержание изделия в запасе независимо от того, закупается оно или производится, равны 0,02 руб. в день. Потребление изделия предприятия оценивается в 26 000 ед. в год. Предполагая, что фирма работает без дефицита, определить, что выгоднее закупать или производить изделие?
4. Решить задачу 1, взяв за предположение, что в модели допускается дефицит с удельными потерями от него $P = 0,2\ руб./день$.
5. В случае мгновенного пополнения запаса и отсутствия дефицита, при $K = 100\ руб, \beta = 100\ ед/день, h = 0,02\ руб.$, найти экономический размер заказа и точку возобновления заказа, если выполнение заказа в срок равно 12 дням.

Тема 3. МОДЕЛИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ (СПУ)

Порядок и правила построения сетевых графиков:

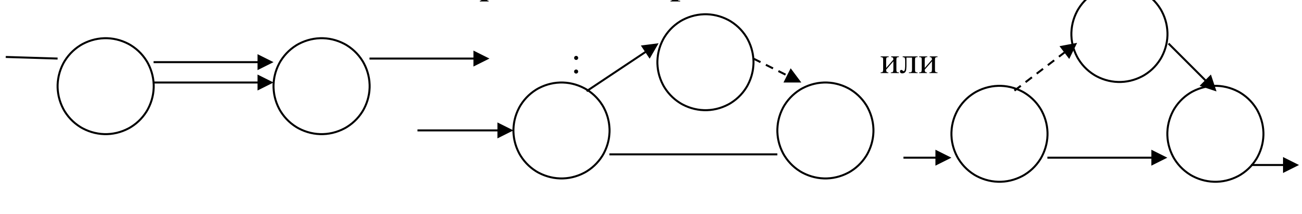
1) Сеть строится слева направо, от исходного события к завершающему.

2) Длина и наклон стрелок значения не имеют. Однако все они направлены слева направо.

3) В сети не должно быть контуров (т. е. замкнутых путей).

4) Сетевой график – это плоский график, поэтому стрелки в нем не должны пересекаться.

5) Пара событий может быть соединена только одной работой (т. е. сетевой график не может быть мультиграфом). Для устранения этой ситуации вводится **дополнительное событие** и **фиктивная работа**.

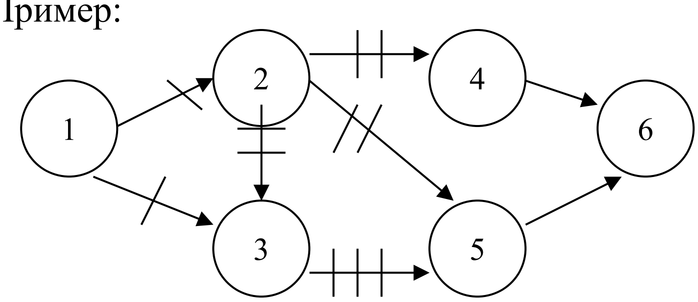


6) В сети не должно быть (кроме исходного) хвостовых событий, т. е. событий, в которые не входит ни одна работа.

7) В сети не должно быть (кроме завершающего) тупиковых событий, т. е. событий, из которых не выходит ни одна работа.

Нумерация (упорядочение сетевого графика) производится по методу **ранжирования**.

Пример:



2 – событие 1-го ранга;
3,4 – событие 2-го ранга;
5 – событие 3-го ранга.

Наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике называется **критическим**.

Критическими называются также **работы** и **события**, расположенные на этом пути.

Временные параметры сетевых графиков и их нахождение

Параметры событий:

$t_p(i)$ – определяется продолжительностью максимального пути, предшествующего этому событию.

$$t_p(i) = \max_{L_{ni}} t(L_{ni}),$$

если j имеет несколько предыдущих событий, то

$$t_p(j) = \max_{i,j} \left[t_p(i) + t(i,j) \right];$$

$$t_П(i) = t_{кр} - \max t(Lc_i),$$

где L_{ci} – любой путь, следующий за i-м событием, т. е. путь от i-го до завершающего события цепи.

Если i имеет несколько последующих путей или событий j, то удобно пользоваться формулой

$$t_П(i) = \min_{i,j} \left[t_П(j) - t(i,j) \right].$$

Резерв времени определяется как

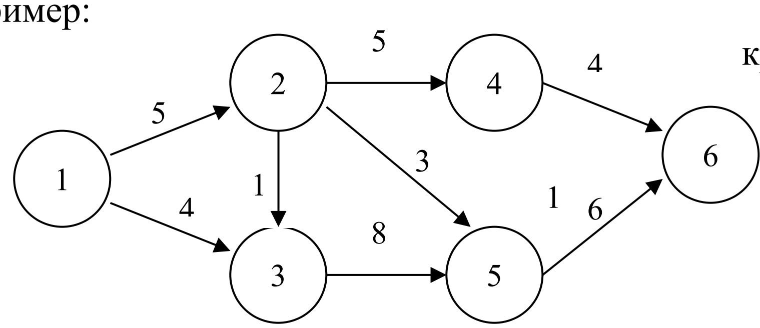
$$R(i) = t_П(i) - t_p(i).$$

Показывает на какой допустимый период времени можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличение срока выполнения комплекса работ.

Замечания. Критические события резервов времени не имеют.

Отсюда **вывод**: определив ранний срок наступления завершающего события сети, мы тем самым определяем длину критического пути, а выявляя событие с нулевыми резервами времени, определяем его топологию.

Пример:



критические события:
1, 2, 3, 5, 6
критический путь:

1→2→3→5→6

$t_{кр} = 5 + 1 + 8 + 6 = 20$

Номера событий	Сроки совершения событий		Резервы врем. собы
	$t_{P(i)}$	$t_{П(i)}$	
1	0	0	0
2	5	5	0
3	6	6	0
4	10	16	6
5	14	14	0
6	20	20	0

№ п/п	Работа (i,j)	Продолжение работы (i,j)	Сроки начала и окончания работ				Резервы времени			
			$t_{рн}$	$t_{ро}$	$t_{Пн}$	$t_{По}$	$R_П$	R_i	R_c	$R_н$
1	(1,2)	5	0	5	0	5	0	0	0	0
2	(1,3)	4	0	4	2	6	2	2	2	2
3	(2,3)	1	5	6	5	6	0	0	0	0
4	(2,4)	5	5	10	11	16	6	6	0	0
5	(2,5)	3	5	8	11	14	6	6	6	6
6	(3,5)	8	6	14	6	14	0	0	0	0
7	(4,6)	4	10	14	16	20	6	0	6	0
8	(5,6)	6	14	20	14	20	0	0	0	0

Параметры работ

Ранний срок начала работы $t_{рн}(i,j)$. Очевидно, что

$$t_{рн}(i,j) = t_p(i).$$

Тогда ранний срок окончания работ $t_{ро}(i,j)$

$$t_{ро}(i,j) = t_p(i) + t(i,j).$$

Поздний срок окончания работ $t_{П}(i,j)$

Очевидно

$$t_{По}(i,j) = t_{Пj}.$$

Значит поздний срок начала работ $t_{ПН}(i,j)$

$$t_{ПН}(i,j) = t_{Пj} - t_{ij}.$$

Резерв времени пути определяется как разность между длиной критического и рассматриваемого пути

$$R(L) = t_{кр} - t(L).$$

Он показывает, на сколько в сумме может быть увеличена продолжительность всех работ, принадлежащих этому пути.

Вывод: любая из работ пути L на его участке, не совпадающем с критическим путем, обладает резервом времени.

Среди резервов времени выделяют 4 разновидности резервов:

а) **полный резерв времени** $R_{\Pi}(i,j)$ **работы** (i,j) – показывает насколько можно увеличить время выполнения данной работы при условии, что срок выполнения комплекса работ не изменяется

$$R_{\Pi}(i,j)=t_{\Pi}(j)-t_{p}(i)-t(i,j)$$

Полный резерв времени равен резерву максимальному из путей, проходящих через данную работу.

Важным свойством $R_{\Pi}(i,j)$ является то, что он принадлежит не только этой работе, но и всем полным путям, проходящим через нее.

б) **частный резерв времени 1-го вида** $R_1(i,j)$ есть часть полного резерва времени, на который можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом позднего срока ее начального события

$$R_1(i,j)=t_{\Pi}(j)-t_{\Pi}(i)-t(i,j)$$

или $R_1(i,j)=R_{\Pi}(i,j)-R(i)$

Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное событие совершаются в свои самые поздние сроки.

в) **частный резерв 2-го вида** $R_c(i,j)$ или **свободный резерв** представляет часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события.

$$R_c(i,j)=t_{p}(j)-t_{p}(i)-t(i,j)$$

или $R_c(i,j)=R_{\Pi}(i,j)-R(j)$

Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное события совершаются в свои самые ранние сроки.

г) **Независимый резерв времени Rн(i,j).**

Это часть полного резерва времени, получаемая для случая, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие работы начинаются в ранние сроки.

$$R_{н}(i,j)=t_{p}(j)-t_{\Pi}(i)-t(i,j)$$

или $R_{н}(i,j)=R_{\Pi}(i,j)-R(i)-R(j).$

Таким образом, если **частичный резерв времени 1-го вида** может быть использован на увеличение продолжительности данной и последующих работ без затрат резерва времени предшествующих работ, **свободный резерв времени** – на увеличение продолжительности данной и предшествующих работ без нарушения резерва времени последующих работ, то **независимый резерв времени** может быть использован для увеличения продолжительности только данной работы.

Работы, лежащие на критическом пути, так же как и критические события, резервов времени не имеют.

Если на критическом пути лежит начальное событие i, то

$$R_{П}(i,j) = R_{1}(i,j).$$

Если на критическом пути лежит конечное событие, то

$$R_{П}(i,j) = R_{c}(i,j).$$

Если на критическом пути лежит начальное и конечное событие i и j, но сама работа не принадлежит этому пути, то

$$R_{П}(i,j) = R_{1}(i,j) = R_{c}(i,j) = R_{н}(i,j).$$

Задачи (для самостоятельной работы):

1. Построить сетевую модель при следующих условиях:

   а) работы А и Б выполняются одновременно;

   б) для начала работ В и Г необходим результат работ А и Б.

2. Построить сетевую модель при следующих условиях:

   а) работы Б,В и Г начинаются одновременно, но после окончания работы А;

   б) работа Е выполняется после окончания Б;

   в) работы Д выполняются после окончания Г;

   г) для начала работы З необходим результат работ Е, В и Д;

   д) для начала работы Ж необходим результат работы Д.

3. Проводится комплекс работ по установке мачты на фундамент. Последовательность работ и их продолжительность приведена в таблице 3.1.

Построить сетевую модель. Найти параметры событий и работ, критический путь и коэффициенты напряженности.

Таблица 3.1

Номер операции	Операция	Длительность операции в днях	Какая операция предшествует данной
A	Заказ фундаментального блока	1	-
B	Изготовление блока	14	A
C	Доставка блока на место	1	B
D	Земляные работы	2	-
E	Устройство опалубки	3	D
F	Бетонирование	1	E
G	Твердение бетона	8	F
H	Установка	2	C,G

	фундаментального блока		
K	Изготовление мачты	10	-
L	Доставка мачты на место	1	K
M	Установка мачты	2	H,L

Тема 4. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В зависимости от условий внешней среды и степени информированности лица существует следующая классификация задач принятия решений:

а) в условиях определенности;

б) в условиях риска;

в) в условиях неопределенности;

г) в условиях конфликтных ситуаций или противодействия (активного противника).

В данном разделе мы остановимся на случае в). В этом случае отсутствуют объективные критерии оценивания достижения целевого и текущего состояний объекта управления, а также статистика, достаточная для построения соответствующих вероятностных распределений (законов распределения исходов операций) для конкретного принятого решения, что не позволяет свести эти задачи к детерминированным или вероятностным.

Условия оценки эффективности систем для неопределенных операций можно представить в виде таблицы:

a_i	h_j				$K(a_i)$
	h_1	h_2	…	h_k	
a_1	k_{11}	k_{12}	…	k_{1k}	
a_2	k_{21}	k_{22}	…	k_{2k}	
…	…	…	…	…	
a_m	k_{m1}	k_{m2}	…	k_{mk}	

Здесь a_i – значение вектора управляемых параметров, определяющих свойства системы; h_j – значение вектора неуправляемых параметров, определяющих состояние обстановки; K_{ij} – значение эффективности значения a_i для состояния обстановки K_j; $K(a_i)$ – эффективность системы a_i.

Единого критерия принятия решения (оценки эффективности) в условиях неопределенности не существуют.

В зависимости от характера предпочтений ЛПР наиболее часто в неопределенных операциях используются критерии:

а) максимакса;

б) критерий Вальда (осторожного наблюдателя);

в) критерий Гурвица (пессимизма-оптимизма);

г) критерий среднего выигрыша;
д) критерий Лапласа;
е) критерий Сэвиджа (минимального риска).

Пример:

Владелец небольшого магазина в начале каждого дня закупает для реализации некий скоропортящийся продукт, по цене 50 руб. за единицу. Цена реализации этого продукта – 60 руб. за единицу. Из наблюдений известно, что спрос на этот продукт за день может быть равен 1,2,3 или 4 ед. Если продукт за день не продан, то в конце дня его всегда покупают по цене 30 руб. за ед. Сколько единиц этого продукта должен закупать владелец каждый день?

Таблица возможных доходов за день:

	Возможные решения: число закупленных для реализации единиц			
	1	2	3	4
1	10	-10	-30	-50
2	10	20	0	-30
3	10	20	30	10
4	10	20	30	40
максимакс	10	20	30	40
максимин	10	-10	-30	-50

Поясним, как заполняется таблица:

В клетке (2,2) для реализации было закуплено 2 единицы, спрос был 2 единицы. Поэтому доход для этой клетки: $60 \cdot 2 - 50 \cdot 2 = 20$

В клетке (3,1) была закуплена для реализации 1 ед., спрос был 3 ед. Поэтому возможный доход для этой клетки: $60 \cdot 1 - 50 \cdot 1 = 10$

В клетке (3,4) было закуплено для реализации 4 ед., спрос был 3 ед. Поэтому возможный доход для этой клетки $60 \cdot 3 - 50 \cdot 4 + 30(4 - 3)$ (реализация в конце дня непроданной единицы) = 10 и т. д.

а) **критерий максимакса**

Критерий максимакса – самый оптимистический критерий. Те, кто предпочитают им пользоваться, всегда надеются на лучшее состояние обстановки, и естественно, в большей степени рискуют.

$$K_{opm} = \max_i(\max_j K_{ij}).$$

В нашем случае

$$K(1) = \max(10; 10; 10; 10) = 10;$$

$$K(2) = \max(-10; 20; 20; 20) = 20;$$

$$K(3) = \max(-30; 0; 30; 30) = 30;$$

$$K(4) = \max(-50; -20; 10; 40) = 40$$

Оптимальное решение – каждый раз надо закупать для реализации 4 единицы.

б) **критерий Вальда**

Это максиминный критерий, он гарантирует определенный выигрыш при наихудших условиях.

$$K_{опт} = \max_i(\min_j K_{ij}).$$

В нашем случае

$$K(1) = \min(10;10;10;10) = 10;$$
$$K(2) = \min(-10;20;20;20) = -10;$$
$$K(3) = \min(-30;0;30;30) = -30;$$
$$K(4) = \min(-50;-20;10;40) = -50.$$

Оптимальное решение – каждый раз надо закупать для реализации 1 единицу продукции. Это подход очень осторожного человека.

в) **критерий Гурвица**

Это критерий обобщенного максимина. Для этого вводится коэффициент оптимизма $\alpha (0 \le \alpha \le 1)$, характеризующий отношение к риску лица, принимающего решение. Оптимальное решение находится как взвешенная с помощью коэффициента α сумма максимальной и минимальной оценок:

$$K(a_i) = \alpha \max_j K_{ij} + (1-\alpha)\min_j K_{ij}.$$

Условие оптимальности записывается в виде

$$K_{opt} = \max_i \left[\alpha \max_j K_{ij} + (1-\alpha)\min_j K_{ij} \right].$$

При $\alpha = 0$ критерий Гурвица сводится к критерию максимина, при $\alpha = 1$ – к критерию максимакса.

Пусть $\alpha = 0,6$ и рассчитаем оптимальное решение для рассматриваемого примера:

$$K(1) = 0,6 \cdot 10 + 0,4 \cdot 10 = 10;$$
$$K(2) = 0,6 \cdot 20 + 0,4 \cdot (-10) = 8;$$
$$K(3) = 0,6 \cdot 30 + 0,4 \cdot (-30) = 6;$$
$$K(4) = 0,6 \cdot 40 + 0,4 \cdot (-50) = 4.$$

Оптимальное решение –1 единица продукции.

г) **критерий среднего выигрыша**

Данный критерий предполагает задание вероятностей состояний обстановки P_i. Эффективность систем оценивается как $M[K_i]$, т. е.

$$K(a_i) = \sum_{j=1}^{n} P_j K_{ij}, (i = 1, ..., m);$$

$$K_{опт} = \max_i \sum_{j=1}^{n} P_j K_{ij}, (i = 1, ..., m).$$

Пусть в нашем случае $P_1 = 0,15, P_2 = 0,3, P_3 = 0,3, P_4 = 0,25$. Тогда получим следующие оценки систем:

$$K(1) = 0,15 \cdot 10 + 0,3 \cdot 10 + 0,3 \cdot 10 + 0,25 \cdot 10 = 10;$$
$$K(2) = 0,15 \cdot (-10) + 0,3 \cdot 20 + 0,3 \cdot 20 + 0,25 \cdot 20 = 15,5;$$
$$K(3) = 0,15 \cdot (-30) + 0,3 \cdot 0 + 0,3 \cdot 30 + 0,25 \cdot 30 = 12;$$
$$K(4) = 0,15 \cdot (-50) + 0,3 \cdot (-20) + 0,3 \cdot 10 + 0,25 \cdot 40 = -0,5.$$

Оптимальное решение –2 единицы.

д) **критерий Лапласа.**

В основе критерия лежит предположение: поскольку о состоянии обстановки ничего не известно, то их можно считать равновероятностными. Исходя из этого:

$$K(a_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij}, (i = 1, ..., m);$$

$$K_{opt} = \max_i \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} \right], (i = 1, ..., m).$$

В нашем случае

$$K(1) = 0,25(10 + 10 + 10 + 10) = 10;$$
$$K(2) = 0,25((-10) + 20 + 20 + 20) = 12,5;$$
$$K(3) = 0,25((-30) + 0 + 30 + 30) = 7,5;$$
$$K(4) = 0,25((-50) + (-20) + 10 + 40) = -5.$$

Оптимальное решение –2 единицы продукции. Нетрудно заметить, что критерий Лапласа представляет собой частный случай критерия среднего выигрыша.

е) **критерий Сэвиджа (минимального риска)**

Этот критерий минимизирует потери при наихудших условиях.

Преобразуем матрицу эффективности в матрицу потерь (риска), в которой элементы определяются соотношением:

$$\Delta K_{ij} = \max_i K_{ij} - K_{ij}.$$

И используем критерий минимакса:

$$K(a_i) = \max_j \Delta K_{ij};$$

$$K_{опт} = \min_i (\max_j \Delta K_{ij}).$$

Обратимся опять к рассматриваемому примеру. В нем матрице эффективности будет соответствовать матрица потерь:

	Возможные решения: число закупленных единиц

Возможные исходы: спрос в день	1	2	3	4
1	0	20	40	60
2	10	0	20	40
3	20	10	0	20
4	30	20	10	0

Тогда

$$K(1) = \max(0; 10; 20; 30) = 30;$$

$$K(2) = \max(20; 0; 10; 20) = 20;$$

$$K(3) = \max(40; 20; 0; 10) = 40;$$

$$K(4) = \max(60; 40; 20; 0) = 60.$$

$K_{опт} = 20$, что соответствует 2 единицам закупаемой продукции.

Задачи (для самостоятельной работы)

1. Владелец небольшого магазина в начале каждого дня закупает для реализации некий скоропортящийся продукт, по цене 30 руб. за ед. Цена реализации этого продукта – 50 руб. за ед. Из наблюдений известно, что спрос на этот продукт за день может быть равен 1,2,3, или 4 единицам. Если продукт за день не продан, то в конце дня его всегда покупают по цене 20 руб. за единицу. Пусть также известно, что на практике спрос 1 ед. продукции наблюдался 5 раз, спрос 2 ед. наблюдался 40 раз, 3 ед. – 40 раз и 4 единиц – 15 раз. Пользуясь критериями максимакса, Вальда, Гурвица, среднего выигрыша, Лапласа и Сэвиджа определить, сколько единиц этого продукта должен закупать владелец каждый день.
2. Некоторая фирма решает построить отель в одном из курортных мест. Необходимо определить количество мест или комнат в этой гостинице. Составлена смета расходов по строительству гостиницы с распределенным количеством комнат, которые будут сняты. В зависимости от принятого решения – количество комнат в гостинице $x_i = 20; 30; 40; 50$, а количество снятых комнат $S_k = 0; 10; 20; 30; 40; 50$, которое зависит от множества случайных факторов и неизвестно фирме. После соответствующих расчетов получена следующая таблица ежегодных прибылей:

S_k / x_i	0	10	20	30	40	50
20	-121	62	245	245	245	245
30	-168	14	198	380	380	380
40	-216	-33	150	332	515	515

50	-264	-81	101	284	468	650

По рассмотренным выше критериям определить наиболее подходящее количество комнат в гостинице.

Тема 5. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА ИЛИ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ СТОРОН

В отличие от рассмотренных выше задач принятия решений, в которых внешняя среда (природа) предполагалась пассивной, конфликтные ситуации предполагают наличие по крайней мере **двух противодействующих сторон, интересы которых противоположны.** Эти задачи составляют проблематику **теории игр.**

Целью теории игр является выработка рекомендаций по рациональному образу действия участников многократного повторяющегося конфликта.

Нашла применение в экономике, в ходе военных действий, анализе надежности и т. п. Характерным примером является довольно распространенная ситуация, когда несколько фирм добиваются права у заказчика на получение выгодного заказа или конфликтуют из-за обладания новыми рынками сбыта.

Игра – это модель конфликтной ситуации. Ведется по определенным правилам, которые определяют возможные варианты действий участников игры, объем информации об этих действиях, а также результат игры.

Игроки – это стороны, участвующие в конфликте.

Выигрыш (проигрыш, платеж) – результат конфликта.

Игры бывают **парные** и **множественные**.

Ходом в теории игр называется выбор одного из предложенных правилами игры действий и его осуществление.

Сами действия называются **стратегиями**. Число стратегий каждого игрока **конечно** или **бесконечно**.

Игры бывают **одноходовые** и **многоходовые**. Ходы могут быть **личные** и **случайные**.

Игры, которые содержат только случайные ходы теорией игр не изучаются.

Игры бывают также с **полной информацией** и **неполной информацией**.

Игра двух лиц с нулевой суммой

Методы теории игр наиболее развиты для конечной одноходовой игры двух лиц с нулевой суммой (т.е. сумма выигрышей игроков равна 0). Такие игры еще называют **антагонистическими**.

Пусть A и B – участники игры. Саму игру опишем с помощью так называемой **платежной матрицы** (матрицы игры) порядка $m \times n$. Строки этой матрицы – это чистые стратегии игрока $A(A_1, A_2, ..., A_m)$, а столбцы – чистые стратегии игрока $B(B_1, B_2, ..., B_n)$.

Предполагается, что каждому игроку известны все элементы платежной матрицы.

Элемент α_{ij} определяет результат игры, а именно выигрыш игрока A при выборе игроками A и B стратегий $A_i(i=\overline{1,m})$ и $B_j(j=\overline{1,n})$ соответственно.

В этом случае достаточно исследовать только платежную матрицу игрока A.

В данной игре игрок A стремится выбрать такую строку матрицы, чтобы **максимизировать свой выигрыш**, а игрок B – такой столбец матрицы, чтобы **минимизировать свой проигрыш**.

Bi Ai	B_1	B_2	B_3	…	B_n
A_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	…	α_{1n}
A_2	α_{21}	α_{12}	α_{13}	…	α_{2n}
…	…	…	…	…	…
A_m	α_{m1}	α_{m2}	α_{m3}	…	α_{mn}

Задачей теории игр является нахождение решения игры, т. е. определение для каждого игрока его **оптимальной стратегии** и **цены игры**.

Оптимальной называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш (или максимально возможный средний проигрыш) независимо от поведения противника.

Ценой игры называется выигрыш (проигрыш), соответствующий оптимальным стратегиям игроков.

В теории игр наилучшим принято считать поведение игроков, при котором каждый игрок предполагает, что его противник не глупее (**принцип разумности)**.

Если игрок А выбрал стратегию i, то его выигрыш составит $\min\limits_{j} \alpha_{ij}$

Отсюда максимальный гарантированный выигрыш

$$\alpha_1 = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Стратегия, соответствующая α_1 называется **максиминной стратегией**, а α_1 – нижней ценой игры или **максимином**.

Игрок В, рассуждая аналогично может среди всех своих стратегий выбрать ту, которая обеспечит ему минимальный гарантированный проигрыш.

$$\alpha_2 = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Стратегия, соответствующая α_2 называется минимаксной стратегией, а величина α_2 – **верхней ценой игры** или **минимаксом**.

Если игрок А будет придерживаться максимаксной стратегии, то он получает выигрыш не меньше максиминного значения, т. е.

$$a_{ij} \geq \max_i \min_j a_{ij}.$$

Если игрок B придерживается минимаксной стратегии, то его проигрыш будет не больше минимального значения, т. е.

$$\alpha_{ij} \le \min_j \max_i \alpha_{ij}.$$

В общем случае отношения между нижней и верхней ценой игры устанавливаются неравенством

$$\alpha_1 \le \alpha_2.$$

Существуют игры, для которых $\alpha_1 = \alpha_2$. Элемент платежной матрицы, отвечающей этим стратегиям называется **седловой точкой**. Ей отвечает **цена игры** α**:**

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$$

Если $\alpha > 0$, то игра выгодна игроку A.

При $\alpha < 0$ игра выгодна игроку B.

Если $\alpha = 0$, то игра выгодна обоим игрокам и называется **безобидной** или **справедливой**.

Игра 2-х лиц без седловой точки. Смешанные стратегии

Одна из возможностей расширения стратегий игроков – разнообразить способ выбора своей стратегии, например, «случайно».

Как мы уже отмечали, в отсутствии седловой точки, игрок A, применяя свою максиминную стратегию, выиграет не менее α_1, а игрок B, применяя свою минимаксную стратегию, проигрывает не более α_2, где $\alpha_1 < \alpha_2$. Применение чистых стратегий в каждой партии такой игры не дает возможность игрокам увеличить выигрыш α_1, за счет уменьшения проигрыша α_2. Для того, чтобы это было возможным необходимо применять не одну, а несколько чистых стратегий, чередуя их случайным образом с какими-то частотами. Такая стратегия получила название **смешанной** (ее элементами являются чистые стратегии).

Смешанная стратегия имеет смысл при условии, что игра состоит из более чем одной партии.

Обозначим смешанные стратегии игроков A и B через

$$S_A(p_1, p_2, ..., p_m) \text{ и } S_B = (q_1, q_2, ..., q_n),$$

где p_i – вероятность (частота) применения игроком A чистой стратегии $A_i (i = \overline{1,m})$, q_i – вероятность (частота) принятия игроком B чистой стратегии $B_j (j = \overline{1,n})$.

Причем $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Чистые стратегии игроков A и B, для которых вероятности p_i и q_i отличны от 0 называются **активными**.

Теорема (основная теорема теории игр) (теорема минимакса).

Любая конечная игра двух лиц с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно решение (т. е. пару оптимальных стратегий, в общем случае смешанных) и соответствующую цену.

$$\alpha = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} p_i^* q_j^* .$$

Решение игры, не имеющей седловой точки может осуществляться различными методами. Рассмотрим наиболее важные из них.

Графическое решение игр вида $(2 \times n)$ и $(m \times 2)$

Этот метод применим только к играм, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии.

Рассмотрим следующую игру (без седловой точки)

$x_1 = p_1;\ x_2 = p_2.$

$y_1 = q_1; y_2 = q_2, \dots y_n = q_n$

Ожидаемые выигрыши игрока А, соответствующие чистым стратегиям игрока В, представлены в таблице:

B A	y_1	y_2	…	y_n
x_1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1m}
$x_2 = 1 - x_1$	α_{21}	α_{22}	…	α_{2m}

Отсюда видно, что ожидаемый выигрыш игрока А линейно зависит от x_1. В соответствии с критерием минимакса игрок А должен выбирать x_1 так:

Чистые стратегии игрока В	Ожидаемые выигрыши игрока А
1	$(\alpha_{11} - \alpha_{21})x_1 + \alpha_{21}$
2	$(\alpha_{12} - \alpha_{22})x_1 + \alpha_{22}$
…	…
N	$(\alpha_{1n} - \alpha_{21})x_1 + \alpha_{2n}$

Пример:

Bj A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	4	8	6
A_2	1	4	6	4
A_3	2	4	8	6
A_4	8	6	2	1

A_1 – доминирующая
одинаковые

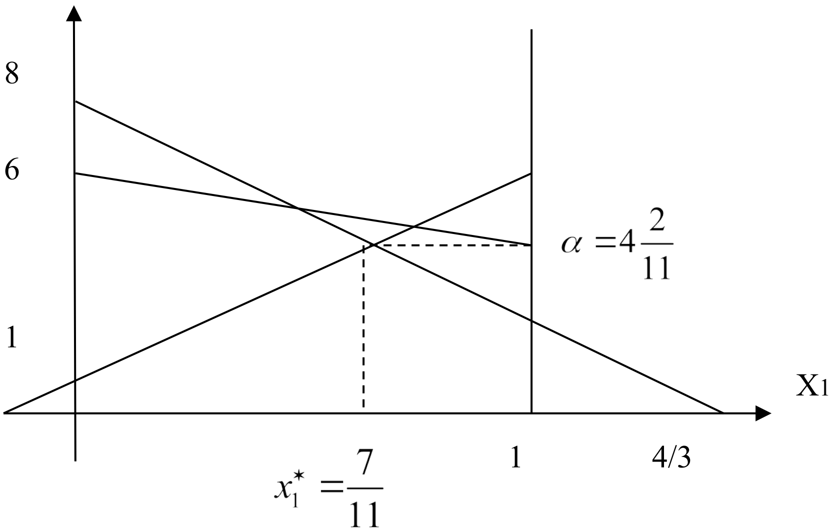
Замечания: Стратегии, для которых есть **доминирующие** и **дублирующие** стратегии можно отбрасывать.

Bj A_i	B_1	B_2	B_3	B_4

A_1	2	4	8	6
A_4	8	6	2	1

B_3 доминирующая

Bj / A_i	B_1	B_2	B_4	
A_1	2	4	6	2
A_4	8	6	1	1
	8	6	6	$\cancel{\frac{2}{6}}$

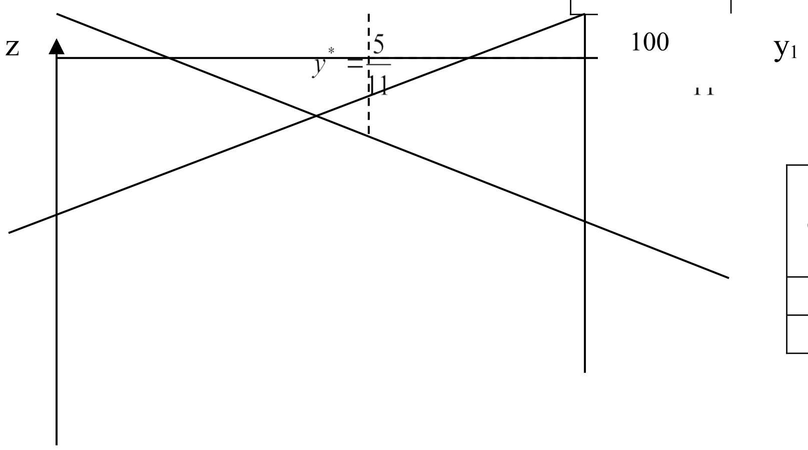


$$-6x_1 + 8 = 5x_1 + 1 \Rightarrow 11x_1 = 7 \Rightarrow x_1^* = \frac{7}{11}$$

$$\alpha = \frac{35}{11} + 1 = \frac{46}{11} = 4\frac{2}{11}$$ – цена игры

$$S_A^* = \left\{\frac{7}{11}; \frac{4}{11}\right\}$$

Чистая стратегия Игрок В	Ожидаемый выигрыш игрока А	
1	$-6x_1 + 8$	z Z_1
2	$-2x_1 + 6$	z Z_2
3	$5x_1 + 1$	z Z_3



Чистая стратегия Игрока А	Ожидаемый выигрыш Игрока В
1	$-4y_1+6$
2	$7y_1+1$

$$-4y_1+6=7y_1+1 \Rightarrow 11y_1=5 \Rightarrow y_1^*=\frac{5}{11};$$

$$\alpha=\frac{35}{11}+1=4\frac{2}{11} \quad S_B^*=\left\{\frac{5}{11};0;\frac{6}{11}\right\}$$

Задачи (для самостоятельной работы):

1. «Семейный спор». Пусть со стороны мужа и жены имеется два взаимоисключающих предложения провести наступающий вечер: муж предлагает остаться дома и смотреть телевизор, жена – пойти в театр. Построить для данной конфликтной ситуации «платежные» матрицы для мужа и жены.

2. «Отгадывание монет». Пусть у каждого игрока имеется по 2 монеты: 1 руб. и 2 руб. если при подбрасывании обоих момент их стороны совпадают, то деньги забирает первый игрок, если нет, второй. Построить платежную матрицу для первого игрока. Есть ли у данной игры седловая точка?

3. Пусть в двух местных предприятиях в цехах ширпотреба предлагают выпустить оригинальную елочную игрушку к Новому году. У предприятия «Заря» от предыдущих сезонов остались штампы для изготовления «птичек», а у продукции «Луч» – для изготовления «рыбок», что ограничивает планы этих предприятий игрушкой соответствующей формы. Каждое предприятие может выпускать игрушки в одном из вариантов: цветном и серебристом, причем себестоимость и продажная цена всех 4-х видов игрушек одинакова. Одновременно же выпуск предприятием игрушки в цветном и серебристом вариантах с самого начала признан экономически не выгодным и поэтому не рассматривается. За пределы города эта продукция не вывозится. В самом же городе, как установили социологи, найдет сбыт одна тысяча штук игрушек всех видов, причем спрос на них распределяется в соответствии с данными.

	УП	УР	СП	СР
УП	Х	40 %	70 %	90 %
УР	60 %	Х	30 %	50 %
СП	30 %	70 %	Х	20 %
СР	10 %	50 %	80 %	Х

Определить оптимальную стратегию предприятий в следующих двух предложениях:

а) будем считать, что руководство «Луча», своевременно узнает какую игрушку решила выпустить «Заря», а когда «Заря» узнает, какую игрушки выпустил «Луч», перестраиваться ей уже будет поздно;

б) информация о выпуске продукции неизвестна, ни той, ни другой стороне.

4. Дана платежная матрица.

B / A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	5	5	2

A_2	4	2	1	5
A_3	5	0	-1	5
A_4	-3	6	6	-1

Определить оптимальную стратегию игроков.

Тема 6. БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

В основе этих моделей лежит **балансовый метод**, т. е. метод взаимного сопоставления имеющихся ресурсов, например, трудовых, и потребностей в них.

Как отмечено выше, балансовые модели строятся в виде числовых матриц. Такую структуру имеют межотраслевой и межрайонный баланс производства и распределения продукции в народном хозяйстве, модели развития отраслей, межотраслевые балансы производства и распределения продукции отдельных регионов, модели промфинпланов предприятий, фирм и т. д. Несмотря на специфику этих моделей, их объединяет не только общий формальный (матричный) принцип построения и единства системы расчетов, но и аналогичность ряда экономических характеристик. Это позволяет рассматривать структуру, содержание и основные зависимости матричных моделей на примере одной из них, а именно, на примере межотраслевого баланса производства и распределения продукции в народном хозяйстве.

Принципиальная схема межотраслевого баланса (МОБ) производства и распределения совокупного общественного продукта в стоимостном выражении приведена в таблице.

Первый квадрант МОБ – это шахматная таблица межотраслевых связей. Представляет собой квадратную матрицу порядка n, сумма всех элементов которой равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере.

Во **втором квадранте** представленная конечная продукция всех отраслей материального производства, направленная на потребление и накопление (характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода).

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли						Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3	…	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…		x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	I	…	x_{3n}	Y_3	X_3
.	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}			x_{nn}	I	…
.								…
.				…				…
n					…			X_n

Амортизация Оплата труда Чистый доход	C_1 V_1	C_2 V_2	C_3 V_3	… III	… …	C_n V_n	IV	
Валовая продукция	X_1	X_2	X_3	…	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X$

Третий квадрант МОБ тоже характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава как сумму чистой продукции и амортизации. Сумма амортизации (C_j) и чистой продукции (V_j+m_j) некоторой отрасли будем называть **чистой продукцией** этой отрасли и обозначить Z_j.

Четвертый квадрант баланса отражает конечное распределение и использование национального дохода. Общий итог этого квадранта, как второго и третьего должен быть равен созданному за год национальному доходу. Рассмотрим два важнейших соотношения, отражающих сущность МОБ и являющихся основой его экономико-математической модели.

Во-первых, рассматривая схему баланса по столбцам можно сделать очевидный вывод, что итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j, \quad j = \overline{1,n} \qquad (6.1)$$

Во-вторых, рассматривая схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, можно видеть, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли.

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \quad i = \overline{1,n} \qquad (6.2)$$

Просуммируем по всем отраслям уравнение (6.1), в результате чего получим

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j.$$

Аналогичное суммирование уравнений (6.2) дает:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Отсюда следует соблюдение соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i. \qquad (6.3)$$

Величины α_{ij} называются **коэффициентами прямых материальных затрат** и рассчитываются следующим образом:

$$\alpha_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i,j = \overline{1,n} \tag{6.4}$$

Определение 1. Коэффициент прямых материальных затрат α_{ij} показывает, какое количество продукции i-ой отрасли необходимо, если учитывать только прямые затраты, для производства единицы продукции j-ой отрасли.

С учетом формулы (6.4) систему баланса (6.2) можно переписать в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j + Y_i, \quad i = \overline{1,n} \tag{6.5}$$

или в матричной форме

$$X = AX + Y. \tag{6.6}$$

Система уравнений (6.5) или в матричной форме (6.6) называется **экономико-математической моделью межотраслевого баланса (моделью Леонтьева).**

С помощью этой модели можно выполнить 3 варианта расчетов:

А) Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли (X_i), можно определить объемы конечной продукции каждой отдельной отрасли (Y_i):

$$Y = (E - A)X \tag{6.7}$$

В) Задав величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i):

$$X = (E - A)^{-1} Y. \tag{6.8}$$

С) Для ряда отраслей задав величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей задав объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых, в этом варианте расчета удобнее пользоваться не матричной формой модели (6.6), а системой линейных уравнений (6.5).

Пусть $(E - A)^{-1} = B$, то $X = BY$ (6.9)

или $X_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} Y_j, \quad i = \overline{1,n}$ (6.10)

Коэффициенты β_{ij} называются **коэффициентами полных материальных затрат** и включают в себя как прямые, так и косвенные затраты всех порядков.

Определение 2. Коэффициенты полных материальных затрат показывают, какое количество продукции i-ой отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-ой отрасли.

Анализ модели МБ приводит к следующим выводам:

а) $A \geq 0$ – по определению;

б) $\alpha_{ij}<1$, т. к. процесс воспроизводства нельзя было бы осуществлять, если бы для собственного воспроизводства в отрасли затрачивалось большее количество продуктов, чем создавалось;

в) $X\geq 0$ – из содержательных систем x_{ij}.

Определение 3. Матрица $A\geq 0$ называется **продуктивной**, если существует такой $X\geq 0$, что $X>AX$ (6.11). Отсюда следует, что для продуктивной матрицы A из (6.6) существует положительный вектор конечной продукции $Y>0$.

Для того, чтобы матрица A была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из перечисленных ниже условий.

1) матрица $(E-A)^{-1}$ неотрицательно обратима, т.е. существует обратная матрица $(E-A)^{-1}\geq 0$.

2) матричный ряд $E+A+A^2+A^3+...+\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится, причем его сумма равна $(E-A)^{-1}$.

3) наибольшее по модулю собственное значение λ матрицы A, т. е. решения характеристического уравнения

$$|\lambda E-A|=0$$

строго меньше единицы

4) все главные миноры матрицы $(E-A)$, порядка от 1 до n положительны.

Замечание. Более простым, но только достаточным признаком продуктивности матрицы является следующий признак $\|A\|<1$, т. е. если величина наибольшего из сумм ее элементов в каждом столбце < 1, то матрица A продуктивна.

Пример 1. Для трехотраслевой эконономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix};Y=\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Найти коэффициенты полных материальных затрат и вектор валовой продукции, заполнить схему межотраслевого материального баланса.

1. Определим матрицу коэффициентов полных материальных затрат с помощью формул обращения невырожденных матриц:

а) находим матрицу (Е-А)

$$(E-A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & 0,5 & 0,0 \\ -0,3 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

б) вычисляем определитель этой матрицы:

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & 0,5 & 0,0 \\ -0,3 & -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,196.$$

в) транспортируем матрицу (Е-А):

$$(E - A)^{`} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,3 \\ -0,1 & 0,5 & -0,1 \\ -0,4 & 0,0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

г) находим алгебраические дополнения для элементов матрицы $(E - A)^{`}$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ 0,0 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,40$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0,1 & -0,1 \\ -0,4 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,12$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0,1 & 0,5 \\ -0,4 & 0,0 \end{vmatrix} = 0,20$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0,2 & -0,3 \\ 0,0 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,16$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,3 \\ -0,4 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,44$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,2 \end{vmatrix} = 0.08$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,33$$

Таким образом, присоединенная к матрице $(E - A)$, матрица имеет вид:

$$(E - \tilde{A}) = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,12 & 0,20 \\ 0,16 & 0,44 & 0,08 \\ 0,17 & 0,10 & 0,33 \end{pmatrix}.$$

д) используя формулу (6.9), находим матрицу коэффициентов полных материальных затрат:

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,041 & 0,612 & 1,020 \\ 0,816 & 2,245 & 0,408 \\ 0,867 & 0,510 & 1,684 \end{pmatrix}.$$

Найдем величины валовой продукции трех отраслей (вектор X), используя формулу (6.8):

$$X = BY = \begin{pmatrix} 2,041 & 0,612 & 1,020 \\ 0,816 & 2,245 & 0,408 \\ 0,867 & 0,510 & 1,684 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 775,3 \\ 510,1 \\ 729,6 \end{pmatrix}.$$

2. Для определения элементов первого квадранта материального межотраслевого баланса воспользуемся формулой, вытекающей из формулы: $x_{ij} = \alpha_{ij} X$. Из этой формулы следует, что для получения первого столбца первого квадранта нужно элементы первого столбца заданной матрицы А умножить на величину $X_1 = 775,3$; элементы второго столбца матрицы А умножить на $X_2 = 510,1$; элементы третьего столбца матрицы А умножить на $X_3 = 729,6$.

Составляющие третьего квадранта (условно чистая продукция) находятся с учетом формулы (6.1) как разность между объемами валовой продукции и суммами элементов соответствующих столбцов найденного первого квадранта.

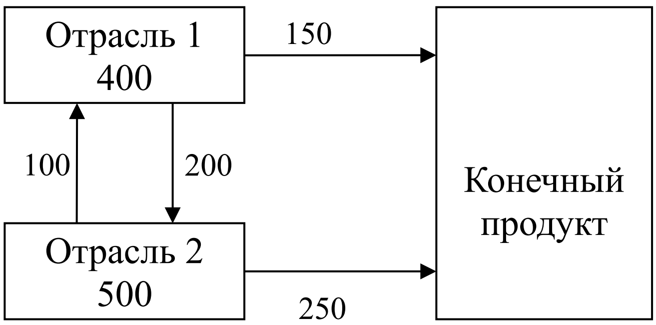
Четвертый квадрант в нашем примере состоит из одного показателя и служит, в частности, для контроля правильности расчета: сумма элементов второго квадранта должна в стоимостном материальном балансе совпадать с суммой элементов третьего квадранта. Результаты расчета представлены в таблице.

Таблица 6.1

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	3		
1	232,6	51,0	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300,0	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9	600,0	
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6		2015,0

Задачи (для самостоятельного решения):

1. Дана структурная схема взаимодействия двух отраслей:



Определить матрицу прямых затрат. Проверить ее продуктивность.

2. Дана матрица прямых затрат A и вектор конечной продукции Y. Проверить продуктивность матрицы A. Найти матрицу полных материальных затрат, валовую продукцию каждой из отраслей. Построить балансовую таблицу.
3.

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анфилатов В.С. Системный анализ в управлении, 2003.
2. Антонов А.В. Системный анализ, М.: Высш. шк., 2004.
3. Губанов В.А. и др. Введение в системный анализ: Изд-во ЛГУ, 1988.
4. Захарченко Н.Н., Минеева Н.В. Основы системного анализа: Часть I. – СПб: Изд-во Санкт–Петербургского университета экономики и финансов, 1992. – 78 с.
5. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев: Вища школа, 1975. – 320 с.

6. «Исследование операций в экономике»: учеб. пособие для вузов по эконом. Специальностям / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, 1999. – 407 с.

7. Перегудов Ф.П., Тарасенко Ф.П. Основы системного анализа. – Томск: Изд-во НТЛ. 1997. – 396 с.

8. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М.: Наука, 1986. – 496 с.

9. Теория систем и системный анализ в управлении организациями. Справочник; под. ред. В.Н. Волковой и А.А. Емельянова. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 846 с.

Редактор М.А. Блус
Компьютерная верстка В.С. Николайчук

ИД № 06039 от 12.10.2001 г.

Сводный темплан 2008 г.
Подписано в печать 25.03.2008 г. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Уч. изд.л. 2,25. Усл.-печ. л. 2,25.
Тираж 150 экз. Заказ 197.

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр. Мира, 11
Типография ОмГТУ