Содержание

Введение

Под численными методами подразумеваются приближенные процедуры, позволяющие получать решение в виде конкретных числовых значений.

В настоящее время численные методы являются мощным математическим средством решения многих научно-технических проблем. Это связано как с невозможностью в большинстве случаев получить точное аналитическое решение, так и со стремительным развитием ЭВМ. Несмотря на существование многочисленных стандартных программ и объектно ориентированных пакетов прикладных программ, для научных и инженерно-технических работников необходимо понимание существа основных численных методов и алгоритмов, поскольку зачастую интерпретация результатов расчетов нетривиальна и требует специальных знаний особенностей применяемых методов. В этой связи важно понимать структуру погрешностей при решении конкретных задач и корректность вычислений.

Целью контрольной работы является получение навыков решения нелинейных уравнений, построения математических моделей, решения систем нелинейных уравнений различными методами.

1 Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений

$$f(x)=x^3-3x^2-24x-8$$

В качестве исходных данных необходимо указать отрезок, содержащий только один корень уравнения, отделить корень. Таким образом, надо найти отрезок [a,b], на котором содержится ровно один корень уравнения f(x)=0.

Для определения отрезка [a,b] воспользуемся графическим методом.

На рабочем листе таблицы Excel протабулируем функцию $f(x)=x^3-3x^2-24x-8$ на интервале [-5;7], построим график и определим отрезки, на которых функция меняет знак, т.е. пересекает ось OX. На этом отрезке находится корень уравнения, который уточним с помощью численных методов. Функция пересекает ось OX на отрезках [-4;-3], [-1;0], [6;7], следовательно, на этом отрезке имеется корень.

Уточнение отрезка	
x	*f(x)*
-5	-88
-4,4	-45,664
-3,8	-14,992
-3,2	5,312
-2,6	16,544
-2	20
-1,4	16,976
-0,8	8,768
-0,2	-3,328
0,4	-18,016
1	-34
1,6	-49,984
2,2	-64,672
2,8	-76,768
3,4	-84,976
4	-88
4,6	-84,544
5,2	-73,312
5,8	-53,008
6,4	-22,336
7	20

1.1 Метод половинного деления

Метод деления пополам позволяет исключать в точности половину интервала на каждой итерации. При использовании метода считается, что функция непрерывна и имеет на концах интервала разный знак. После вычисления значения функции в середине интервала одна часть интервала отбрасывается так, чтобы функция имела разный знак на концах оставшейся части. Итерации метода деления пополам прекращаются, если интервал становится достаточно малым.

Словесный алгоритм.

1. Найдем отрезок $[a,b]$: $f(a)f(b)<0$.
2. Положим $c=(a+b)/2$.
3. Если $f(a)f(c)<0$, то положим $b=c$, в противном случае $a=c$.
4. Если $x_0 = (a+b)/2$, то $\phi(x) = x + \psi(x)f(x)$, в противном случае выполнить пункт 2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Исходные данные**						
2	***a***	***b***	***eps***				
3	6	7	0,001				
4							
5	***a***	***b***	***c***	***y(a)***	***y(b)***	***y(c)***	***Оценка погрешности***
6	6	7	6,5	-44	20	-16,125	1
7	6,5	7	6,75	-16,125	20	0,859375	0,5
8	6,5	6,75	6,625	-16,125	0,859375	-7,896484375	0,25
9	6,625	6,75	6,6875	-7,896484375	0,859375	-3,585205078	0,125
10	6,6875	6,75	6,71875	-3,585205078	0,859375	-1,379669189	0,0625
11	6,71875	6,75	6,734375	-1,379669189	0,859375	-0,264347076	0,03125
12	6,734375	6,75	6,7421875	-0,264347076	0,859375	0,296462536	0,015625
13	6,734375	6,7421875	6,73828125	-0,264347076	0,296462536	0,015795052	0,0078125
14	6,734375	6,73828125	6,736328125	-0,264347076	0,015795052	-0,124341659	0,00390625
15	6,736328125	6,73828125	6,737304688	-0,124341659	0,015795052	-0,054289718	0,001953125
16	6,737304688	6,73828125	6,737792969	-0,054289718	0,015795052	-0,019251437	**Корень = 6,73779**

Ответ: корень уравнения на отрезке [6; 7] равен 6,73779.

1.2 Метод хорд

Согласно методу хорд, найденный отрезок [-1,5; 0] делится точкой с, которая находится по формуле $c = \dfrac{a \cdot y(b) - b \cdot y(a)}{y(b) - y(a)}$, на два отрезка, затем выбираем новый отрезок от точки пересечения хорды с осью абсцисс до неподвижной точки, на которой функция сменяет знак и содержит решение. Полученный отрезок переобозначается [a,b] и снова находится с до тех пор, пока не выполнится условие $|c_{i+1} - c_i| < \varepsilon$. За приближенное значение корня принимается c_{i+1}.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Исходные данные**						
2	*a*	*b*	*eps*				
3	6	7	0,001				
4							
5	*a*	*b*	*c*	*y(a)*	*y(b)*	*y(c)*	*Оценка погрешности*
6	6	7	6,6875	-44	20	-3,58521	
7	6,6875	7	6,735003364	-3,58521	20	-0,21932	0,047503364
8	6,735003364	7	6,737877777	-0,21932	20	-0,01316	0,002874413
9	6,737877777	7	6,738050204	-0,01316	20	-0,00079	**Корень = 6,73805**

Ответ: корень уравнения на отрезке [6; 7] равен 6,73805.

1.3 Метод касательных

Суть метода касательных состоит в разбиении отрезка **[a; b]** (при условии **f(a)f(b) < 0**) на два отрезка с помощью касательной и выборе нового отрезка от точки пересечения касательной с осью абсцисс до неподвижной точки, на котором функция меняет знак и содержит решение, причём подвижная точка приближается к **ε**-окрестности решения.

Построение касательных продолжается до достижения необходимой точности решения **ε**.

Метод касательных применим для решения уравнения вида **f(x) = 0** на отрезке **[a; b]**, если ни одна точка отрезка **[a; b]** не является ни стационарной, ни критической, то есть **f’(x) ≠ 0** и **f’’(x) ≠ 0**.

Условие неподвижной точки для метода касательных **f(x)f’’(x) < 0**.

Условие начальной точки для метода касательных **f(x)f’’(x) > 0**.

Сначала находим отрезок **[a; b]** такой, что функция **f(x)** дважды непрерывно дифференцируема и меняет знак на отрезке, то есть **f(a)f(b) < 0**.

Далее применяем алгоритм решения.

Входные данные: **f(x), f’(x), f’’(x), a, b, ε**.

1. Если **f(a)f’’(a) > 0**, то **x = a**, иначе если **f(b)f’’(b) > 0**, то **x = b**.
2. **Δx = f(x)/f’(x)**.
3. **x = x − Δx**
4. Если **|Δx| > ε**, то идти к 2.

Выходные данные: **x**.

Значение **x** является решением с заданной точностью **ε** нелинейного уравнения вида **f(x) = 0**.

Если **f(x) = 0**, то **x** — точное решение.

	A	B	C	D	E
1	**Исходные данные**				
2	***x***	***eps***			
3	7	0,001			
4					
5	***xn***	***xn+1***	***Оценка погрешности***	***Контроль нуля y(xn+1)***	***Число итераций***
6	7	6,75308642	0,24691358	1,082340279	1
7	6,75308642	6,738115051	0,014971369	0,003865167	2
8	6,738115051	6,738061202	**Корень = 6,73806**	4,99165E-08	3

Ответ: корень уравнения на отрезке [6; 7] равен 6,73806.

1.4 Комбинированный метод хорд и касательных

Суть комбинированного метода заключается в приближении к искомому корню одновременно с двух сторон отрезка, на котором отделен корень уравнения. Начальным приближением в методе касательных служит тот конец отрезка, на котором выполняется условие $y(x_0)\cdot y''(x_0)>0$

Тогда приближение по методу касательных будет происходить слева, а по методу хорд – справа.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Исходные данные**								
2	***a***	***b***	***eps***						
3	6	7	0,001						
4									
5	***a***	***b***	***f(a)***	***f'(a)***	***f''(a)***	***f(b)***	***f'(b)***	***f''(b)***	***Отслеживание погрешности***
6	6	7	-44	48	30	20	81	36	
7	6,6875	6,75308642	-3,585205078	70,04296875	34,125	1,082340279	72,29401006	34,51851852	0,06558642
8	6,737877821	6,738115051	-0,013161728	71,76972567	34,42726693	0,003865167	71,77789302	34,42869031	**Корень = 6,738**

Ответ: корень уравнения на отрезке [6; 7] равен 6,738.

2 Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 35,8x_1+2,1x_2-34,5x_3-11,8x_4=0,5 \\ 27,1x_1-7,5x_2+11,7x_3-23,5x_4=12,8 \\ 11,7x_1+1,8x_2-6,5x_3+7,1x_4=1,7 \\ 6,3x_1+10x_2+7,1x_3+3,4x_4=20,8 \end{cases}$$

2.1 Метод Гаусса

Суть метода Гаусса состоит в приведении системы уравнений к треугольному виду с помощью элементарных преобразований строк.

Входные данные: A, b.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Прямой ход:

$$a_{11}^1=1,\ a_{12}^1=\frac{a_{12}}{a_{11}},\ldots,a_{1n}^1=\frac{a_{1n}}{a_{11}},\ b_1^1=\frac{b_1}{a_{11}};$$

$$a_{21}^1=0,\ a_{22}^1=a_{22}-a_{21}a_{12}^1,\ldots,a_{2n}^1=a_{2n}-a_{21}a_{1n}^1,\ b_2^1=b_2-a_{21}b_1^1;$$

$$a_{21}^1=0,\ a_{32}^1=a_{32}-a_{31}a_{12}^1,\ldots,a_{3n}^1=a_{3n}-a_{31}a_{1n}^1,\ b_3^1=b_3-a_{31}b_1^1;$$

…

$$a_{n1}^1=0,\ a_{n2}^1=a_{n2}-a_{n1}a_{12}^1,\ldots,a_{nn}^1=a_{nn}-a_{n1}a_{1n}^1,\ b_n^1=b_n-a_{n1}b_1^1;$$

$$\begin{cases} x_1+a_{12}^1x_2+a_{13}^1x_3+...+a_{1n-1}^1x_{n-1}+a_{1n}^1x_n=b_1^1 \\ a_{22}^1x_2+a_{23}^1x_3+...+a_{2n-1}^1x_{n-1}+a_{2n}^1x_n=b_2^1 \\ a_{32}^1x_2+a_{33}^1x_3+...+a_{3n-1}^1x_{n-1}+a_{3n}^1x_n=b_3^1 \\ ... \\ a_{n2}^1x_2+a_{n3}^1x_3+...+a_{nn-1}^1x_{n-1}+a_{nn}^1x_n=b_n^1 \end{cases}$$

$$a_{22}^2=1,\ a_{23}^2=\frac{a_{12}}{a_{11}},\ldots,a_{2n}^2=\frac{a_{2n}^1}{a_{22}^1},\ b_2^2=\frac{b_2^1}{b_{22}^1};$$

$$a_{32}^2=0,\ a_{33}^2=a_{33}^1-a_{32}^1a_{23}^2,\ldots,a_{3n}^2=a_{3n}^1-a_{32}^1a_{2n}^2,\ b_3^2=b_3^1-a_{32}^1b_2^2;$$

$$a_{42}^2=0,\ a_{43}^2=a_{43}^1-a_{42}^1a_{23}^2,\ldots,a_{4n}^2=a_{4n}^1-a_{42}^1a_{2n}^2,\ b_4^2=b_4^1-a_{42}^1b_2^2;$$

…

$$a_{n2}^2=0,\ a_{n3}^2=a_{n3}^1-a_{n2}^1a_{23}^2,\ldots,a_{nn}^2=a_{nn}^1-a_{n2}^1a_{2n}^2,\ b_n^2=b_n^1-a_{n2}^1b_2^2;$$

$$\begin{cases} x_1 + a^1_{12}x_2 + a^1_{13}x_3 + \ldots + a^1_{1\,n-1}x_{n-1} + a^1_{1\,n}x_n = b^1_1 \\ x_2 + a^2_{23}x_3 + \ldots + a^2_{2\,n-1}x_{n-1} + a^2_{2\,n}x_n = b^2_2 \\ a^2_{33}x_3 + \ldots + a^2_{3\,n-1}x_{n-1} + a^2_{3\,n}x_n = b^2_3 \\ \ldots \\ a^2_{n3}x_3 + \ldots + a^2_{nn-1}x_{n-1} + a^2_{nn}x_n = b^2_n \end{cases}$$

...

$$a^{n-1}_{n-1\,n-1} = 1,\ a^{n-1}_{n-1\,n} = \frac{a^{n-2}_{n-1\,n}}{a^{n-2}_{n-1\,n-1}},\ b^{n-1}_{n-1} = \frac{b^{n-2}_{n-1}}{a^{n-2}_{n-1}},$$

$$a^{n-1}_{nn-1} = 0,\ a^{n-1}_{nn} = a^{n-2}_{nn} - a^{n-2}_{nn-1}a^{n-1}_{n-1\,n},\ b^{n-1}_n = b^{n-2}_n - a^{n-2}_{nn-1}b^{n-1}_n,$$

$$\begin{cases} x_1 + a^1_{12}x_2 + a^1_{13}x_3 + \ldots + a^1_{1\,n-1}x_{n-1} + a^1_{1\,n}x_n = b^1_1 \\ x_2 + a^2_{23}x_3 + \ldots + a^2_{2\,n-1}x_{n-1} + a^2_{2\,n}x_n = b^2_2 \\ \ldots \\ x_{n-2} + a^{n-2}_{n-2\,n-1}x_{n-1} + a^{n-2}_{n-2\,n}x_n = b^{n-2}_{n-2} \\ x_{n-1} + a^{n-1}_{n-1\,n}x_{n-1} = b^{n-1}_{n-1} \\ a^{n-1}_{nn}x_n = b^{n-1}_n \end{cases}$$

$$a^n_{nn} = 1,\ b^n_n = \frac{b^{n-1}_n}{a^{n-1}_n},$$

$$\begin{cases} x_1 + a^1_{12}x_2 + a^1_{13}x_3 + \ldots + a^1_{1\,n-1}x_{n-1} + a^1_{1\,n}x_n = b^1_1 \\ x_2 + a^2_{23}x_3 + \ldots + a^2_{2\,n-1}x_{n-1} + a^2_{2\,n}x_n = b^2_2 \\ \ldots \\ x_{n-2} + a^{n-2}_{n-2\,n-1}x_{n-1} + a^{n-2}_{n-2\,n}x_n = b^{n-2}_{n-2} \\ x_{n-1} + a^{n-1}_{n-1\,n}x_{n-1} = b^{n-1}_{n-1} \\ x_n = b^n_n \end{cases}$$

Обратный ход:

$x_n = b^n_n,$

$x_{n-1} = b^{n-1}_{n-1} - a^{n-1}_{n-1\,n}x_n,$

$x_{n-2} = b^{n-2}_{n-2} - a^{n-2}_{n-2\,n-1}x_{n-1} - a^{n-2}_{n-2\,n}x_n,$

…

$x_2 = b^2_2 - a^2_{23}x_3 - a^2_{24}x_4 - \ldots - a^2_{2\,n-1}x_{n-1} - a^2_{2\,n}x_n,$

$x_1 = b^1_1 - a^1_{12}x_2 - a^1_{13}x_3 - \ldots - a^1_{1\,n-1}x_{n-1} - a^1_{1\,n}x_n,$

Выходные данные: x.

	A	B	C	D	E
1	**Метод Гаусса**				
2	35,80	2,10	-34,50	-11,80	**0,50**
3	27,10	-7,50	11,70	-23,50	**12,80**
4	11,70	1,80	-6,50	7,10	**1,70**
5	6,30	10,00	7,10	3,40	**20,80**
6	Прямой ход				
7	35,80	2,10	-34,50	-11,80	0,50
8	0,00	-9,09	37,82	-14,57	12,42
9	0,00	1,11	4,78	10,96	1,54
10	0,00	9,63	13,17	5,48	20,71
11					
12	35,80	2,10	-34,50	-11,80	0,50
13	0,00	-9,09	37,82	-14,57	12,42
14	0,00	0,00	9,41	9,17	3,06
15	0,00	0,00	53,24	-9,96	33,87
16					
17	35,80	2,10	-34,50	-11,80	0,50
18	0,00	-9,09	37,82	-14,57	12,42
19	0,00	0,00	9,41	9,17	3,06
20	0,00	0,00	0,00	-61,85	16,57
21	Обратный ход				Решение:
22	1,00	0,00	0,00	0,00	**0,40**
23	0,00	1,00	0,00	0,00	**1,50**
24	0,00	0,00	1,00	0,00	**0,59**
25	0,00	0,00	0,00	1,00	**-0,27**

Рисунок 1 Метод Гаусса

Ответ: 0,4; 1,5; 0,59; -0,27.

2.2 Матричный метод (метод обратной матрицы)

Суть метода обратной матрицы состоит в умножении обратной матрицы коэффициентов системы линейных уравнений на вектор свободных членов. Для решения методом обратной матрицы системы линейных уравнений вида **Ax=b** (где **A** – квадратная матрица **n*n** коэффициентов системы, а **b** – вектор свободных членов системы), сначала найдём главный определитель системы **Δ**. Метод обратной матрицы применим, если главный определитель системы **Δ≠0**.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Метод обратной матрицы**							
2	35,80	2,10	-34,50	-11,80	**0,50**			
3	27,10	-7,50	11,70	-23,50	**12,80**			
4	11,70	1,80	-6,50	7,10	**1,70**			
5	6,30	10,00	7,10	3,40	**20,80**			
6								
7	Обратная матрица				Решение:			
8	0,00	0,02	0,05	0,00	**0,40**			
9	0,03	-0,02	-0,08	0,09	**1,50**			
10	-0,02	0,02	0,02	0,02	**0,59**			
11	-0,02	-0,01	0,09	-0,02	**-0,27**			
12								

Ответ: 0,4; 1,5; 0,59; -0,27.

3 Методы численного интегрирования

$$\int_{0,6}^{2.4} \frac{\sqrt{1.1\,x^2+0.9}\,dx}{1.6+\sqrt{0.8\,x^2+1.4}}$$

3.1 Метод прямоугольников

Метод прямоугольников – метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене подынтегральной функции на многочлен нулевой степени, то есть константу, на каждом элементарном отрезке.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a; b]. Нам требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

Разобьем отрезок [a;b] на *n* частей $[x_{i-1};x_i]$ i=1,2,…n точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. Внутри каждого отрезка $[x_{i-1};x_i]$ i=1,2,…n выберем точку ξ_i. Так как по определению определенный интеграл есть предел интегральных сумм при бесконечном уменьшении длины элементарного отрезка разбиения $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n}\left(x_i - x_{i-1}\right)\to 0$, то любая из интегральных сумм является приближенным значением интеграла $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Если отрезок [a,b] является элементарным и не подвергается дальнейшему разбиению, значение интеграла можно найти по формуле левых прямоугольников: $\int_a^b f(x)\,dx \approx f(a)(b-a).$; формуле правых прямоугольников: $\int_a^b f(x)\,dx \approx f(b)(b-a).$; формуле прямоугольников (средних): $\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Метод прямоугольников**									
2	***a***	***b***	***n***	***h***						
3	0,6	2,4	10	0,18						
4	***y(a)***	***y(b)***								
5	0,392662792	0,664009								
6	***№***	***Xi***	***Yi***	***част суммы***	***1-я формула***	***2-я формула***	***Xi+1/2***	***Yi+1/2***	***част суммы***	***Усл. Формула***
7	0	0,6	0,392662792	0,070679302	…	…	0,69	0,40660922	0,07318966	…
8	1	0,78	0,421274493	0,146508711	…	…	0,87	0,436408272	0,151743149	…
9	2	0,96	0,45180029	0,227832764	…	…	1,05	0,467278541	0,235853286	…
10	3	1,14	0,482705553	0,314719763	…	…	1,23	0,497973846	0,325488578	…
11	4	1,32	0,513001268	0,407059991	…	…	1,41	0,527726613	0,420479369	…
12	5	1,5	0,542105709	0,504639019	…	…	1,59	0,556108054	0,520578818	…
13	6	1,68	0,569713987	0,607187537	…	…	1,77	0,582912353	0,625503042	…
14	7	1,86	0,595698597	0,714413284	…	…	1,95	0,608073228	0,734956223	…
15	8	2,04	0,620040588	0,82602059	…	…	2,13	0,631607875	0,84864564	…
16	9	2,22	0,642784365	0,941721776	…	…	2,31	0,65358081	0,966290186	**Интеграл = 0,96629**
17	10	2,4	0,664008955	1,061243388	**Интеграл = 0,94172**	**Интеграл = 0,99056**	стоп			

Ответ: интеграл по формуле 1 = 0,94172; по формуле 2 = 0,99056; по усложненной формуле = 0,96629.

3.2 Метод трапеций

Метод трапеций – метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене на каждом элементарном отрезке подынтегральной функции на многочлен первой степени, то есть линейную функцию. Площадь под графиком функции аппроксимируется прямоугольными трапециями. Алгебраический порядок точности равен 1.

Если отрезок [a,b] является элементарным и не подвергается дальнейшему разбиению, значение интеграла можно найти по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + E(f), \qquad E(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	***a***	***b***	***n***	***h***			
2	0,6	2,4	10	0,18			
3	***y(a)***	***y(b)***	***h*(y(a)+y(b))***				
4	0,512134	0,664008955	0,211705659				
5	***№***	***Xi***	***Yi***	***част. суммы***	***Интеграл***		
6	0	0,6	0,392662792	0,070679302	…		
7	1	0,78	0,421274493	0,146508711	…		
8	2	0,96	0,45180029	0,227832764	…		
9	3	1,14	0,482705553	0,314719763	…		
10	4	1,32	0,513001268	0,407059991	…		
11	5	1,5	0,542105709	0,504639019	…		
12	6	1,68	0,569713987	0,607187537	…		
13	7	1,86	0,595698597	0,714413284	…		
14	8	2,04	0,620040588	0,82602059	…		
15	9	2,22	0,642784365	0,941721776	…		
16	10	2,4	0,664008955	1,061243388	**Интеграл = 0,95539**		
17	11	стоп					

Ответ: интеграл по методу трапеций 0,95539.

Заключение

Численные (вычислительные) методы — методы решения математических задач в численном виде. Многие численные методы являются частью библиотек математических программ. В данной контрольной работе опробованы различные численные методы для решения нелинейных алгебраических уравнений, систем линейных алгебраических уравнений и численного интегрирования.

Таблица 1 Результаты решения

Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений	
Метод дихотомии	6,73779
Метод хорд	6,73805
Метод касательных	6,73806
Комбинированный метод	6,738
Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	
Метод Гаусса	0,40; 1,50; 0,59; -0,27
Метод обратной матрицы	0,40; 1,50; 0,59; -0,27
Методы численного интегрирования	
Метод прямоугольников	Интеграл 1 формула = 0,94172
	Интеграл 2 формула = 0,99056
	Интеграл Усл формула = 0,96629
Метод трапеций	Интеграл = 0,95539.

Список литературы

1. Численные методы / Под ред. Лапчика М.П.. - М.: Academia, 2017. - 608 с.

2. Гулин, А.В. Введение в численные методы в задачах и упражнениях: Учебное пособие / А.В. Гулин, В.А. Морозова, О.С. Мажорова. - М.: Инфра-М, 2017. - 432 с.

3. Ерохин, Б.Т. Численные методы: Учебное пособие / Б.Т. Ерохин. - СПб.: Лань КПТ, 2016. - 256 с.

4. Косарев, В.П. Численные методы линейной алгебры: Учебное пособие / В.П. Косарев, Т.Т. Андрющенко. - СПб.: Лань П, 2016. - 496 с. с.

5. Шахов, Ю.Н. Численные методы / Ю.Н. Шахов, Е.И. Деза. - М.: КД Либроком, 2017. - 248 с.