МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВПО «АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МИЭМИС
Кафедра международной экономики, математических методов
и бизнес-информатики

Оскорбин Н.М., Журавлева В.В.

Аналитические методы и модели в экономике и управлении

Конспект лекций.

БАРНАУЛ – 2018

Оскорбин, Н.М. Аналитические методы и модели в экономике и управлении: Учебное пособие / Н.М. Оскорбин, В.В. Журавлева. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2018**.** – 30 с.

Печатается по решению кафедры международной экономики, математических методов и бизнес-информатики.

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор Алгазин Г.И.
д.э.н., профессор Мамченко О.П.

Учебно-методические материалы включают конспект лекций, задания на самостоятельные и лабораторные работы по дисциплине «Аналитические методы и модели в экономике».

Рабочая программа дисциплины:

Раздел 1. Аналитические методы в экономике: основные понятия и определения.

Раздел 2. Моделирование процессов и процедур принятия решений, примеры.

Раздел 3. Математические и инструментальные методы портфельного анализа.

Раздел 4. Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений при стимулировании менеджеров финансовых организаций.

Раздел 5. Аналитические исследования проблем корпоративного управления с использованием методов блочного программирования.

Темы учебных занятий.

1. Основные понятия курса «Аналитические методы и модели экономики» (АМиМЭ).
2. Математическое моделирование процессов и процедур принятия решений.
3. Примеры математических моделей поддержки принятия решений.
4. Аналитические методы прогнозирования временных рядов.
5. Организация и обработка данных экспертного опроса.
6. Методы исполнения решений на различных этапах цикла принятия решений на примере задачи распределения ресурсов.
7. Поддержка решений при оптимизации портфельных инвестиций в условиях стабильной экономики.
8. Поддержка решений при оптимизации портфельных инвестиций в условиях не стабильной экономики.
9. Математические и инструментальные методы оптимизации бонуса менеджеров.
10. Аналитические методы при планировании корпораций. Блочное линейное программирование.

Лабораторные работы *(индивидуальное задание)****:***

1. Портфельный анализ в условиях стабильной экономики.
2. Портфельный анализ в условиях нестабильной экономики.
3. Моделирование активности персонала фирмы.
4. Оптимизация бонуса менеджеров финансовой организации.

Раздел 1. Аналитические методы в экономике: основные понятия и определения.

Понятие аналитических методов в экономике и социологии. Основная технологическая схема аналитического исследования с использованием математических и компьютерных моделей. Организация и обработк ого опроса

Тема 1.1. Понятие аналитических методов в экономике и социологии

Ключевые слова: *система, системный подход, системный анализ, управляемая система.*

Аналитический метод - это общий термин, означающий совокупность частных методов изучения экономики, включая анализ и синтез, абстрагирование, допущение "при прочих равных условиях", индукцию и дедукцию, единство логического и исторического, математические и статистические методы[1].

Что такое аналитические исследования?

Аналитические исследования в основном используются для выяснения причин, лежащих в основе изучаемого явления. В ситуациях, когда необходимо понять, как происходящие изменения условий рекламирования влияют на формирование отношения, мнения и поведения или на позиционирование товара на рынке, помогут экспериментальные исследования, являющиеся самостоятельной разновидностью аналитического исследования. В процессе их проведения исследователь изменяет или преобразует что-либо в окружении потребителя или товара с целью узнать, что произойдет.

Аналитическое исследование – это «самый углубленный вид социологического анализа, ставящего своей целью не только описание структурных элементов изучаемого явления, но и выяснение причин, которые лежат в его основе и обуславливают характер, распространенность, остроту и другие свойственные ему черты». Этот вид исследований очень часто используется на практике. Если в ходе описательного исследования устанавливается связь между характеристиками изучаемого явления, то в ходе **аналитического исследования определяется, имеет ли обнаруженная связь причинный характер.**

Особенности аналитических методов исследования познаются в их отличии от феноменологического и экспериментального методов [2].

Аналитический метод существенно использует математические и инструментальные методы в экономике — научное направление в экономике, посвящённое исследованию экономических систем и процессов с помощью математических моделей, имитационных (компьютерных) моделей и информационных технологий. Математические методы включают в себя: математическую экономику; эконометрику; исследование операций.

---

[1] Глоссарий экономика: http://www.ido.rudn.ru/ffec/econ/gloss.html; См. также: http://dic.academic.ru/dic.nsf/dic_fwords/4063/АНАЛИТИЧЕСКИЙ.

[2] Источник: http://refleader.ru/jgeujgrnayfs.html; Феноменология это: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D4%E5%ED%EE%EC%E5%ED%EE%EB%EE%E3%E8%FF; **Экспериментальный метод это** способ познавания, основанный на опыте: http://fb.ru/article/2990/metodyi-nauchnogo-poznaniya

Математические методы являются важнейшим инструментом анализа экономических явлений и процессов, построения теоретических моделей, позволяющих отобразить существующие связи в экономической жизни, прогнозировать поведение экономических субъектов и экономическую динамику. Математическое моделирование становится языком современной экономической теории, одинаково понятным для учёных всех стран мира.

Новым направлением в современной экономической науке является реализация так называемого экономического эксперимента, суть которого заключается в математическом моделировании экономических ситуаций с учётом психологического фактора (ожиданий участников рынка).

Значительный вклад в развитие математических методов внесли коллективы Центрального экономико-математического института Академии наук СССР, ныне Российской Академии наук (сокращенно ЦЭМИ РАН) создан в 1963 г. по инициативе академика В. С. Немчинова на базе организованной им в 1958 г. Лаборатории экономико-математических методов. В качестве главной цели при создании института было провозглашено внедрение математических методов и ЭВМ в практику управления и планирования, создание теории оптимального управления народным хозяйством. В настоящее время цель трансформировалась в развитие фундаментальной теории и методов моделирования экономики переходного периода, разработку экономико-математического инструментария и программно-алгоритмических средств анализа экономики.

Задание на самостоятельную работу. Подготовить реферат по проблемам и практике использования аналитических методов в выбранном магистрантом направлении специализации.

Тема 1.2. Основная технологическая схема аналитического исследования с использованием математических и компьютерных моделей

Методы математического моделирования традиционно применяются не только для исследования систем различной природы, но и для обоснования экономических, технических, управленческих решений в прикладных областях.

Схематически процесс аналитического исследования представлен на рисунке 1.1, где выделены главные составляющие: проблемная область; математическая (компьютерная модель) модель; результаты моделирования, в том числе теоретические (новые знания) и прикладные, направленные на решение рассматриваемой экономической проблемы.

Методы математического моделирования не являются универсальными и представляют особые требования к исследуемой проблемной ситуации. Наиболее существенными из них является *нетривиальность решаемой проблемы* и ее *начальная структурированность*.

Простые проблемы с незначительными ущербами лучше решать интуитивно на основе «здравого смысла».

Требование структурированности проблемы является более сложным, связанным со специальной обработкой проблемной области, выявлением главных факторов и существенных связей.

Характерным примером гениальной структурированности является формулировка закона всемирного тяготения, в математическом отражении которого используется две материальные точки массой m_1 и m_2 находящиеся на расстоянии r .

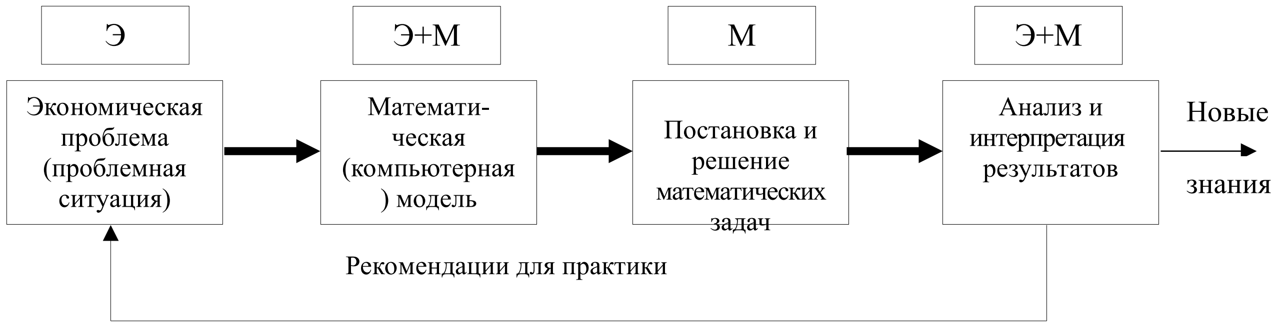


Рис. 1.1. Процесс решения проблемы аналитическим методом с использованием математической (компьютерной) модели: Э – этапы аналитического исследования, функционально выполняемые экономистами; М – этапы аналитического исследования, функционально выполняемые математиками; Э+М – этапы, выполняемые экономистами и математиками совместно.

Модель записана предельно просто. Сила сближения тел определена так: $F = \gamma m_1 \cdot m_2 / r^2$.

В работе[3] приведены примеры из произведений А.С. Пушкина проблемных ситуаций, которые в описании идеально подготовлены для их математического моделирования.

Другим аспектом рассматриваемой технологии является абстрактность получаемых результатов. На примере закона всемирного тяготения видно, что в чистом виде реально моделируемой системы не существует, однако теоретическое и прикладное значение этого закона трудно переоценить. По этому поводу можно привести слова А.С. Пушкина: «Сказка ложь, но в ней намек! Добрым молодцам урок». В нашем контексте сказка это – непосредственный результат, который следует из математической модели. На практике аналитику следует наполнить его предметным содержанием и творчески применить для решения рассматриваемой проблемы. Модель и результаты ее исследования выполняют функции **знаковой системы.** Исследователь, используя ассоциативные знания, формирует целостный образ требуемой реальной системы[4].

[3] Оскорбин Н.М. Математическое моделирование социальных и экономических систем по произведениям А.С. Пушкина // Ломоносовские чтения на Алтае – 2012: сборник научных статей международной молодежной школы-семинара, Барнаул, 20-23 ноября. – Барнаул : АлтГПА, 2012. – Ч. II. – С. 280–286.

Тема 1.3. Организация и обработка данных экспертного опроса

Метод экспертных оценок является одним из эффективных инструментов аналитических исследований и характеризуется применением количественных оценок при обработке экспертной информации[5]. Он включает в себя три составляющие[6]:

1. Интуитивно-логический анализ задачи. Строится на логическом мышлении и интуиции экспертов, технологии основаны на их знании и опыте. Этим объясняется высокий уровень требований, предъявляемых к экспертам.

2. Решение и выдача экспертных оценок. Эта процедура представляет собой завершающую часть работы эксперта. Им формируется решение по рассматриваемой проблеме и дается оценка ожидаемых результатов.

3. Обработка результатов решения. Полученные от экспертов оценки должны быть обработаны с целью получения итоговой оценки проблемы. В зависимости от поставленной задачи изменяется количество выполняемых на этом этапе расчетных и логических процедур. Для обеспечения оперативности и минимизации ошибок на данном этапе целесообразно использование вычислительной техники.

Ниже рассмотрим одну из задач, решаемых с использованием экспертного метода аналитических исследований – з**адачу ранжирования альтернатив.**

Используемые количественные методы существенно зависят от выбранной шкалы измерения признакового пространства рассматриваемой проблемы и поставленной задачи обработки данных. При выборе одной из нескольких альтернатив рекомендуется использовать **порядковую шкалу** и поставить перед экспертами задачу **ранжирования** списка альтернатив (объектов). Рассмотрим эти понятия.

Порядковая шкала. Цель состоит в упорядочении объектов (явлений), а точнее, в выявлении с помощью экспертов скрытой упорядоченности, которая, по предположению, присуща множеству объектов. Результатом оценки является решение о том, что какой-либо объект (явление) предпочтительнее другого в отношении какого-то критерия.

Ранжирование – это расположение объектов в порядке возрастания или убывания какого-либо присущего им свойства[7]. Ранжирование позволяет выбрать из исследуемой совокупности факторов наиболее существенный. Результатом проведения ранжирования является **ранжировка**. Если имеется n объектов, то в результате их ранжирования i-ым экспертом каждый объект получает оценку x_i^L – ранг, приписываемый L-му объекту i-ым

---

[4] Наглядным примером «знака» является слово «вулкан», который вызывает соответствующие реальности ассоциации различных образов.

[5] Фундаментальные исследования метода выполнены в работе: Кендэл М. Ранговые корреляции. – М.: Статистика, 1975. – 216 с. См. также: Карданская Н. Принятие управленческого решения. М.: ЮНИТИ, 1999. 407 с.

[6] См. интернет-ресурсы: http://emm.ostu.ru/lect/lect7.html.

[7] См. интернет-ресурсы: http://emm.ostu.ru/lect/lect7.html.

экспертом. Значения x_i^L находятся в интервале от 1 до n. **Ранг самого важного фактора равен единице**, наименее значимого – числу n. Ранжировкой i-го эксперта называется последовательность рангов $x_i^L, i = 1,...,m; L = 1,...,n$, где m- число привлеченных экспертов.

Рассмотрим **технологию ранжирования.** Применительно к ранжированию рассмотрим методику обработки экспертной информации. Она включает три этапа:

1. Сбор экспертной информации.
2. Оценка компетенции экспертов и определение их веса.
3. Ранжирование альтернатив.
4. Проверка согласованности мнений экспертов.

На первом этапе формируется таблица $x_i^L, i = 1,...,m; L = 1,...,n$. На втором этапе вычисляются коэффициенты компетенции экспертов $k_i, i = 1,...,m$, значение которых неотрицательно и в сумме равно единице. Информацией для их вычисления могут служить суждения экспертов о степени компетенции друг друга. Для ранжирования альтернатив используются **средневзвешенные оценки.**

Проверку согласованности мнений экспертов рекомендуется в литературе проводить с использованием **коэффициента конкордации по Кэнделу** и сравнением его значения с табличным для выбранного уровня значимости. В работе, приведенной в сноске 5 на с. 203-204, приведены табличные данные для указанного сравнения при 0,05 (5%) и 0,01 (1%) уровней значимости. Последняя операция необходима для решения вопроса о принятии для практики решения, выбранного экспертами или о продолжении процедуры экспертного анализа, в том числе и от отказа в использовании данного метода.

Приведем результаты сравнения 5 альтернатив 8 экспертами в нашем случае. Рассматривалась оценки рангов 5 сценарных оценок ВВП России на текущий год:

1. -1% и менее.
2. (-1% – 0%].
3. (0% – 1%].
4. (1% – 2%).
5. 2% и более.

Задание 1.1. Сформировать экспертную группу, организовать сбор данных и провести обработку экспертной информации с использованием MS Excel (программа в файле «ЭКСПЕРТНЫЙ-опрос-ПРИМЕР.xls прилагаемого программного обеспечения дисциплины).

Раздел 2. Моделирование процессов и процедур принятия решений, примеры.

Моделирование процессов и оптимальных решений. Многокритериальные модели принятия решений. Производственные функции. Задача оптимального среднесрочного планирования. Типовые задачи, решаемые с использованием инструмента Excel «Поиск решения».

Тема 2.1. Моделирование процессов и оптимальных решений. Многокритериальные модели принятия решений

2.1.1. Основные определения

В теории экономико-математического моделирования выделяют 2 основных класса математических моделей (модели процессов и модели решений), используемых в трех типах исследовательских задач:

- оценка параметров экономических процессов и систем;
- прогнозирование временных рядов и событий;
- обоснование оптимальных решений.

Эти задачи можно выразить формулой активных (целенаправленных) действий: «знать», «предвидеть», «управлять». Отмеченная классификация математических моделей представлена на рисунке 2.1.1.

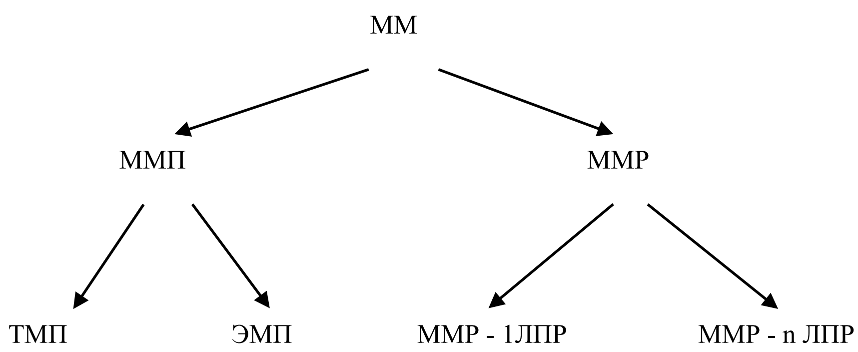


Рис. 2.1.1. Классификация математических (компьютерных) моделей.
Обозначения: ММ – математическая модель; ММП – математические модели процессов; ММР – математические модели ре

Полезно пользоваться определением математических (компьютерных) моделей. *ММ это отражение в математических символах или в компьютерных операторах существенных сторон исследуемого явления или процесса.*

Существует строгое различие математических и компьютерных моделей. Свойства математических моделей и получаемые с их использованием результатов исследуются строгим математическим аппаратом (методами). Компьютерные модели исследуются на ЭВМ.

2.1.2. Моделирование процессов

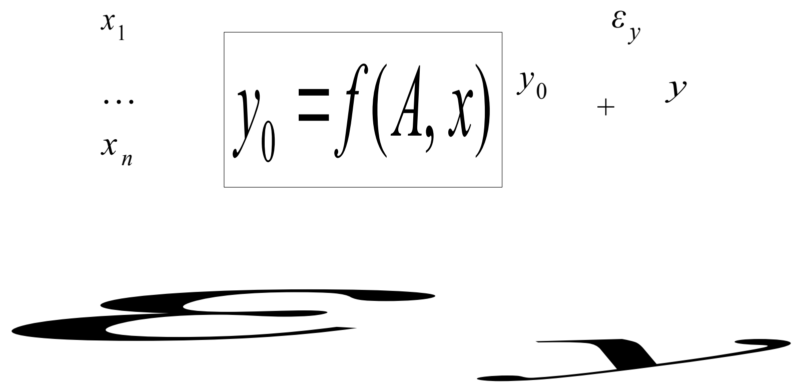
Структурно модели процессов представляют в виде «черного ящика» (рисунок 2.1).

Задача математического моделирования процессов при условии достаточно точных наблюдений за входными переменными и выходной переменной формулируется следующим образом:

Найти функцию $y_0 = f(A, x)$ *и доверительный интервал* $[\varepsilon_H, \varepsilon_V]$ *для значений* ε_y. (2.1)

Тогда на практике можно знать ожидаемые значения выходной переменной при известных значениях вектора x: $y_0 + \varepsilon_H \leq y \leq y_0 + \varepsilon_V$.

Математическая модель (2.1) называется ***эмпирической*** (ЭМП), если основная информация для ее построения – результаты наблюдений моделируемого процесса или наблюдений за процессами – аналогами моделируемого, и ***теоретической*** (ТМП), если существенно используются знания соответствующей теории.



2.1.3. Моделирование решений

В данном месте следует пояснить объект моделирования, учитывая, что модель – отражение реальности. Конечным результатом модельных расчетов, является вариант решения, который предлагает аналитик. Но аналитик не несет ответственности за последствия принимаемого решения (кроме особых процедур страхования профессиональной ответственности). Кроме того, заказчик может дать задание аналитику предсказать решение конкурента в конкретной экономической ситуации.

В теории экономико-математического моделирования принято считать объектом моделирования ***лицо, принимающее решение*** (ЛПР). ЛПР – обобщенное и абстрактное понятие, в которое включено совокупность свойств реальных центров принятия решений, условий (экономических, финансовых, информационных, временных) в которых это решение формируется, границы зон ответственности решений, возможности (или невозможности) их корректирования и т.д. Реально решения могут приниматься с разной степенью рациональности в стандартных или в уникальных ситуациях.

В экономической литературе наиболее простым и часто используемым образом ЛПР выступает *экономический человек*[8]. Этим свойством наделяют субъектов экономической деятельности: не только отдельных людей, но и руководство предприятий, корпораций, органов государственного, местного самоуправления и стран в целом.

[8] Экономический человек – *условное общее понятие, представление о человеке как о рационально мыслящем субъекте, строящем свои планы и действия, исходя из принципа получения максимальной выгоды* (Современный экономический словарь, 1997, с. 397).

В простом случае считается, что ЛПР знает список возможных решений (математически множество X), полезность каждого решения (математически функция $z=f(x),\ x\in X$) и выбирает оптимальное решение $x^{¿}\in X$, которое имеет максимальную полезность.

Математически модель решений (1 ЛПР) записывается так: найти $x^{¿}\in X$ из условий[9]:

$$z^{¿}=f\left(x^{¿}\right)=\max_{x\in X} f\left(x\right). \qquad (2.2)$$

В этом выражении $z^{¿}$ или $f\left(x^{¿}\right)$ – значение оптимальной (максимальной) полезности.

В настоящее время разработаны варианты математических моделей решений (1 ЛПР) в условиях ограниченной информированности (ЛПР не знает полного списка решений, ЛПР неточно оценивает полезности решений, информированность аналитика не совпадает с информированностью ЛПР). Основные подходы к построению таких моделей связаны с использованием теории вероятности (модели решений в условиях риска) и интервального (теоретико множественного) анализа (модели решений в условиях неопределенности).

2.1.4. Моделирование решений. Теория игр

На рисунке 2.2.1 выделены математические модели решений с n ЛПР ($n\geq 2$), которые используются для исследования экономических систем с многими центрами принятия решений. На практике трудно разделить системы с одним и многими центрами принятия решений. Но характерными примерами систем с n ЛПР выступают системы: «работник-работодатель», «контрольный орган-исполнитель», «товарный или финансовый рынки в условиях конкуренции», «корпоративное управление»[10].

Задачей аналитика при исследовании этих систем выступает построение математической (компьютерной) модели, с использованием которой можно предсказать решения всех ЛПР. Классической работой в данной области является книга Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, которая написана в США в 1944 г. На русском языке книга стала известной с 1970 г.[11]

Основные принципы математического моделирования экономических процессов и систем сохраняются и в рассматриваемой области. Дополнительными задачами выступают обоснование знаний всех ЛПР объекта моделирования о своих списках решений, целевых функциях, порядках ходов, об уровнях взаимной информированности и принятых правилах совестного выбора и реализации решений. Трудности математического моделирования связаны с наличием неполной информации об условиях выбора решений и о решениях, принимаемых другими ЛПР[12].

2.1.5. Моделирование решений. Многокритериальные модели принятия решений

---

[9] В литературе задача (2.2) носит название задачи математического программирования.

[10] Основными участниками корпоративного управления выступают Собственники и Исполнительная дирекция. Собственники для защиты своих интересов на собраниях акционеров создают Совет внешних директоров, который при эффективном механизме корпоративного управления самостоятельным ЛПР не является. При этом всеми ресурсами корпорации (за исключением бюджета Совета внешних директоров и установленных границ компетенции) распоряжается Исполнительная дирекция.

[11] Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 708 с.

[12] В теории игр ЛПР называют игроками, целевые функции – функции выигрышей, варианты решений – стратегиями, полный набор решений – ситуацией игры. Выигрыш каждого игрока зависит от сложившейся ситуации.

Рассматриваем модели решений с одним ЛПР, которое оценивает полезность решений вектором показателей. Например эффект инвестиций определяется их доходностью и уровнем риска. При выборе варианта решения необходимо найти компромисс между этими критериями. В общем случае на множестве решений $x \in X$ могут быть заданы n ($n \geq 2$) целевых показателей, часть которых требуется минимизировать, а часть – максимизировать. Без потери общности можно считать, что все критерии следует максимизировать[13]. В теории экономико-математического моделирования используют 2 подхода:

1. Свертка критериев, т.е. сведение многокритериальной задачи к однокритериальной задаче обоснования решений. Используют линейную и специальные нелинейные функции свертки частных критериев.

2. Выбор одного критерия в качестве ведущего и введение ограничения на уровни снижения значений по всем другим критериям.

Пример 2.1. Пусть задана задача принятия решений с n ($n \geq 2$) критериями $z_1 = f_1(x),\ z_2 = f_2(x), \ldots,\ z_n = f_n(x),\ x \in X$. Введем интегральный критерий $z = F(x),\ x \in X$:

$z = F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$, где $\alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$ – «веса» частных критериев. Тогда многокритериальная модель решения сводится к модели (2.2) с целевой функцией $F(x)$.

Задание 2.1. Ниже в разделе 3 приведена модель Марковица для поиска оптимального инвестиционного портфеля. Показать, что данная модель является двухкритериальной, а для поиска решения выбран подход 2, т.е. выбран ведущий критерий (какой?), а второй критерий (какой?) ограничен по значению.

Тема 2.2. Производственные функции

Производственная функция (также функция производства) — экономико-математическая количественная зависимость между величинами выпуска (количество продукции) и факторами производства, такими как затраты ресурсов, уровень технологий[14].

Производственная функция является примером *моделей процессов* (часто это теоретическая модель процесса производства товаров и/или услуг). Рассматривается годовое количество произведенной фирмой продукции в стоимостной или натуральной форме. Факторами производства выступают объемы потребленных фирмой ресурсов (в стоимостном или в натуральном измерении). Главными ресурсами выступают потребленные за год количества труда и капитала[15].

Определение. Функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$ называется производственной, если выполнены следующие ее свойства:

1. Нулевой выпуск в отсутствии одного или нескольких ресурсов.

2. Неотрицательная производительность факторов $f'_{xi} \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$.

---

[13] Минимизируемые показатели следует рассматривать с отрицательным знаком.

[14] См. https://ru.wikipedia.org/wiki/Производственная_функция.

[15] В рамках 5 факторной модели фирмы ресурсами являются труд, капитал, земля, информация, предпринимательский потенциал.

3. Убывающая эффективность факторов $f''_{xi} \le 0,\ i = 1, \dots, n$.

4. Линейная однородность или постоянная отдача от масштаба $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

Примеры производственных функций:

1. Классическая производственная функция Кобба-Дугласа (K – амортизация капитала фирмы, L – фонд заработной платы за рассматриваемый период времени):

$$y = d \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}, \tag{2.4}$$

где d, α – параметры функции, индивидуальные для фирмы ($d > 0,\ \alpha \in [0,\ 1]$).

2. Обобщенная функция Кобба-Дугласа:

$$y = d \cdot x_1^{\alpha 1} \cdot x_2^{\alpha 2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha n},\quad x_i \ge 0,\ \alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ i = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

3. Линейная производственная функция:

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i,\quad x_i \ge 0,\ a_i > 0,\ i = 1, \dots, n. \tag{2.6}$$

4. Производственная функция с нулевой эластичностью замещения ресурсов:

$$y = \min\left(\frac{x_1}{q_1}; \frac{x_2}{q_2}; \ldots; \frac{x_n}{q_n}\right),\quad x_i \ge 0,\ q_i > 0,\ i = 1, \dots, n. \tag{2.7}$$

Задание 2.2. В записанных функциях укажите аргументы и параметры, поясните их экономический смысл и размерности.

Задание 2.3. Покажите, что функции (2.4) – (2.7) удовлетворяют определению производственных функций.

Тема 2.3. Задача оптимального среднесрочного плана развития производства

С использованием производственной функции рассмотрим задачу выбора оптимального соотношения запасов ресурсов. Эту задачу можно интерпретировать как задачу среднесрочного планирования развития фирмы.

Пусть для некоторой фирмы известна производственная функция, ее товарная и ресурсная и технологическая политика стабильна, а спрос на продукцию неограничен. Пусть также в среднесрочной перспективе заданы интервалы $x_i^H,\ x_i^V,\ i = 1, \dots, n$ возможного изменения каждого из существенных производственных ресурсов: $x_i^H \le x_i \le x_i^V,\ i = 1, \dots, n$. Тогда можно найти оптимальные значения ресурсного обеспечения производства решение следующей задачи. Найти $x_i^{¿},\ i = 1, \dots, n$ из условий:

$$P(x^{¿}) = \max_x \left(y - 0.06\,y - \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot x_i\right); \tag{2.8}$$

$$y = f(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n),\ x_i^H \le x_i \le x_i^V,\ i = 1, \dots, n. \tag{2.9}$$

В задаче (2.8) – (2.9) $P(x^{¿})$ – оптимальная годовая прибыль производственной деятельности фирмы с учетом налога, равного 6% от выручки; C_i – цена ресурса i (для ресурсов производства, учитываемых в стоимостном измерении, их цена принимается равной единице).

Можно показать (с учетом свойств производственной функции), что задача (2.8) – (2.9) относится к классу задач выпуклого программирования и ее решение можно получить в среде Excel.

Тема 2.4. Методы исполнения решений на различных этапах цикла принятия решений на примере задачи распределения ресурсов

На практике Центры принятия и реализации решений не являются идеально организованными и хорошо информированными. Тогда ожидаемые результаты не совпадают с реальными, особенно в ситуациях при больших по времени периодов реализации решений. Возникает необходимость совершенствования методических, математических и инструментальных методов принятия и реализации решений.

Выделим следующие этапы цикла принятия и реализации решений:

1. Сбор исходных данных и анализ экономической проблемы.

2. Обоснование оптимального решения и его принятие.

3. Реализация решения.

4. Оценка полученного результата и при необходимости внесение изменений в регламентные процедуры.

Характерным примером для данной темы является проблема распределения ограниченного ресурса. Она возникает в бюджетной сфере государственного и муниципального управления, производственных системах (корпорациях), при организации коллективных действий в социологии и политике и др.

Пусть Центр располагает ограниченным ресурсом в объеме $R>0$ и ставит задачу его распределения по n исполнителям так, чтобы суммарная эффективность использования ресурса была максимальной. Обозначим $x_i \geq 0$ объем ресурса, выделяемого исполнителю i $(i=1,\ldots,n)$. Будем считать, что вклад $Э_i$ исполнителя i в суммарную эффективность зависит от объема выделенного ресурса и определяется выражением: $Э_i(x_i)=d_i \cdot \sqrt{x_i},\ \ d_i>0$, где d_i – коэффициент, истинное значение которого Центр оценивает с погрешностью.

В предположении, что Центр идеально информирован, найдем оптимальное распределение $x^¿=(x_1^¿,\ x_2^¿,\ldots,x_n^¿)$ решением следующей задачи:

$$Э(x^¿)=\max_{x\geq 0}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \sqrt{x_i}\right); \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq R. \tag{2.11}$$

Задание 2.4. Доказать, что в рассматриваемой формализации задачи при оптимальном решении Центр распределяет весь объем наличного ресурса и балансное ограничение (2.11) выполняется как равенство: $R-\sum_{i=1}^{n} x_i=0$

Решение задачи (2.10) – (2.11) найдем с использованием метода множителей Лагранжа (см. ссылку: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_множителей_Лагранжа). Ограничение $x\geq 0$ пока не рассматриваем. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x,\ \lambda)=\sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \sqrt{x_i}+\lambda \cdot \left(R-\sum_{i=1}^{n} x_i\right). \tag{2.12}$$

Составим систему из *(n+1)* уравнений, приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа по $x_i,\ i=1,\dots,n$ и по λ: $L'_{xi}=d_i \cdot ¿(2\cdot\sqrt{x_i})-\lambda=0,\ i=1,\dots,n;\ \ L'_\lambda=\left(R-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)=0$.

Найдем решение первых *n* уравнений записанной системы в зависимости от λ:

$$d_i/\left(2\cdot\sqrt{x_i}\right)-\lambda=0 \Rightarrow \sqrt{x_i}=d_i/(2\cdot\lambda) \Rightarrow x_i=d_i^2/(4\cdot\lambda^2). \qquad (2.13)$$

Рассматриваем последнее уравнение системы с учетом выражения (2.13):

$$L'_\lambda=\left(R-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)=0 \Rightarrow R-\sum_{i=1}^{n} d_i^2/(4\cdot\lambda^2)=0 \Rightarrow \frac{1}{4\cdot\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2=R \Rightarrow \frac{1}{4\cdot\lambda^2}=\frac{R}{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}. \qquad (2.14)$$

Из выражений (2.13) и (2.14) имеем:

$$x_i^{¿}=\frac{d_i^2\cdot R}{\sum_{i=1}^{n} d_i^2},\quad i=1,\dots,n. \qquad (2.15)$$

В рассматриваемом случае найденное решение системы *(n+1)* уравнений удовлетворяет ограничению $x\geq 0$ и является оптимальным распределением ресурсов в задаче (2.10) – (2.11), поскольку она относится к классу задач выпуклого программирования.

Рассмотрим порядок использования полученных расчетов на практике контроля процессов принятия и реализации решений, которое можно провести только после завершения цикла (после полной или частичной реализации решения). Для этого предлагается использовать расчетные и фактические значения эффективностей распределения и использования ресурсов. Профессиональное расследование эффективностей проводится с использованием методов экономической безопасности.

Оптимальное распределение ресурса согласно (2.15) зависит от коэффициента d_i: $x_i^{¿}=\tilde{x}_i^{¿}(d_i),\ i=1,\dots,n$. Если при распределении ресурсов (не важна причина) использовались оценки $\hat{d}_i$, то фактические эффективности $Э_i^{Ф}=Э_i^{Ф}\left(\tilde{x}_i^{¿}(\hat{d}_i)\right)=\hat{d}_i\cdot\sqrt{\tilde{x}_i^{¿}(\hat{d}_i)}$ отличаются от истинных значений $Э_i^{¿}$ (которые аналитику следует восстановить). Согласно этапу п.4 цикла принятия и реализации решений необходимо внести изменения в регламенты. Но тогда необходимо выяснить причины отклонений: либо искажение информации, либо ошибки формализации проблемной ситуации, либо погрешности вычислений, либо объективное изменение условий принятия и реализации решений.

Тема 2.5. Типовые задачи, решаемые с использованием инструмента Excel «Поиск решения»

Поиск решений – надстройка (инструмент) Excel, которая помогает найти решение с помощью изменения значений целевых ячеек. Целью может быть минимизация, максимизация или достижение некоторого целевого значения. Проблема решается путем регулировки входных критериев или ограничений, определенных пользователем[16].

[16] См. ссылку: http://exceltip.ru/поиск-решений-в-excel-примеры-использован/

В рассматриваемом курсе этот инструмент используется при оптимизации инвестиционного портфеля, при прогнозировании доходности вложения денежных средств в условиях нестабильной экономики (раздел 3) и при исследовании задач блочного программирования (раздел 5).

Задание 2.5. Рассмотреть порядок актуализации и примеры использования инструмента «Поиск решения» самостоятельно по указанной выше ссылке и с использованием программных средств лабораторных работ портфельного анализа.

Раздел 3. Математические и инструментальные методы портфельного анализа

Портфельный анализ. Модель Марковица. Формирование таблицы вариантов инвестиционных портфелей. Поддержка решений при оптимизации портфельных инвестиций в условиях стабильной и нестабильной экономики.

Тема 3.1. Портфельный анализ. Модель Марковица

Портфельная теория Марковица (англ. mean-variance analysis) — подход, основанный на анализе ожидаемых средних значений и вариаций случайных величин) — разработанная Гарри Марковицем методика формирования инвестиционного портфеля, направленная на оптимальный выбор активов, исходя из требуемого соотношения доходность/риск. Сформулированные им в 1950-х годах идеи составляют основу современной портфельной теории[17].

Можно рассмотреть два различных подхода к формированию портфеля.

Первый связан с выбором активов, доходность которых стабильна, но существует не нулевая вероятность потери активов. Тогда цель портфельного анализа состоит в определении оптимального набора активов, при котором риски потерь являются минимальными. Данная стратегия портфельного анализа выражена рекомендацией: «не храните яйца (деньги) в одной корзине (в одном банке, одном активе)».

Второй подход, для которого применима теория Марковица, состоит в выборе совокупности компенсационных активов. Считается, что доходность активов является случайной величиной, но вероятности их полных потерь нулевые. Тогда цель портфельного анализа состоит в выборе совокупности активов, которая обеспечит высокую среднюю доходность (критерий 1) и минимальное отклонение уровня дохода от этого среднего (критерий 2 – риск должен быть минимальным). Снижение риска достигается использованием компенсационных активов, коэффициент корреляции доходностей которых является отрицательным. Модель Марковица позволяет выбрать *оптимальный набор компенсационных активов с высокой средней доходностью.*

При записи модели используются свойства математического ожидания и формула математического ожидания суммы случайных величин. Пусть для формирования оптимального портфеля выбраны n активов, доходность которых на период инвестирования – случайные величины $Q_i,\ i=1,\dots,n$ с математическими ожиданиями $\bar{Q}_i,\ i=1,\dots,n$ и дисперсиями $D[Q_i],\ i=1,\dots,n$. Пусть $x_i,\ i=1,\dots,n$ – доли использования каждого актива в формируемом портфеле, которые удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=1\,,\ x_i\geq 0\,,\ i=1,\dots,n\,. \tag{3.1}$$

Тогда доходность портфеля Q_P на периоде инвестирования – случайная величина, которая зависит от доходности активов и определяется по следующей формуле:

---

[17] https://ru.wikipedia.org/wiki/Портфельная_теория_Марковица

$$Q_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot Q_i . \qquad (3.2)$$

Найдем математическое ожидание (среднее значение) доходности $\bar{Q}_P$:

$$M[Q_P] = M\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot Q_i\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot M[Q_i] .$$

Формулу для средней доходности портфеля можно записать в более наглядном виде:

$$\bar{Q}_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{Q}_i . \qquad (3.3)$$

Из формулы (3.3) следует, что средняя доходность формируемого портфеля определяется средними доходностями активов и долями их включения в портфель.

Найдем выражение для дисперсии доходности портфеля $D[Q_P]$:

$$D[Q_P] = M[(Q_P - \bar{Q}_i)^2] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (Q_i - \bar{Q})\right)^2\right] .$$

Откуда получаем формулу для дисперсии портфеля в матричной записи:

$$D[Q_P] = x \cdot K \cdot x^T . \qquad (3.4)$$

Здесь вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – доли активов размерностью (1 × n); x^T – вектор столбец долей активов размерностью (n × 1); K – ковариационная матрица активов, которая отражает взаимозависимость доходностей выбранных активов, размерностью (n × n).

Модель Марковица предписывает выбор оптимального вектора $x^{¿}$ долей, при котором средняя доходность портфеля должна быть не меньше заданной инвестором величины P_0 (ограничение на критерий 1), а уровень риска отклонения доходности от средней величины был бы минимальным (минимизация критерия 2)[18]. Математически модель записывается с использованием выражений (3.1), (3.3), (3.4) в следующем виде. Найти $x^{¿}$ из условий:

$$D[Q_P] = x \cdot K \cdot x^T \rightarrow \min ; \qquad (3.5)$$

$$\bar{Q}_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{Q}_i \geq P_0 ; \qquad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 , \; x_i \geq 0 , \; i = 1, \ldots, n . \qquad (3.7)$$

Задание 3.1. Доказать, что средний уровень доходности портфеля $\bar{Q}_P$ изменяется в пределах: $Q_{MIN} = \min(\bar{Q}_1; \bar{Q}_1; \ldots; \bar{Q}_n) \leq \bar{Q}_P \leq \max(\bar{Q}_1; \bar{Q}_1; \ldots; \bar{Q}_n) = Q_{MAX}$, т.е. от минимальной средней Q_{MIN} до максимальной средней Q_{MAX} доходностей выбранных активов:

$$Q_{MIN} \leq \bar{Q}_P \leq Q_{MAX} . \qquad (3.8)$$

Учитывая утверждение в задании 3.1, аналитику следует рекомендовать инвестору указанные там границы для выбора требуемой доходности P_0.

[18] Рекомендуется выполнить **Задание 2.1** раздела 2 для исследования способа решения двухкритериальной задачи принятия решений, к которой относится модель Марковица.

Рассмотрим уровни риска для оценок реальной доходности портфеля. Обозначим границы доходности портфеля: **%Низ** и **%Верх**. Математическая статистика дает следующие доверительные интервалы для реальной доходности портфеля (см. формулу (3.2)):

%Низ $¿ Q_P \leq$ **%Верх**, где **%Низ** = $\bar{Q}_P - t_\alpha \sqrt{D[Q_P]}$; **%Верх** = $\bar{Q}_P + t_\alpha \sqrt{D[Q_P]}$. (3.9)

Здесь t_α – квантиль распределения доходности, определяемый заданным уровнем доверительной вероятности (для нормального распределения Q_P и уровня значимости 5% $t_\alpha = 1.96$).

Задание 3.2. Провести сравнение приведенных формул модели Марковица (3.5) – (3.7), границ изменения средней доходности портфеля (3.8) и уровней риска доходности (3.9) с формулами программы «Портфельный анализ СЭ.xls». Указать номера ячеек листа Excel, в которых вычисляются соответствующие величины.

Тема 3.2. Портфельный анализ. Формирование таблицы вариантов инвестиционных портфелей

Для использования модели Марковица на практике необходимо найти вероятностные оценки ее параметров (эта задача решается в ***Теме 3.3***) и обосновать выбор уровня средней доходности портфеля P_0. Эту задачу решаем в данном разделе путем формирования таблицы вариантов инвестиционных портфелей при разных значениях P_0. В таблице 3.1 приведены 10 вариантов портфеля, сформированного из 5 активов (расчеты проведены в среде Excel).

Таблица 3.1. Пример вариантов портфеля, полученных с использованием модели Марковица при изменении P_0 равномерно в пределах 1,8% до 5.1%.

№ вар	A1	A2	A3	A4	A5	СД %	ДИ%	**%Низ**	**%Верх**
1	0,87	0,00	0,00	0,13	0,00	2,73%	1,03%	1,69%	3,76%
2	0,87	0,00	0,00	0,13	0,00	2,73%	1,03%	1,69%	3,76%
3	0,87	0,00	0,00	0,13	0,00	2,73%	1,03%	1,69%	3,76%
4	0,74	0,00	0,00	0,26	0,00	2,93%	1,06%	1,87%	3,98%
5	0,51	0,00	0,00	0,49	0,00	3,29%	1,20%	2,09%	4,49%
6	0,29	0,00	0,00	0,71	0,00	3,65%	1,44%	2,21%	5,09%
7	0,06	0,00	0,00	0,94	0,00	4,01%	1,73%	2,28%	5,75%
8	0,00	0,00	0,27	0,73	0,00	4,38%	2,13%	2,24%	6,51%
9	0,00	0,00	0,63	0,37	0,00	4,74%	2,59%	2,15%	7,33%
10	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	5,10%	3,07%	2,03%	8,17%

В приведенной таблице первые три портфеля совпадают по всем параметрам, так как при выбранных исходных данных ограничение (3.6) модели Марковица выполняется как строгое неравенство. По остальным портфелям наблюдается закономерность в изменении долей активов A1 – A5, включенных в портфель (см. данные столбцов 2 – 6 таблицы). Характерным свойством таблицы вариантов является увеличение риска доходности, определяемого величиной доверительного интервала (столбец ДИ%), с ростом средней доходности P_0 (столбец данных СД%).

Задача аналитика состоит в обосновании рекомендации для инвестора по выбору оптимального варианта портфеля. Данная задача может быть решена с использованием экономико-математических методов принятия решений в условиях риска и неопределенности[19].

При использовании максиминных стратегий (принцип максимальной гарантированной доходности портфеля) оптимальным вариантом в таблице 3.1 следует считать портфель 7.

Задание 3.3. Пояснить порядок выбора варианта 7 и дать его полную характеристику.

Задание 3.4. Обосновать порядок проведения дополнительных расчетов при необходимости повышения точности расчетов оптимального портфеля.

Тема 3.3. Поддержка решений при оптимизации портфельных инвестиций в условиях стабильной и нестабильной экономики

Проведенный выше портфельный анализ базировался на использовании теоретических знаниях[20] и в модели Марковица использованы теоретические модели процессов. Однако в настоящее время не существует теории для оценок параметров этой модели: ковариационной матрицы K в формуле (3.4) и прогнозов $\bar{Q}_i,\ i=1,\dots,n$ средних доходностей выбранных активов в формуле (3.3). На практике эти количественные данные оцениваются на основе эмпирического подхода (на основе наблюдений количественных данных).

Следует иметь в виду, что основной принцип эмпирического подхода «так было, так будет!» не всегда выполняется[21]. Эмпирические знания верны для стабильной экономики, для которой комплекс закономерностей формирования событий в прошлом без изменения может быть перенесен на будущее. Тогда для оценок K и $\bar{Q}_i,\ i=1,\dots,n$ можно использовать временные ряды совместных значений доходностей в прошлом и статистические методы их обработки. Пример исходных данных квартальных доходностей 5 активов представлен в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Квартальные наблюдения процентных ставок по финансовым инструментам

№ квартала	1	2	3	4	5
1	2,5%	-1,4%	2,2%	2,3%	-2,6%
2	2,9%	4,9%	6,8%	4,8%	3,8%
3	2,4%	1,6%	4,9%	3,7%	0,1%
4	1,8%	2,5%	4,0%	3,4%	0,6%
5	2,2%	4,7%	6,1%	4,8%	2,5%
6	3,5%	4,7%	7,0%	5,5%	6,6%
7	3,3%	-0,4%	2,9%	3,2%	-1,6%

[19] См. **http://glspro.narod.ru/teach/imdoc/mep9.html**; файл «Решения при неопределенности.pdf» учебных материалов кафедры МЭММБИ АГУ.
[20] Для подтверждения этого утверждения смотрите выше слова: «Портфельная теория Марковица».
[21] Анализ эмпирического подхода проведен в главе 1 книги: «Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013».

8	2,1%	2,9%	5,5%	4,1%	1,9%
9	1,8%	3,3%	5,9%	4,2%	1,6%
10	2,0%	0,1%	3,3%	3,2%	0,3%
11	3,0%	4,9%	6,8%	5,2%	4,5%
12	2,6%	4,2%	5,8%	4,9%	4,4%
Сред	2,51%	2,67%	5,10%	4,11%	1,84%

На основе этих исходных данных в условиях стабильной экономики можно оценить требуемые параметры. Средние доходности $\bar{Q}_i,\ i=1,\dots,5$ активов приведены в последней строке таблицы 3.2, а ковариационная матрица, вычисленная с использованием встроенной функции КАВАР() приведена в таблице 3.3.

Эмпирический подход для оценки параметров модели Марковица может быть использован в условиях нестабильной экономики, т.е. экономики, для которой в будущем сохраняются тенденции изменений экономических показателей. Тогда для поиска данных, аналогичных таблицам 3.2 и 3.3 применяют эконометрические методы анализа временных рядов.

Таблица 3.3. Оценки ковариационной матрицы K формулы (3.4) по данным таблицы 3.2.

i\j	1	2	3	4	5
1	2,925E-05	1,667E-05	1,948E-05	1,877E-05	5,062E-05
2	1,667E-05	0,000456	0,000323	0,000188	0,000498
3	1,948E-05	0,000323	0,000245	0,000139	0,000368
4	1,877E-05	0,000188	0,000139	0,000086	0,000229
5	5,062E-05	0,000498	0,000368	0,000229	0,000659

Состояние экономики, для которой принципы эмпирического моделирования процессов неприменимы, называется кризисной. Профессиональные знания и опыт аналитика направлены на надежную оценку состояния экономики при решении конкретной аналитической задачи[22].

Методические подходы портфельного анализа в среде Excel с использованием инструмента «Поиск решения» в условиях стабильной и нестабильной экономик приведены в описании соответствующих лабораторных работ.

[22] Классификация состояния экономических процессов не является абсолютной. Она зависит от места, времени и конкретной аналитической задачи.

Раздел 4. Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений при стимулировании менеджеров финансовых организаций

Модель поведения работника на рабочем месте. Модель оптимизации бонуса менеджеров финансовых организаций. Расчетные работы: «Активность работников»; «Оптимизация бонуса»

Тема 4.1. Модель поведения работника на рабочем месте

В данном разделе рассматривается для экономического человека зависимость объема продаж труда, т.е. фактической трудовой активности (ФТА) от его цены (р) на локальном рынке труда и при условии, что «поле деятельности» – объем оплачиваемой работы – не ограничен. Изучаем среднедневную активность работника, т.е. рассматриваем трудовые процессы в среднем за рабочий день.

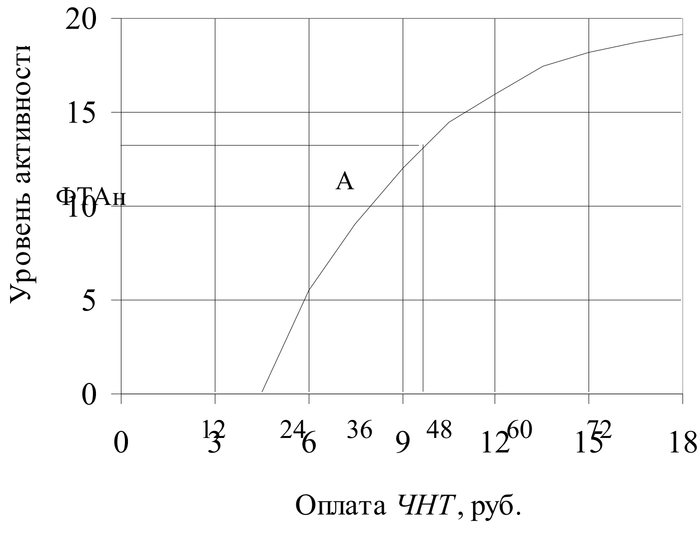
Приведем основные определения. Справедливой (рыночно равновесной) будем считать сделку, при которой согласованная заработная плата равна произведению количества продаваемого труда на его цену.

В качестве **меры труда** (единицы измерения объема работы) выберем **часовую норму труда** (*ЧНТ*) – объем работы, который реально выполняет среднерыночный (для сегмента локального рынка) работник в течение одного рабочего часа. Эта характеристика для среднерыночного работника может быть оценена как часовая норма выработки. Такой работник за 8-часовой рабочий день выполнит объем работы 8 *ЧНТ*. При оплате труда в 100 руб. за *ЧНТ* его месячная заработная плата (20 рабочих дней) равна 16 000 руб.

Потенциал трудовой активности (*ПТА*) работника определим, как объем работы в *ЧНТ*, который он способен выполнить в среднем за рабочий день. Мы также используем понятие **фактическая трудовая активность** (*ФТА)* работника.

Считаем, что ФТА меняется в пределах [0, ПТА]. Оплата единицы труда р в рублях за ЧНТ также меняется. Так на рисунке 4.1 она меняется от 0 до 72 руб. за ЧНТ.

Рис.4.1. Зависимость активности персонала от цены *ЧНТ* (*ПТА* =20)



Для построения графика можно задать его характерные точки: p_{min} – минимальная ставка *ЧНТ*, которая начинает интересовать рабочего; А(*ФТА*$_н$, $p_н$) – промежуточная точка «привязки графика» по данным локального рынка труда.

Приведем пример аналитического выражения зависимости на рисунка 4.4:

$$ФТА = \tilde{x}(p) = \begin{cases} ПТА - \dfrac{\delta}{p^n}, & \text{если } p > p_{\min} = \left(\dfrac{\delta}{ПТА}\right)^{\frac{1}{n}} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Приведенный рисунок показывает, что при $p \le p_{\min}$ функция $x = \tilde{x}(p)$ принимает нулевые значения. Точка $p = p_{\min}$ найдена решением уравнения $\tilde{x}(p) = 0$. При $p > p_{\min}$ функция $\tilde{x}(p)$ выпукла (вверх), монотонно возрастает и при больших значениях p сколь угодно близко приближается к значению ПТА. Перечисленные свойства качественно соответствуют закономерностям поведения работников при стимулировании интенсивности их труда.

Мы считаем возможным построение конкретной функции $ФТА = \tilde{x}(p)$ для среднерыночного и индивидуального работника на основе дополнительной информации, которую участники трудовых отношений могут получить анализом условий локального рынка труда.

Введем для локальных рынков **интегральный показатель интенсивности труда** (обозначим его через $\alpha \in (0,\,1)$, как отношение среднерыночной активности работников к ПТА. Предположим, что значение этого показателя постоянно для выделенной профессиональной группы при среднерыночных условиях оплаты труда и не зависит от квалификации, возраста работников и других индивидуальных характеристик.

Тогда $\alpha = ФТА_H / ПТА$ определяется нами как фундаментальная характеристика локального рынка труда для всех работников выделенного сегмента. Для среднерыночного работника параметры функции (4.1) имеют вид (получены решением уравнения $ФТА_H = \tilde{x}(p_H)$):

$$ПТА = \frac{ФТА_H}{\alpha}; \quad \delta = \frac{ФТА_H \cdot (1-\alpha) \cdot p_H^n}{\alpha}. \tag{4.2}$$

Рассмотрим индивидуального работника, который отличается, по нашему мнению, от среднерыночного на рассматриваемом сегменте локального рынка труда по квалификации (индекс $k_{кв}$), интенсивности труда (индекс $k_{ин}$) и по уровню отношения к денежному вознаграждению (индекс валентности – v). Считаем, что значения введенных индексов для среднерыночного работника равны единице. Индекс квалификации мы определяем отношением объемов выполненной работы индивидуального и среднерыночного работников при одинаковой интенсивности за одно и тоже рабочее время. Индекс интенсивности труда – это отношение производительности при одинаковых квалификациях сравниваемых работников.

Тогда фактический объем работы, который выполнит индивидуальный работник за рабочий день при среднерыночных условиях оплаты труда (при v = 1), определится по формуле:

$$ФТА_Н = k_{кв} \cdot k_{ин} \cdot T \quad , \tag{4.3}$$

где T – средняя продолжительность рабочего дня в рабочих часах.

Рассмотрим фактор валентности. Можно показать, что уровень активности $ФТА_Н$ достигается для работника с индексом мотивации (валентности) v при $p \cdot v = p_Н$. Тогда точка А на рисунке 4.1 имеет координаты: $A\left(ФТА_Н,\ \frac{p_Н}{v}\right)$.

Окончательно в функции (4.1) поведения всех работников выделенного сектора локального рынка труда параметры имеют следующие выражения:

$$ПТА = \frac{ФТА_Н}{\alpha};\quad \delta = \frac{ФТА_Н \cdot (1-\alpha) \cdot p_Н^n}{\alpha \cdot v^n}\ . \tag{4.4}$$

Объем работы в *ЧНТ*, который фактически выполнит работник в среднем за рабочий день, вычисляется по формуле (4.1) с учетом формул (4.3), (4.4) и заданных значениях $\alpha,\ n$. При расчетах рекомендуется использовать следующие значения характеристик работников: $v = 1 \pm 0.2;\ k_{ин} = 1 \pm 0.5;\ T \le 12;\ 0.5 \le k_{кв} \le 12;\ \alpha = 0.7;\ n = 1$[23].

Тема 4.2. Модель оптимизации бонуса менеджеров финансовых организаций

Эффективным механизмом стимулирования исполнительной структуры является выделение доли $\sigma \in [0,\ 1]$, полученной этой структурой прибыли в качестве бонуса (премиального вознаграждения). Тогда оптимальное значение $\sigma^{¿}$ должно обеспечивать максимальные результаты для собственника рассматриваемой экономической системы.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимизации бонуса исполнительному директору фирмы, зависимость среднедневного объема работ которого от ставки оплаты труда $x = \widetilde{x}(p)$ задана выражением (4.1).

Рассмотрим математическую модель обоснования оптимального решения собственников фирмы по стимулированию исполнительной дирекции. Обозначим через

$$D_ф(x) = C \cdot x^m,\ \ C > 0,\ m \in [0,\ 1] \tag{4.5}$$

зависимость среднедневной валовой прибыли фирмы, полученной за счет активности стимулируемых менеджеров.

Функцию (4.5) дополнительной прибыли от трудового вклада менеджеров можно получить на основе функции Кобба-Дугласа при постоянной величине капитала фирмы.

[23] Обоснование этих значений проведено в главе 3 учебного пособия: Булатова Г.А., Маничева А.С., Оскорбин Н.М. Методы и математические модели управления персоналом. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2015.

Дополнительная валовая прибыль $D_ф$ разделяется на чистую прибыль собственника D_C и оплату труда менеджеров D_B:

$$D_C(x)=(1-\sigma)\cdot C\cdot x^m;\ \ D_B(x)=\sigma\cdot C\cdot x^m \tag{4.6}$$

С учетом выражения (4.6) задачу выбора оптимального значения $\sigma^{¿}$ запишем в следующем виде. Найти $\sigma^{¿}\in[0,\ 1]$ при котором доход собственника является максимальным:

$$D_C(x)=(1-\sigma)\cdot C\cdot x^m \rightarrow \max. \tag{4.7}$$

Можно показать, что при фиксированной величине $\sigma\in[0,\ 1]$ и заданной активности $x=\widetilde{x}(p)$ оплата p единицы активности и уровень активности x определятся из следующего уравнения:

$$p\cdot\widetilde{x}(p)=\sigma\cdot C\cdot(\widetilde{x}(p))^m, \tag{4.8}$$

решение которого необходимо учитывать как дополнительное условие задачи (4.7).

В описании к лабораторной работе 4 представлена методика идентификации функции (4.5) и программное обеспечение в среде Excel для решения задачи (4.7) в случае, когда в (4.1) параметр *n* равен единице.

Тема 4.3. Расчетные работы: «Активность работников»; «Оптимизация бонуса»

Приведенные в данном разделе аналитические задания и порядок их выполнения изложены в описаниях к лабораторным работам[24].

Задача 4.3.1. Моделирование активности персонала фирмы

С использованием математической модели активности работника (4.1) провести расчеты зависимости активности от оплаты единицы объема работ.

Используя полученную зависимость провести расчеты:

А) Среднедневной активности (ФТА) при оплате 1 ЧНТ равной 80 рублей.

Б) Требуемую оплату 1 ЧНТ для выполнения работником 13 ЧНТ в среднем за рабочий день.

В) Рассчитать уровни заработной платы работника в среднем за рабочий день и месяц по данным пп. А) и Б) (принять 20 рабочих дней в месяц).

Расчеты выполнить с использованием программы в среде MS Excel (файл «Активность работника.xls»). Исходные данные приведены в таблицах 4.1, 4.2, 4.3. Результаты представлены таблицей 4.4. и рисунком 4.1.

Таблица 4.1. Характеристика оборудования рабочего места

№ п/п	Показатели	Обозначение	Значение
1	Предельная производительность, ЧНТ/час	ЧПТАоб	1,5
2	Период времени использования, час/сутки	Тоб	24
3	Коэффициент использования оборудования, %	КИоб	100,0%

Таблица 4.2. Трудовая характеристика сотрудника

[24] Оскорбин Н.М. Математические модели управления персоналом // Методические указания к лабораторным работам по курсу АМиМЭ. – Инфоресурсы каф. МЭММБИ АГУ, 2015. Оскорбин Н.М. Оптимизация бонуса менеджеров финансовых организаций // Методические указания к лабораторным работам по курсу АМиМЭ. – Инфоресурсы каф. МЭММБИ АГУ, 2015.

№ п/п	Показатели	Обозначение	Значени е
1	Продолжительность рабочего дня, час	Тр	9,00
2	Коэффициент интенсивности труда	Кит	1,10
3	Коэффициент квалификации	Ккв	1,20
4	Валентность работника	Вр	1,20

Таблица 4.3. Характеристика локального рынка труда

№ п/п	Показатели для данной профессии	Обозначение	Значени е
1	Средний коэффициент интенсивности труда	Альфа	0,70
2	Среднемесячная заработная плата, руб.	ЗПн	10000,0 0
3	Среднемесячное число рабочих часов, час	Тмес	170,00

Таблица 4.4. Расчетные показатели трудового процесса

№ п/п	Наименование показателей	Обозначения	Значение
1	Потенциал трудовой активности работника	ПТАр	16,97
2	Сменная производительность оборудования	ПТАоб	36,00
3	Потенциал трудовой активности рабочего места	ПТА	16,97
4	Расценка среднерыночная, руб/ЧНТ	Рн	58,82
5	Нормативная трудовая активность работника, ЧНТ	ФТАн	11,88
6	Эффективная расценка (учет валентности), руб/ЧНТ	РЭн	70,59
7	Коэффициент трудозатрат (логарифмический)	ДЕЛ	299,50
8	Эффективная трудовая активность работника, ЧНТ	ФТАэ	13,44
9	Оценка месячной заработной платы (норма), руб	ЗПнм	16795
10	Отношение ФТА работник/среднерыночный работник	ОТНрс	1,68

Ответы на поставленные в задаче 4.3.1 вопросы.

А) Среднедневной активности (ФТА) при оплате 1 ЧНТ равной 80 рублей.

По графику на рисунке 4.2. находим ФТА = 13.8 *ЧНТ*.

Б) Требуемую оплату 1 ЧНТ для выполнения работником 13 ЧНТ в среднем за рабочий день.

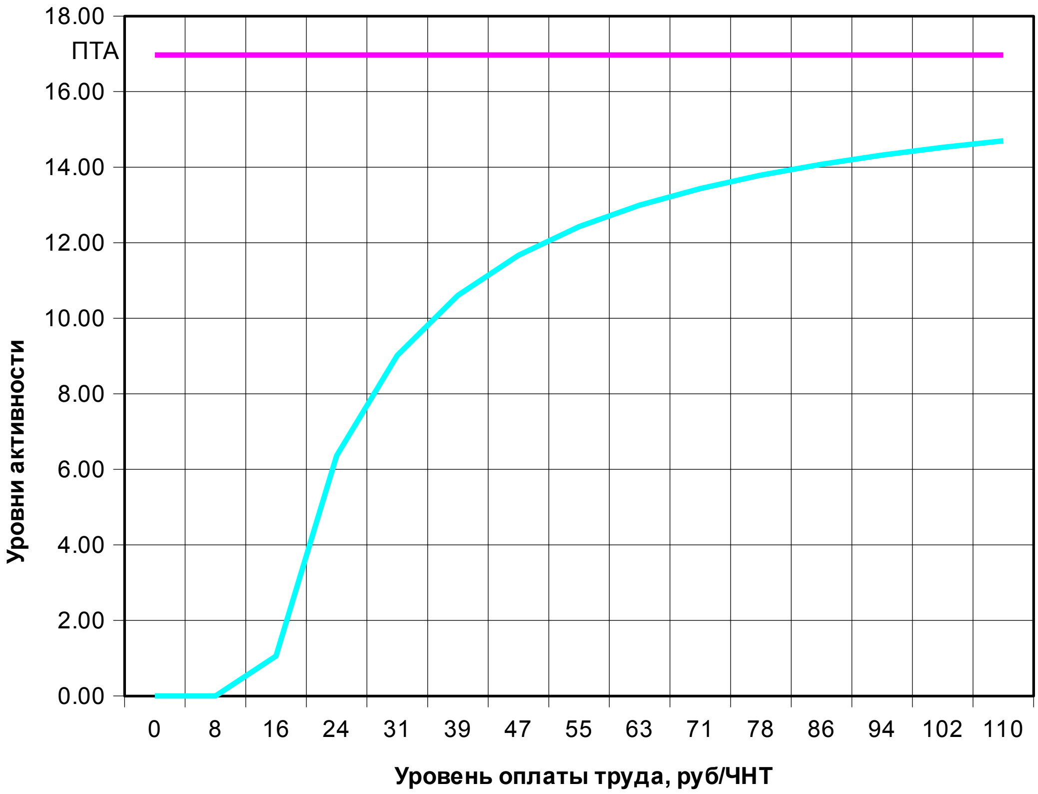
По графику на рисунке 4.1. находим р = 63 *руб*/*ЧНТ*.

В) Рассчитать уровни заработной платы работника в среднем за рабочий день и месяц по данным пп. А) и Б) (принять 20 рабочих дней в месяц).

По п. А. Среднедневная заработная плата – 13.8*80 = 1104 руб.; месячная – 22080 руб.

По п. Б. Среднедневная заработная плата – 13*63 = 819 руб.; месячная – 16380 руб.

Рис. 4.2. Зависимость активности работника от расценки



Задача 4.3.2. Оптимизация бонуса менеджеров финансовой организации

С использованием математической модели активности работника и математической модели характеристики бизнеса финансовой организации в зоне ответственности менеджера провести расчеты оптимального процента вознаграждения (бонуса) от дополнительной прибыли. Исследовать эффект автоматного поведения менеджера в стимулирующей среде. Используя полученные результаты исследовать зависимость бонуса от валентности работника для следующих значений:

v=0,8	v=1	v=1,2	v=1,4	v=1,6	v=1,8	v=2

Расчеты провести с использованием программы в среде MS Excel (Файл «Активность менеджеров.xls»). Исходные данные представлены в таблицах 4.5, 4.6, 4.7.

Результаты расчетов системы стимулирования приведены в таблице 4.8. Собственнику фирмы аналитики рекомендуют установить процент бонуса от дополнительной прибыли фирмы для данного менеджера равный 12,3%. Тогда собственники обеспечат для себя среднедневной доход в объеме 2936,74 рублей.

Исследование влияния индекса валентности на результаты оптимизации представлены в таблице 4.9. Следует отметить, что строки этой таблицы по показателям совпадают с таблицей 4.8. Расчеты показывают, что собственникам целесообразно осуществить поиск менеджера с большим индексом валентности. Так менеджер, имеющий одинаковые с рассматриваемым трудовые показатели, но более мотивирован (v=1,4) увеличит прибыль собственникам на 5% за счет более интенсивного труда на уровне 70%.

Таблица 4.5. Трудовая характеристика менеджера

№ п/п	Показатели	Обознач	Значение
1	Продолжительность рабочего дня, час	Тр	12,00
2	Коэффициент интенсивности труда	Кит	1,50
3	Коэффициент квалификации	Ккв	1,95
4	Валентность работника	Вр	1,00

Таблица 4.6. Характеристика локального рынка труда

№ п/п	Показатели для данной профессии	Обознач	Значение
1	Средний коэффициент интенсивности труда	Альфа	0,70
2	Среднемесячная заработная плата, руб	ЗПн	2500,00
3	Среднемесячное число рабочих часов, час	Тмес	170,00

Таблица 4.7. Характеристика бизнеса

№ п/п	Показатели для характеристики бизнеса	Обознач	Значение
1	Потенциал чистой прибыли, руб.	R	4000,00
2	Нормативное значение чистой прибыли, руб.	Rп	3451,70
3	Нормативная активность работника, ЧНТ	ФТАп	35,10

Таблица 4.8. Результаты оптимизации системы оплаты труда

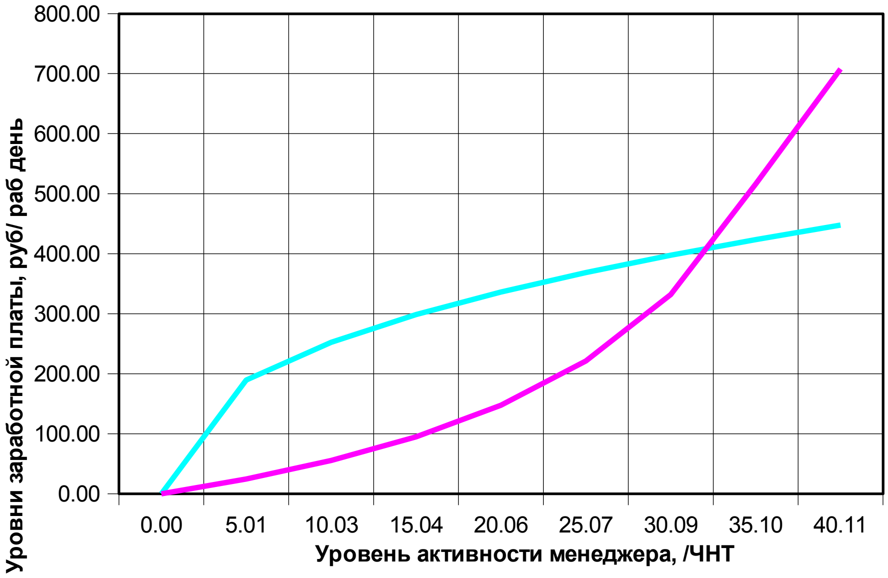
№ п/п	Наименование показателей	Значение
1	Оптимальная оплата труда, руб/НТЧ	12,61
2	Максимальный результат фирмы, руб.	3347,58
3	Затраты на оплату труда, руб./раб. день	410,83
4	Доля вознаграждения в валовой прибыли фирмы	12,3%
5	Чистый доход собственника, руб/раб день	2936,74
6	Коэффициент интенсивности труда	65,0%

Таблица 4.9. Результаты оптимизации системы оплаты труда в зависимости от валентности

№ п/п	v=0,8	v=1	v=1,2	v=1,4	v=1,6	v=1,8	v=2
1	15,76	12,61	12,25	10,50	11,03	9,80	8,82
2	3347,58	3347,58	3451,70	3451,70	3551,55	3551,55	3551,55
3	513,54	410,83	430,15	368,70	414,78	368,70	331,83
4	15,3%	12,3%	12,5%	10,7%	11,7%	10,4%	9,3%
5	2834,03	2936,74	3021,56	3083,01	3136,77	3182,86	3219,73
6	65,0%	65,0%	70,0%	70,0%	75,0%	75,0%	75,0%

Исследование принципа автоматного поведения менеджера в стимулирующей среде, которое требуется согласно *Задача 4.3.2.* рекомендуется выполнить магистрантам самостоятельно. При этом следует учитывать гипотезу поведения работников: "Если работник получит фактическую заработную плату больше ожидаемой (рыночно справедливой), то он увеличит свою активность. Верно и обратное" Применение данного принципа иллюстрировано рисунком 4.2, на котором изображены ожидаемая (красная) и действительная (зеленая) заработные платы. Их пересечение – точка динамического равновесия в поведении менеджера.

Рис. 4.3. Графики зависимости ожидаемой и действительные заработные платы менеджера в среднем за рабочий день



Раздел 5. Аналитические исследования проблем корпоративного управления с использованием методов блочного программирования

Модель планирования объединения промышленных предприятий. Основы блочного линейного программирования.

В сложных системах (с двумя и более центрами принятия решений) кроме основных функций управления возникают дополнительные, такие как согласование и координация решений. **Координация решения** – это согласование деятельности, целей, зон ответственности, распределение общих ресурсов, совместного дохода.

Типичным примером сложной системы в экономике является система **корпоративного управления** – организационная модель, с помощью которой корпорация представляет и защищает интересы своих инвесторов. Тип применяемой модели зависит от структуры корпорации, существующей в рамках рыночной экономики, и отражает факт разделения функций владения и управления корпорацией. В общем случае, **корпорация** – объединение *n* юридических лиц плюс одна управляющая компания.

Управление корпорацией может осуществляться по двум схемам: централизованной и децентрализованной.

Централизованная схема характеризуется тем, что каждому предприятию выделяется часть объединенного ресурса. Решения «кому и сколько» принимает управляющая компания.

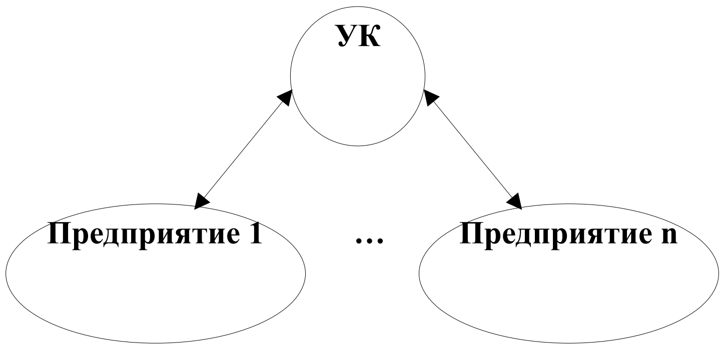


Рис. 5.1. Схема управления в централизованной системе

Децентрализованная схема: используется рыночный механизм, центр устанавливает внутрифирменные цены, лимиты. Каждое предприятие «покупает» часть ресурса, который необходим для достижения собственных целей. Решения о количестве приобретаемого ресурса предприятия принимают самостоятельно.

Тема 5.1. Модель планирования объединения промышленных предприятий

Рассматриваем объединение промышленных предприятий. Центр осуществляет управление объединением и сам не производит продукцию.

Каждое предприятие располагает для производства собственными ресурсами. Часть ресурсов передана в распоряжение управляющей компании (фонды оборотных средств, фонд развития, транспортные средства, основные производственные фонды).

Результат функционирования центра определяется результатами функционирования отдельных предприятий. Необходимо для каждого предприятия в рамках заданной номенклатуры определить объемы выпуска продукции такие, чтобы они были обеспечены локальными ресурсами, ресурсами объединения и давали объединению максимальную прибыль.

Экономический смысл модели планирования состоит в оптимизации планов производства объединения, при которых потенциальные возможности предприятий по прибыли максимально реализуются.

Пусть объединение состоит из T предприятий (блоков или бизнес-единиц), каждое из которых выпускает продукцию n_t видов, потребляя общие ресурсы отраслевого назначения и ресурсы, являющиеся «собственностью» предприятий.

Заданы матрицы $A_t, \overline{A}_t$ норм потребления локальных и ресурсов объединения, векторы $B_t \in R^{m_t}, B \in R^m$ лимитов ресурсов локальных и объединения; векторы $P_t \in R^{n_t}$ коэффициентов дохода от реализации продукции предприятием $t\ (t = 1, ..., T)$.

Пусть неотрицательный вектор $x_t \in R^{n_t}$ – план предприятия с номером *t*.

Модель планирования объединения имеет **блочно-диагональную структуру** вида:

$$F = P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_Tx_T \to \max, \qquad (5.1)$$

$$\begin{cases} A_1x_1 & & & & \le B_1, \\ & A_2x_2 & & & \le B_2, \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & A_Tx_T & \le B_T, \end{cases} \qquad (5.2)$$

$$\overline{A}_1x_1 + \overline{A}_2x_2 + ... + \overline{A}_Tx_T \le B, \qquad (5.3)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_T \ge 0. \qquad (5.4)$$

Пример. Построим модель (5.1)-(5.4) для $T = 3$. Пусть предприятия производят 2, 2 и 3 вида продукции соответственно ($n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$). На предприятиях имеется 3, 2 и 1 локальных ресурсов соответственно, а в объединении – 2 общих ресурса ($m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$, $m = 2$). Векторы переменных имеют вид:

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} x_3^1 \\ x_3^2 \\ x_3^3 \end{pmatrix},$$

где x_i^j – объем *j*-го вида продукции, производимого *i*-м предприятием.

Модель планирования объединения в матричной форме будет иметь следующий вид:

$$F = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} A_1x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \le B_1, \\ 0 \cdot x_1 + A_2x_2 + 0 \cdot x_3 \le B_2, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + A_3x_3 \le B_3, \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\overline{A}_1x_1 + \overline{A}_2x_2 + \overline{A}_3x_3 \le B,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \; .$$

Тема 5.2. Основы блочного линейного программирования

Рассмотрим методы решения задач оптимизации большой размерности (по числу переменных и ограничений). На практике такие задачи возникают при обосновании оптимальных решений в сложных производственных, экономических и социальных системах. «Проклятие размерности» характерно для большинства реальных задач математического программирования.

Задачи с условиями типа (5.2)-(5.4) называют **задачами блочного линейного программирования**. Блочность задачи планирования в объединении предприятий определяется тем, что локальные ресурсы используются только на своем предприятии. И если бы отсутствовали ограничения по ресурсам объединения, то данная задача распалась бы на несколько задач планирования каждого предприятия в отдельности.

Существуют два подхода к решению задач большой размерности:

– использование параллельных вычислений по алгоритмам математического программирования;

– использование **методов декомпозиции** больших экстремальных задач на стадии обоснования вычислительных алгоритмов – **блочное программирование**. Крупноразмерная модель сводится к нескольким моделям меньшей размерности. Получившиеся задачи решаются вместе по специальным правилам согласования.

Значение методов блочного программирования не ограничивается сферой разработки эффективных вычислительных схем. Они позволяют исследовать **информационные процессы координации корпоративных решений** в сложных системах.

Алгоритмизация вычислительных процессов выступает примером организации функционирования иерархических систем управления, в которых функции принятия решений распределены по участникам этих систем. Ведущую роль в принятии решений производственного характера играют элементы нижних уровней (блоков). Координирующий орган (центр) обеспечивает согласование решений по используемым ресурсам и производственным ограничениям. Главная роль центра сводится к обеспечению оптимальности решений блока по отношению к целевой функции системы в целом. Иерархическая система управляется путем передачи между элементами информационных потоков, объем которых существенно ниже размерностей задач, решаемых этими элементами.

К настоящему времени широкое развитие получили методы **блочного линейного программирования**, в частности метод Данцига-Вульфа. Основная идея метода заключается в эквивалентном преобразовании **исходной** задачи (5.1)-(5.4) к новой задаче, называемой

главной. В процессе определения текущего плана главной задачи возникают задачи блоков (предприятий), которые могут решаться независимо.

Полное решение задачи (5.1)-(5.4) состоит из следующих трех этапов:

1. Нахождение опорного плана главной задачи – **этап запуска алгоритма**.

2. Поиск решения главной задачи – **информационный этап** – итерационная процедура, которая заканчивается, если выполнено условие оптимальности плана.

3. Восстановление решения задачи (5.1)-(5.4) – **этап поиска решений**.

Предположим, что задача (5.1)-(5.4) решается в системе (T + 1) ЭВМ. Считается, что в памяти ЭВМ блока t содержатся исходные данные t-го предприятия (матрицы A_t , $\bar{A}_t$, B_t , P_t). В ЭВМ центра записаны вектор B и числа m, T. ЭВМ центра связана с ЭВМ блоков, которые функционируют независимо друг от друга.

Общая структура алгоритма блочного программирования приведена на рисунке 5.2.

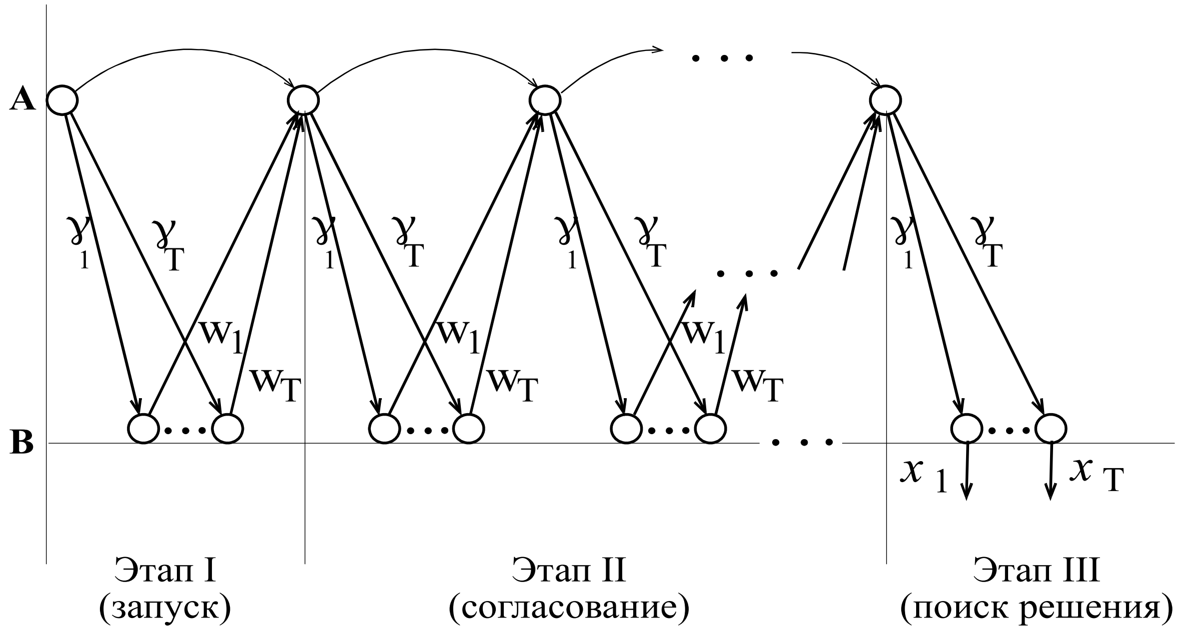


Рис. 5.2. Структура иерархического алгоритма блочного программирования
○ – символ задачи; → – информационная связь задач;
А – уровень задач центра; В – уровень задач блоков

Для описания всей процедуры решения исходной задачи необходимо указать математические выражения задач центра и предприятий для всех выделенных этапов и информацию, передаваемую между этими задачами.