

СОДЕРЖАНИЕ

1. Теоретические основы.....	5
1.1 . Определение индикатрисы Дюпена.....	5
1.2. Виды индикатрисы Дюпена.....	5
1.3. Выведение формулы индикатрисы Дюпена.....	6
1.4. Исторический обзор и развитие понятия "индикатриса Дюпена"	7
1.5. Значение и роль индикатрисы Дюпена в оптике и освещении.....	8
Глава 2: Моделирование и измерение индикатрисы Дюпена.....	10
2.1 Теоретические модели индикатрисы Дюпена.....	10
2.2 Методы измерения индикатрисы Дюпена.....	11
2.3 Анализ результатов измерений и интерпретация данных.....	12
3. Применение индикатрисы Дюпена в практических задачах.....	14
3.1. Практическое применение индикатрисы Дюпена в конкретной области	14
3.2. Оценка влияния параметров на форму индикатрисы.....	15
3.3 Пример решения индикатрисы Дюпена.....	16
Заключение.....	19
Список использованной литературы.....	21

Введение

Индикатриса Дюпена — это графическое представление или математическая модель, которая описывает распределение отраженного или рассеянного света от поверхности объекта в зависимости от направления падающего света. Она представляет собой трехмерную кривую, которая показывает интенсивность света в различных направлениях от поверхности объекта.

Индикатриса Дюпена используется для определения оптических свойств поверхностей, таких как отражательная способность, матовость, текстура и направленность отражения света. Она позволяет предсказать, как поверхность будет взаимодействовать со светом, а также помогает в создании реалистичных визуальных эффектов в компьютерной графике и освещении.

Индикатриса Дюпена широко применяется в различных областях, включая компьютерную графику, игровую индустрию, визуализацию данных, дизайн и архитектуру, освещение и фотометрию. Она позволяет ученым, дизайнерам и разработчикам более точно моделировать и визуализировать поверхности объектов и создавать реалистичные изображения и эффекты света.

Индикатриса Дюпена является важным инструментом для изучения и понимания оптических свойств материалов и поверхностей, а также для создания высококачественных визуальных эффектов.

Целью данной работы является обеспечение полного и всестороннего понимания понятия индикатрисы Дюпена, его сущности и применения.

Исходя из цели необходимо решить следующие задачи:

1. Рассмотреть теоретические основы индикатрисы Дюпена.
2. Провести исторический обзор понятия "индикатриса Дюпена".
3. Определить значение и роль индикатрисы Дюпена в оптике и освещении.
4. Рассмотреть моделирование и измерение индикатрисы Дюпена.

5. Определить теоретические модели индикатрисы Дюпена.
6. Рассмотреть методы измерения индикатрисы Дюпена.
7. Рассмотреть применение индикатрисы Дюпена в практических задаче.

Объект исследования - индикатриса Дюпена - играет важную роль в изучении оптических свойств поверхностей и нахождении практических применений этой информации в различных областях.

Предметом исследования является изучение свойств и характеристик индикатрисы Дюпена, таких как форма, направленность, интенсивность отраженного или преломленного света в зависимости от различных параметров, например, угла падения света, текстуры поверхности, оптических свойств материалов и других факторов.

Практическая значимость изучения индикатрисы Дюпена состоит в его применении и использовании в различных областях и приложениях.

Структура работы: работа состоит из содержания, введения, трех глав, заключения и списка литературы.

1. Теоретические основы

1.1. Определение индикатрисы Дюпена

Индикатриса Дюпена широко используется в графике и компьютерной графике для создания различных форм и изображений. Она является математическим инструментом, который позволяет представлять сложные геометрические фигуры и структуры.

Математическое определение индикатрисы Дюпена выглядит следующим образом:

Пусть функция $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ задает кривую в трехмерном пространстве. Значение параметра t изменяется в определенном диапазоне. Координаты точек на индикатрисе Дюпена определяются следующим образом: $x = x(t) * \cos(t)$ $y = y(t) * \sin(t)$ $z = z(t)$.

Таким образом, каждая точка индикатрисы Дюпена имеет координаты (x, y, z) , которые зависят от значений функции $f(t)$ и параметра t . Вращение кривой Дюпена вокруг оси z позволяет получить трехмерную поверхность, которая может иметь сложные и разнообразные формы.

Индикатриса Дюпена может быть использована для визуализации различных объектов и явлений, включая анимацию, моделирование объектов в компьютерной графике, создание специальных эффектов и многое другое. Она представляет собой мощный инструмент для создания трехмерных изображений и виртуальных сцен.

1.2. Виды индикатрисы Дюпена

Индикатриса Дюпена может иметь различные формы и классифицируется на несколько видов в зависимости от свойств поверхности и способа рассеивания света. Ниже перечислены некоторые из видов индикатрисы Дюпена:

Индикатриса Дюпена первого рода

В этом случае индикатриса имеет форму сферы. Такая индикатриса характеризует равномерное рассеивание света во всех направлениях при отражении от поверхности.

Индикатриса Дюпена второго рода

В данном случае индикатриса имеет форму эллипсоида. Такая индикатриса характеризует предпочтительное рассеивание света в определенных направлениях, что связано с анизотропией поверхности.

Индикатриса Дюпена третьего рода

Этот тип индикатрисы характеризует отражение света от поверхности с преобладающим направлением рассеивания света в заданном секторе или угле.

Индикатриса Дюпена четвертого рода

В данном случае индикатриса имеет сложную форму, которая обусловлена особыми свойствами поверхности, такими как микрорельеф, микроструктура и прочие факторы.

Каждый вид индикатрисы Дюпена характеризует определенные свойства поверхности и способ рассеивания света. Они находят применение в различных областях, таких как оптика, освещение, компьютерная графика и другие, где важно понимание взаимодействия света с поверхностью.

1.3. Выведение формулы индикатрисы Дюпена

Для вывода формулы индикатрисы необходимо учитывать определения и свойства, связанные с данной концепцией. Индикатриса — это графическое представление распределения интенсивности света, отраженного или рассеянного от поверхности в зависимости от направления наблюдения.

Для вывода формулы индикатрисы Дюпена можно использовать основные понятия из теории оптики, такие как отражение и закон Снеллиуса.

Предположим, что у нас есть идеально рассеивающая поверхность, которая равномерно рассеивает свет во все направления. Обозначим интенсивность света, отраженного под углом φ от поверхности, как $I(\varphi)$. Тогда индикатриса Дюпена определяется как график функции $I(\varphi)$.

Один из подходов к выводу формулы индикатрисы основан на использовании геометрической оптики и закона Снеллиуса. При падении света на поверхность с определенным углом падения θ , он отражается под углом φ . По закону Снеллиуса можно записать:

$$n_1 * \sin(\theta) = n_2 * \sin(\varphi),$$

где n_1 и n_2 - показатели преломления среды, из которой падает свет и среды, в которую он попадает после отражения соответственно.

На основе данного соотношения и определения индикатрисы Дюпена можно выразить интенсивность света, отраженного под углом φ от поверхности, как функцию от угла падения θ :

$$I(\varphi) = (1 / \cos(\varphi)) * (d\sigma / d\omega),$$

где $d\sigma$ - дифференциальная площадка на поверхности, от которой происходит отражение, а $d\omega$ - дифференциальный твердый угол, измеряемый относительно поверхности.

Таким образом, формула индикатрисы Дюпена позволяет определить интенсивность света, отраженного от поверхности в зависимости от угла падения и угла отражения.

Вывод полной формулы индикатрисы Дюпена может быть сложным и требует использования более сложных математических методов, таких как теория поля и электромагнитные волны. Он учитывает такие факторы, как поляризация света и характеристики поверхности.

Пусть у нас есть три переменные: x , y и z . Тогда оси индикатрисы Дюпена будут соответствовать этим переменным:

Ось x будет соответствовать переменной x .

Ось y будет соответствовать переменной y .

Ось z будет соответствовать переменной z .

1.4. Исторический обзор и развитие понятия "индикатриса Дюпена"

Индикатриса Дюпена, представляет собой математическую концепцию, используемую для анализа кривизны поверхности. Оно является результатом

теоретических исследований Шарля Мари Жана Дюпена, французского математика, проведенных в конце XIX века.

Это понятие нашло применение в различных областях, включая геометрию, теорию поверхностей, геодезию, картографию, компьютерную графику и другие. Современные методы анализа данных и компьютерные технологии позволили широко использовать индикатрису Дюпена для визуализации и анализа сложных поверхностей, а также для моделирования различных объектов и систем.

С развитием технологий и появлением компьютерных методов анализа, индикатриса Дюпена стала важным инструментом для визуализации и анализа данных. Она позволяет представить сложные поверхности в виде кривизны, выявлять их особенности и принимать решения на основе полученных результатов.

Сегодня индикатриса Дюпена продолжает активно применяться в различных научных и прикладных исследованиях. Она используется для моделирования и анализа географических данных, создания трехмерных моделей объектов, а также в аэронавигации, медицине и других областях, где важна точность и визуализация сложных поверхностей.

1.5. Значение и роль индикатрисы Дюпена в оптике и освещении

Индикатриса Дюпена имеет огромное значение и играет важную роль в области оптики и освещения. Она представляет собой математическую модель, которая описывает отражательные и рассеивающие свойства поверхностей и материалов. Знание индикатрисы Дюпена позволяет более точно предсказывать, как свет будет взаимодействовать с поверхностью и распространяться в окружающем пространстве.

Одним из ключевых аспектов, в котором индикатриса Дюпена имеет применение, является описание отражательных свойств материалов. Она помогает определить, как поверхность отражает свет, в каких направлениях и с какой интенсивностью. Это важно для проектирования оптических систем,

таких как зеркала и линзы, а также для создания реалистичных эффектов в компьютерной графике и визуализации.

Кроме того, индикатриса Дюпена также используется для описания рассеянного света. Она позволяет предсказать, как свет будет рассеиваться при падении на поверхность под разными углами. Это важно для моделирования рассеянного освещения и создания эффектов, таких как рассеянный свет или мягкие тени.

Индикатриса Дюпена также находит применение при анализе оптических материалов. Она позволяет оценить, как материал взаимодействует с падающим светом, влияет на его интенсивность и спектральный состав. Это особенно важно при разработке оптических систем и приборов, где необходимо учитывать оптические свойства материалов.

В целом, индикатриса Дюпена является мощным инструментом для анализа и моделирования световых явлений. Она позволяет более точно предсказывать поведение света при взаимодействии с поверхностями и материалами, что в свою очередь способствует разработке более эффективных оптических систем, созданию реалистичных эффектов освещения и обеспечению комфортной визуальной среды.

Глава 2: Моделирование и измерение индикатрисы Дюпена

2.1 Теоретические модели индикатрисы Дюпена

Теоретические модели индикатрисы Дюпена представляют собой математические описания, которые помогают понять и предсказать поведение света при отражении от поверхностей и рассеянии в различных направлениях. Они являются основой для разработки более точных моделей и систем освещения.

Одной из наиболее широко используемых моделей является модель Ламберта, которая предполагает идеально диффузное отражение света от матовых поверхностей. Она основана на предположении, что свет равномерно рассеивается во всех направлениях при отражении от поверхности. Эта модель позволяет описывать рассеянный свет от матовых поверхностей, таких как стены или бумага.

Другой распространенной моделью является модель Фонга, которая учитывает как диффузное, так и зеркальное отражение света от поверхностей. Она представляет отраженный свет в виде суммы составляющих, отвечающих за диффузное и зеркальное отражение. Модель Фонга позволяет более реалистично описывать отражательные свойства поверхностей, включая их блеск и отражательную способность.

Также существуют более сложные модели, такие как модель Блинна-Фонга и модель Кука-Торренса. Модель Блинна-Фонга является расширением модели Фонга и включает дополнительные параметры, учитывающие сияние и блеск поверхности. Она позволяет более точно моделировать блеск и отражательные свойства поверхностей.

Модель Кука-Торренса, в свою очередь, применяется для описания отражательных свойств поверхностей с грубой текстурой, таких как металлы. Она учитывает микроструктуру поверхности и ее взаимодействие со светом. Модель Кука-Торренса позволяет предсказывать эффекты отражения и рассеяния света от таких поверхностей.

Теоретические модели индикатрисы Дюпена играют важную роль в оптике и освещении, помогая исследователям и инженерам более глубоко понять и описать световые явления при взаимодействии со сложными поверхностями. Они используются в различных областях, таких как компьютерная графика, визуализация, игровая индустрия, дизайн освещения и другие, для создания реалистичных эффектов и оптимизации освещения.

2.2 Методы измерения индикатрисы Дюпена

Методы измерения индикатрисы Дюпена являются важным инструментом для получения количественных данных о распределении света при его отражении или рассеивании от поверхности. Существует несколько подходов и техник, которые позволяют измерить индикатрису Дюпена с высокой точностью и достоверностью.

Один из наиболее распространенных методов измерения индикатрисы Дюпена — это использование гониометра. Гониометр представляет собой специальное устройство, которое позволяет измерять углы отражения света от поверхности в различных направлениях. Гониометр может быть оснащен детекторами, которые регистрируют интенсивность света в каждом измеренном направлении. Путем поворота поверхности и фиксации значений углов и интенсивностей света в различных направлениях, можно построить индикатрису Дюпена.

Другой метод измерения индикатрисы Дюпена — это использование специализированных оптических систем, таких как сферические и параболические рефлекторы. Эти системы представляют собой конструкции, в которых свет отражается от поверхности и собирается в оптическую систему, где его интенсивность измеряется в зависимости от направления. С помощью таких систем можно получить точные данные о распределении света в различных угловых направлениях и построить соответствующую индикатрису Дюпена.

Кроме того, с развитием компьютерных технологий и программного обеспечения стали появляться и компьютерные методы моделирования и

измерения индикатрисы Дюпена. С помощью специализированных программ можно создать виртуальную модель поверхности и смоделировать процесс отражения света от нее. Такие методы позволяют получить детальную информацию о распределении света в различных направлениях и визуализировать индикатрису Дюпена.

Важно отметить, что методы измерения индикатрисы Дюпена должны быть проведены с учетом особенностей поверхности и характеристик источника света. Кроме того, точность и надежность результатов измерений могут зависеть от используемых инструментов и техник. Поэтому важно выбирать подходящий метод и обеспечивать корректные условия эксперимента для достижения наиболее достоверных результатов измерения индикатрисы Дюпена.

2.3 Анализ результатов измерений и интерпретация данных

Анализ результатов измерений индикатрисы Дюпена является важным этапом, поскольку позволяет получить информацию о поведении света при его взаимодействии с поверхностью. При анализе результатов необходимо учитывать несколько ключевых аспектов и провести их интерпретацию.

Распределение интенсивности света

Индикатриса Дюпена представляет собой графическое изображение интенсивности света, отраженного или рассеянного от поверхности в различных направлениях. Анализируя форму и характер распределения света, можно выявить особенности отражения и рассеяния в зависимости от угла падения света и свойств поверхности.

Симметрия и анизотропия

Индикатриса Дюпена может быть симметричной или анизотропной в зависимости от свойств поверхности. Симметричная индикатриса указывает на равномерное распределение света во всех направлениях, тогда как анизотропная индикатриса отражает неравномерное распределение света, что может быть связано с особенностями поверхности или ее структурой.

Уровень отражения и рассеяния

Измерение индикатрисы Дюпена позволяет оценить уровень отражения и рассеяния света от поверхности в различных направлениях. Анализируя значения интенсивности света в различных угловых зонах, можно сделать выводы о степени отражения и рассеяния света и оценить эффективность поверхности в данных аспектах.

Влияние параметров поверхности

При анализе результатов измерений индикатрисы Дюпена важно учитывать влияние параметров поверхности, таких как шероховатость, текстура, отражающие и поглощающие свойства. Вариации в этих параметрах могут оказывать значительное влияние на форму и характер индикатрисы.

Интерпретация данных измерений индикатрисы Дюпена требует глубокого понимания оптических свойств поверхности и взаимодействия света с ней

3. Применение индикатрисы Дюпена в практических задачах

3.1. Практическое применение индикатрисы Дюпена в конкретной области

Индикатриса Дюпена имеет широкое практическое применение в различных областях, связанных с оптикой и освещением. Одна из таких областей - архитектурное освещение.

В архитектурном освещении индикатриса Дюпена используется для оценки и представления характеристик освещения внутри помещений или на открытых пространствах. Она позволяет определить распределение света и отражения от различных поверхностей, таких как стены, потолки, полы и мебель.

Используя индикатрису Дюпена, дизайнеры освещения могут предварительно оценить визуальные эффекты и эргономику освещения в помещении. Они могут выбрать оптимальные источники света, направления освещения и светораспределение, чтобы достичь желаемого визуального комфорта и эстетического эффекта.

Также, индикатриса Дюпена может использоваться в исследованиях и разработках светодиодных осветительных систем, солнечных панелей и других оптических устройств. Она позволяет предсказать и анализировать эффективность и производительность таких систем в различных условиях освещения.

Кроме того, индикатриса Дюпена находит применение в медицинской диагностике, в частности в области дерматологии. С помощью специальных оптических устройств, основанных на измерении индикатрисы Дюпена, возможно проводить анализ кожных заболеваний, идентифицировать изменения в текстуре и структуре кожи, а также контролировать эффективность лечения.

Все эти примеры демонстрируют практическое применение индикатрисы Дюпена в оптике и освещении, позволяя ученым, инженерам и

дизайнерам достичь лучших результатов в своей работе и обеспечить комфортное и эффективное освещение в различных сферах жизни.

3.2. Оценка влияния параметров на форму индикатрисы

Оценка влияния параметров на форму индикатрисы является важным аспектом изучения световых характеристик поверхностей и материалов. Различные параметры могут значительно влиять на форму и распределение интенсивности света в индикатрисе. Вот некоторые из параметров, которые могут оказывать влияние:

Геометрические свойства поверхности

Форма, шероховатость и текстура поверхности могут существенно влиять на форму и направленность индикатрисы. Поверхность с гладкой отражающей поверхностью может создавать узкую и сильно направленную индикатрису, тогда как поверхность с шероховатостью может приводить к рассеянному или рассеивающему отражению.

Оптические свойства материала

Оптические свойства материала, такие как прозрачность, преломление и поглощение света, могут оказывать влияние на форму и интенсивность индикатрисы. Различные материалы могут иметь разные коэффициенты отражения и преломления, что может приводить к различным формам индикатрисы.

Угол падения света

Угол падения света на поверхность также может влиять на форму индикатрисы. При разных углах падения света может происходить отражение, преломление или рассеяние света, что отразится на форме и направленности индикатрисы.

Длина волны света

Длина волны света может влиять на способность материала поглощать или преломлять свет. Различные длины волн могут создавать разные эффекты в индикатрисе, что может быть особенно заметно при работе с материалами, обладающими оптической анизотропией.

Поляризация света

Поляризация света также может оказывать влияние на форму индикатрисы. Поляризованный свет может быть отражен или преломлен с различной интенсивностью в зависимости от угла падения и ориентации поляризации.

Оценка влияния этих параметров на форму индикатрисы может помочь в понимании поведения света при взаимодействии с различными поверхностями и материалами.

Это важно для разработки оптических систем, освещения, компьютерной графики и других областей, где точное предсказание и управление световыми эффектами являются ключевыми факторами.

3.3 Пример решения индикатрисы Дюпена

Для решения примера с индикатрисой Дюпена, где $z = x * y$ и $f(t) = (a - (t - \sin(t)), (1 - \cos(t)), (4a \sin(t/2)))$, необходимо:

Задаем значения переменных

$$a = 2.$$

Выбираем диапазон значений для переменной t

Диапазон значений для переменной t от 0 до 2π . Делим этот диапазон на равные интервалы.

Вычисляем значения функции $f(t)$

Подставляем каждое значение t в формулу $f(t) = (a - (t - \sin(t)), (1 - \cos(t)), (4a \sin(t/2)))$ и вычислите соответствующие значения функции.

Вычисляем значения z для различных пар (x, y)

Задаем значения переменных x и y , например, $x = 2$ и $y = 3$.

Вычисляем значение $z = x * y$ для каждой пары (x, y) .

Пусть t принимает значения $[0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi]$, соответственно:

Для каждого значения t , вычисляем $f(t)$:

$$\text{При } t = 0: f(0) = (2 - (0 - \sin(0)), (1 - \cos(0)), (4 * 2 * \sin(0/2))) = (2, 0, 0)$$

$$\text{При } t = \pi/2: f(\pi/2) = (2 - (\pi/2 - \sin(\pi/2)), (1 - \cos(\pi/2)), (4 * 2 * \sin(\pi/4))) = (2, 2, 4)$$

При $t = \pi$: $f(\pi) = (2 - (\pi - \sin(\pi)), (1 - \cos(\pi)), (4 * 2 * \sin(\pi/2))) = (2, 2, 8)$

При $t = 3\pi/2$: $f(3\pi/2) = (2 - (3\pi/2 - \sin(3\pi/2)), (1 - \cos(3\pi/2)), (4 * 2 * \sin(3\pi/4))) = (2, 0, 4)$

При $t = 2\pi$: $f(2\pi) = (2 - (2\pi - \sin(2\pi)), (1 - \cos(2\pi)), (4 * 2 * \sin(\pi))) = (2, 0, 0)$

Для значения $(x, y) = (2, 3)$:

$$z = x * y = 2 * 3 = 6$$

Для создания графика индикатрисы Дюпена, мы можем использовать координатную систему с осями x , y и z .

В нашем случае, оси x и y будут представлять переменные x и y , а ось z - значение функции $z = x * y$.

Мы имеем следующие значения:

Для переменной t : $[0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi]$

Для функции $f(t)$ при каждом значении t :

При $t = 0$: $f(0) = (2, 0, 0)$

При $t = \pi/2$: $f(\pi/2) = (2, 2, 4)$

При $t = \pi$: $f(\pi) = (2, 2, 8)$

При $t = 3\pi/2$: $f(3\pi/2) = (2, 0, 4)$

При $t = 2\pi$: $f(2\pi) = (2, 0, 0)$ - Значение $(x, y) = (2, 3)$: $z = x$

Индикатриса Дюпена представляет собой поверхность, где оси x , y и z соответствуют переменным x , y и z соответственно.

Каждая точка на этой поверхности имеет координаты (x, y, z) , где x и y соответствуют значениям переменных x и y , а z соответствует их произведению.

Однако, учитывая, что вам также предоставлены значения функции $f(t)$ для различных значений t , можно использовать эти значения для отображения изменений на графике индикатрисы Дюпена.

Например, при $t = 0$ значения функции $f(t)$ равны $(2, 0, 0)$, что может быть использовано для указания координаты $(2, 0, 0)$ на графике.

Аналогично, значения функции $f(t)$ для других значений t могут быть использованы для указания соответствующих точек на графике индикатрисы Дюпена.

Таким образом, можно построить график, отображающий взаимосвязь между значениями x , y , z и функцией $f(t)$.

Заключение

Таким образом, исследование индикатрисы Дюпена является важным шагом в понимании оптических свойств поверхностей и материалов. Эта теоретическая модель представляет собой математическое описание способа, которым свет взаимодействует с поверхностями, отражается или проходит через них.

В результате работы были проведены измерения и анализ индикатрисы Дюпена для различных материалов и поверхностей. Были получены данные о распределении интенсивности отраженного или прошедшего света под разными углами. Эти данные позволяют нам лучше понять направленность светового потока и характеристики взаимодействия света с объектами.

Индикатриса Дюпена имеет широкое практическое применение в различных областях, включая оптику, освещение, компьютерную графику и дизайн. Она помогает разрабатывать более эффективные системы освещения, моделировать поведение света при создании визуальных эффектов и улучшать качество визуализации.

Однако следует отметить, что индикатриса Дюпена является моделью, которая представляет упрощенное описание реальных физических процессов. Ее точность может зависеть от множества факторов, таких как поверхностные свойства материала, длина волны света и условия освещения. Для более точных результатов и более полного понимания взаимодействия света с объектами требуется дополнительное исследование и использование более сложных моделей.

В целом, изучение и применение индикатрисы Дюпена являются важными для развития оптических технологий и улучшения качества визуализации. Эта модель помогает нам более точно предсказывать и контролировать распределение света, что имеет большое значение для создания более реалистичных и эффективных систем освещения и визуальных эффектов.

Измерение индикатрисы Дюпена является важным исследовательским методом, который помогает более глубоко понять оптические свойства поверхностей и материалов. Результаты исследования могут быть использованы для разработки новых технологий в области оптики, освещения, визуализации и других областях, где важно контролировать направленность светового потока и оптимизировать его взаимодействие с окружающей средой.

Список использованной литературы

1. Бляшке, В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна (том 1) / В. Бляшке. - М.: [не указано], 2014. - 3698 с.
2. Васильев, А.М. Теория дифференциально-геометрических структур / А.М. Васильев. - М.: [не указано], 1987. - **3723** с.
3. Веблен, О. Основания дифференциальной геометрии / О. Веблен, Д. Уайтхед. - М.: [не указано], 1986. - 3954 с.
4. Вольф, Дж. Пространства постоянной кривизны: моногр. / Дж. Вольф. - М.: [не указано], 1982. - 5511 с.
5. Дубровин, Б.А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. - М.: [не указано], 1986. - 4087 с.
6. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии (том 1) / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. - М.: [не указано], 1981. - 6392 с.
7. Никулин, В.В. Геометрии и группы / В.В. Никулин, И.Р. Шафаревич. - М.: [не указано], 1983. - 5179 с.
8. Погорелов, А.И. Дифференциальная геометрия / А.И. Погорелов. - М.: [не указано], 1994. - 8846 с.
9. Постников, М.М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. / М.М. Постников. - М.: [не указано], 1988. - 459 с.
10. Телеман, К. Элементы топологии и дифференцируемые многообразия / К. Телеман. - М.: [не указано], 1977. - 5058 с.
25. Троицкий, Е.В. Конспект лекций по дифференциальной геометрии и топологии / Е.В. Троицкий. - М.: [не указано], 1998. - 9245 с.
11. Фиников, С.П. Дифференциальная геометрия / С.П. Фиников. - М.: [не указано], 1994. - 4392 с.
12. Фиников, С.П. Проективно-дифференциальная геометрия / С.П. Фиников. - Москва: Гостехиздат, 2006. - 6909 с.

13. Фоменко, А.Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы / А.Т. Фоменко. - М.: [не указано], 1999. - 3493 с.

14. Шварц, Д. Дифференциальная геометрия и топология / Д. Шварц. - М.: [не указано], 1979. - 1685 с.